Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

herausgegeben

von

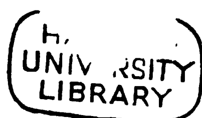
Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin.

Zweiter Band.

Jahrgang 1869 u. 1870.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1873.

1872, July 27
1873 Jan. 27, June 26



Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Altpr. Monatsschr.: Monatsschrift für altpreussische Geschichte.

Annalen des ges. Versicherungswesens: Annalen des gesammten Versicherungswesens. Berlin.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'école normale supérieure publiés sous les auspices du ministre de l'instruction publique par Mr. Le Pasteur avec un comité de rédaction. Paris.

Ann. d. R. M. Ind.: Annali del Reale Museo Industriale Italiano. Torino.

Ann. d. Sc. Norm: Annali della Scuola Normale. Pisa.

Ann. d. Un. Tosc.: Annali delle Università Toscana. Pisa.

Annuaire de l'Acad. de Belg: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona.

Astr. Viertjahr.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von C. Bruhns. Leipzig.

Atti d. Acc. d. N. Linc.: Atti dell' Accademia Pontifica dei Nuovi Lincei. Roma.

Atti di At. Ven.: Atti dell' Ateneo Veneto. Venezia.

Atti di Cat.: Atti dell'Accademia Givenia di Scienze naturali di Catania. Catania.

Atti dei XL.: Atti della Società Italiana dei XL. Firenze.

Atti d. S. d. Ing.: Atti della Società degl' ingegneri di Torino. Torino.

Atti di Torino: Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Torino.

Basel. Verh.: Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Basel.

Battaglini G.: Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicata per cura del Professore G. Battaglini. Napoli.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin.

Boncompagni Bull.: Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma.

Borchardt J.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass von C. W. Borchardt. Berlin.

Brioschi Ann.: Annali di Matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali gia pubblicati in Roma dal prof. Tortolini. Milano.

Bull. de Belg.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles.

Bull. Math.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, redigé par M. G. Darboux, avec la collaboration de MM. Hoüel et Loewy. Paris.

Bull. de Moscou.: Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Moscou.

Bull. de St. Pét.: Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig.

Carl Repert.: Repertorium für Experimental-Physik herausgegeben von Dr. Ph. Carl. München.

Clebsch Ann.: Mathematische Annalen herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. Leipzig.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris.

Dillner Tidskr.: Tidskrift för Matematik och Fysik, utgifen af Dillner, Hultman og Thalén.

Forh. af Christ.: Forhandlingar i Videnskabs Selskabet i Christiania. Christiania. Leipzig.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen.

Gött. Anz.: Göttingische gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen. Göttingen.

Grunert Arch.: Archiv für Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten, herausgegeben von J. A. Grunert. Greifswald.

Handl. Stockh.: Kgl. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar. Stockholm.

Hebr. Bibl.: Hebräische Bibliographie.

Hoffmann. Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig.

Jaarb. v. Amst.: Jaarbock van de koniugligke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Inst.: L'Institut, Journal universel des sciences et des sociétés savants en France et à l'étranger. Première section. Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Paris.

J. d. Coll. f. Lebensv.: Journal des Collegiums für Lebensversicherungswissenschaft. Berlin.

J. de l'Éc. Pol. Journal de l'école impériale polytechnique publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris.

J. de l. Soc. phil. de Moscou: Journal de la société philomatique de Moscou. Moscou.

Kieler Schriften: Schriften der Universität Kiel. Kiel.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe. Leipzig.

Liouville J.: Journal de mathématiques pures et appliquées ou recueil mensuel des mémoires sur les diverses parties de mathématiques, par J. Liouville. Paris.

Mém. cour de Belg. en 4^0 *où* 8^0: Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences de Belgique. Bruxelles.

Mem. di Bologna: Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.

Mém. de Bordeaux: Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux. Paris. Bordeaux.

Mem. d. Ist. Lomb.: Memorie del Reale Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti. Milano.

Mém. de Kasan: Mémoires de l'Université de Kasan. Kasan.

Mem. of Manch.: Memoirs of the litterary and philosophical society of Manchester. Manchester.

Mém. de Paris: Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Mém prés. de Paris: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut impérial de France. Sc. math. et phys. Paris.

Mem. dei IL.: Memorie della Società Italiana dei IL. Modena.

Mém. de St. Pét.: Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. St. Pétersbourg.

Mem. di Torino: Memorie dell' Accademia delle scienze di Torino. Torino.

Mem. di Vinez.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia.

Messenger: The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger, a journal supported by junior mathematical students of three universities, edited by Whitworth, Casey, Challis, Mc. Dowell, Taylor and Turnbull. London and Cambridge.

Mondes: Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leur application aux arts et à l'industrie par l'Abbé Moigno. Paris.

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenschaften. Zweite Classe. München.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenschaften zu München. München.

N. Act. Ups.: Nova Acta Regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Upsala.

N. Cim.: Il Nuovo Cimento. Pisa.

N. Schw. Denkschr. Neue Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaften für die gesammten Naturwissenschaften. Bern.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. Gerono et Bourget.

N. Mém. de Belg.: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles.

Nyt Mag.: Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, ved Sars og Kjerulf. Christiania.

Öfv. af Forh. Stockh.: Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar Stockholm.

Overs. v. Kopenh.: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Vorhandlingar. Af J. J. S. Steenstrup. Kopenhagen und Leipzig.

Phil. Mag.; The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and Journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London.

Pogg. Ann.: Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben zu Berlin von Poggendorff. Leipzig.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag.

Proc. of Dublin: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin.

Proc. of Edinb.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.

Proc. of L. M. S.: Proceedings of the London Mathematical Society. London.

Proc. of London: Proceedings of the Royal Society of London. London.

Proc of Manch.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London.

Rend. di Bologna: Rendiconti delle sessioni dell' accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.

Rend. d. Ist. Lomb.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Classe di scienze matematiche e naturali. Milano.

Rend. di Napoli: Rendiconti dell' accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli.

Rep. Brit. Ass.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of scienze. London.

Rivista Europea: Rivista Europea pubblicata da A. de Gubernatis. Firenze.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig.

Skrift. v. Kopenh.: Det Kongl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Kopenhagen.

Trans. of Cambridge.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Trans. of Dublin: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin.

Trans. of Edinb.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.

Trans. of London: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London.

Tychsen Tidsskr.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af C. Tychsen. Kopenhagen und Leipzig.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der math. naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Zweite Abtheilung. Wien.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Wien.

Wolf J.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure von Ziebarth.

Z. d. Deutsch. Morgenl. Ges.: Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft.

Inhaltsverzeichniss.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

Seite

C. A. Bretschneider. Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie 1
C. A. Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides 1
G. Friedlein. Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer und des christlichen Abendlandes, nebst Recension von J. Hoüel 2
F. Junghans. Ueber Methode und Genauigkeit astronomischer Beobachtungen bei den Alten 3
C. Göbel. De coelestibus apud Platonem motibus 3
†C. v. Littrow. Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften, nebst Recension von Schlömilch 3
G. Hofmann. Die Sonnenfinsterniss des Thales am 28. Mai 585 v. Chr. 3
M. Steinschneider. Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen in's Arabische 4
B. Boncompagni. Intorno all' opera d'Albiruni sull' India 4
M. Steinschneider Levi ben Gerson 5
G. Flemming. Ein Beitrag zur Geschichte des Kalenders 5
Tappe. Gerbert oder Papst Sylvester II und seine Zeit 5
Gerhard. Zur Geschichte der Algebra in Deutschland 6
M. Curtze. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme 6
M. Curtze. Domenico Maria Novara da Ferrara, der Lehrer des Copernicus 7
L. Prowe. Das Andenken des Copernicus bei der dankbaren Nachwelt 8
L. Prowe. Ueber den Sterbeort und die Grabstättte des Copernicus. 8
J. Fiedler. Peurbach und Regiomontanus 8
Breusing. Gerhard Kremer, genannt Mercator 9
J. A. Grunert. Gérard Mercator oder Gerhard Mercator? 9
L. F. Offerdinger. Ueber den Keppler'schen Kessel in Ulm 10
†F. Jacoli. Notizia sconosciuta relativa a Bonaventura Cavalieri. 10
E. Wohlwill. Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei, nebst Recension von Friedlein 11

†S. Gherardi. Il Processo Galileo riveduto sopra documenti di nuova fonte. 11
†G. Govi. Intorno a tre lettere di Galileo Galilei. 11
R. Wolf. Die Erfindung des Fernrohrs und ihre Folgen für die Astronomie. 11
G. A. Vorsterman von Oijen. Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVIe et du commencement du XVIIe siècle et leurs instruments. 11
Kiessling. Chr. Huygens „De circuli magnitudine inventa“ nebst Recension von Schlömilch. 12
†Ernst. Descartes, sein Leben und Denken. 12
J. G. Dreydorff. Pascal, sein Leben und seine Kämpfe, nebst Recension von Cantor. 12
J. Pisko. Newton oder Pascal. 13
H. Hankel. Die Entdeckung der Gravitation und Pascal. 13
C. Struve. Versuch, die naturphilosophischen Ansichten Newton's in ihrer Beziehung zu denen seiner Vorgänger darzulegen. . . 13
†J. Durdik. Leibniz und Newton. 13
F. Giesel. Jacob Bernoulli, nebst Recension von Cantor. 13
F. Burckhardt-Brenner. Leonhard Euler's Lehre vom Licht. . 14
S. Fellöcker. Geschichte der Sternwarte der Benedictinerabtei Kremsmünster. 14
H. Hankel. Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. 15
E. E. Kummer. Festrede. 15
F. W. Hültmann. Svenska aritmetikens historia. 15
R. Wolf. Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques. . . 15
G. Govi. Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air. 16
F. Jacoli. Intorno a due edizioni di Marco Michele Bousquet. . . 16
L. Am. Sédillot. Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collége de France. 17
F. Jacoli. Intorno ad una edizione degli elementi d'Euclide. . . . 17
H. Martin. Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos. 17
B. Boncompagni. Intorno ad uno scritto intitolato: „Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo De' Toschi di Fagnano“. . . 18
F. Siacchi. Sul teorema del Conte di Fagnano. 18
A. Genocchi. Di una formola del Leibniz e di una lettere di Lagrange al Conte Fagnano. 18
J. A. Grunert. Ein merkwürdiger Brief des achtzehnjährigen Lagrange an den Conte Fagnano 18
J. Hoüel. Sur une formule de Leibniz. 18
M. Cantor. Leibniz und die Differentiation mit beliebigem Index. 19
F. Keller. Intorno ad una formola del Leibniz. 10
G. Borchardt. Sur quelques passages de lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indice quelconque. 19
B. Boncompagni. Intorno ad uno scritto del Sig. Prof. Placido Tardy. 19
M. Cantor. Recension über „A. Forti, Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange“. 19
J. Bertrand. Valson. La vie et les travaux du Baron Cauchy. . 19
B. Boncompagni. La vie et les travaux du Baron Cauchy par Valson. 19
E. Narducci. Indicazione degli scritti di Agostino Cauchy. . . . 19
A. Genocchi. Di alcuni scritti attribuiti ad Agostino Cauchy. . . 20
F. Palermo. Sulla vita ed opere di Giovanni Battista Amici. . . 21
J. A. Grunert. J. J. I. v. Hoffmann. 21

Seite
A. Quetelet. Notice sur J.-A. Timmermans. 21
†F. Bruhns. Johann Franz Encke. 21
E. Narducci. Intorno alla vita ed agli scritti di Francesco Woepke. 21
J. A. Grunert. Ch. L. P. Eckhardt. 22
E. Schering. Notice biographique sur B. Riemann. 22
H. Gretschel. A. F. Möbius. 22
E. Janichefsky. Notice historique sur la vie et les travaux de Lobatchefsky. 22
J. Hoüel. Notice sur la vie et les travaux de Lobatchefsky. . . . 22
v. Martius. C. G. Ch. v. Staudt. 23
v. Martius. Sir David Brewster. 23
Spring. Discours prononcé sur les funérailles de Mr J. B. Brasseur. 23
A. Le Roi. Notice sur la vie et les travaux de Jean Baptiste Brasseur. 24
J. Liagre. Notice sur J.-B. Brasseur. 24
M. Cantor. Notice sur la vie et les travaux du général J. V. Poncelet par Didion. 24
F. Marchetti. Cenni Necrologici del P. Nazareno Mancini. . . . 24
H. M. Ludwig Ottinger. 24
F. August. E. F. August 25
G. Friedlein. Annotationes ad historiam matheseos spectantes. . 25
L. Matthiessen. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben. 25
Bösser. Die Theorie der kaustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. 26
Piani. Sul centro di gravità 29
F. Grube. Zur Geschichte des Mac-Laurin'schen Satzes, betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide. 29
A. Stiattesi. Sull' Aritmetica. 29
Jouglet. Le maître de Descartes; et ses théories. 267
L. Figuier. Vies des savants illustres. 267
Chasles, Le Verrier, Bertrand. Newton, Pascal et Galilée. . . . 268
J. Hoüel. Vie de Riemann. 268
Bertrand et Combes. Discours prononcés aux funérailles de Lamé. 268
E. de Beaumont. Éloge historique de Puissant. 268
Bibliophyle. Sur l'étymologie du mot Algorithme. 269
Béziat et Boncompagni. Sur Platon de Tivoli. 269
J. Hoüel. Notice sur la vie et les travaux de N. J. Lobatschefsky. 269
Puiseux. Discours sur Lamé. 269

Capitel 2. Philosophie.

J. Jäkel. Der Satz des zureichenden Grundes. 30
V. Valeriani. Del piano, sua definizione, assioma del piano elevato a teorema. 30
O. Schlömilch. Recension über: Fresenius: Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. 30
R. Mauritius. Bemerkungen zur Psychologie der Raumvorstellungen und zum Fechner'schen Gesetze der logarithmischen Perception. 30
J. J. Baumann. Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik. . . 31
J. C. Becker. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie, nebst Recension von Schlömilch. 32
J. Hoüel. Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide. 32

Seite
R. Sturm. Die neuere Geometrie auf der Schule. 33
J. Kober. Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. 34
J. Kober. Ueber die Definition des Parallelismus. 34
J. Kober. Die Lehre vom Parallelogramm. 35
H. Kiessling. Das geometrische Zeichnen als Vorschule für den mathematischen Unterricht. 35
E. Fischer. Beiträge zum geometrischen Unterrichte. 36
G. Korneck. Ueber mathematischen Unterricht. 36
D. Besso. Del concetto di funzione nell' insegnamento della geometria elementare. 36
E. Müller. Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt. 37
Oppel. Die wissenschaftliche Darstellung der Bruchrechnung und Division. 38
Buchbinder. Der mathematisch naturwissenschaftliche Unterricht. 38
W. R. Smith. Hegel and the metaphysics of the fluxional calculus. 38
A. Cayley. A memoir on abstract Geometry. 39
G. Boole. Of propositions numerically definite. 39
C. Neumann. Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie 39
J. M. C Duhamel. Sur les principes de la science des forces. . . 270
J. Hoüel. L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie. 271
B. Riemann. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. 271
†Coffin. Métaphysique du calcul différentiel. 271
J Bertrand. Sur la somme des angles d'un triangle. 271
J. Bertrand. Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle. 271

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen.

L. Königsberger. Berichtigung eines Satzes von Abel, die Darstellung der algebraischen Functionen befreffend. 40
C. Jordan. Commentaire sur Galois. 40
W. Walton. A demonstration that every equation has a root. . . 41
H. Kinkelin. Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. 41
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 1. 41
H. Krey. Bemerkungen über die algebraische Lösbarkeit der Gleichungen. 42
E. Schröder. Ueber unendlich viel Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. 42
C. F. E. Björling. Sur la séparation des racines d'équations algébriques. 43
R. Harley. On the Rev. T. P. Kirkman's method of resolving algebraic equations. 43
Beckendahl. Die Gleichungen höherer Grade. 43
H. Weissenborn. Beiträge zur Lehre von der Transformation der Gleichungen. 44
G. Yung ed A. Armenante. Sulle trasformazioni birazionali univoze e sulle curve normale e subnormale del genere p. . . . 44
A. Brill. Ueber die Zahl der Moduln einer Klasse von algebraischen Gleichungen. 45
E. Isé. Nota sulla risultante dei due equazioni. 45
T. Vallés. Des formes imaginaires en algèbre. 47

Seite

†F. Guthrie. On $\sqrt{-1}$. 47
W. S. B. Woolhouse. On general numerical solution. 47
H. Schramm. Les invariants et les covariants en qualité de critère pour les racines d'une équation. 47
D. Regis. Sul numero delle radici reali che puo'avere l'equazione $x^m - px + q = 0$. 48
A. Pöschko. Auflösungsmethoden unbestimmter Gleichungen. . . 48
S. Roberts. On the order of certain systems of algebraical equations. 48
A. S. Guldberg. Indledning in Arithmetik og Algebra. 49
H. Grassmann. Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. 49
G. Janni. Metodo per calcolare con approssimazioni successive certe le radici reali dell' equazioni algebriche. 49
A. Ehrlenholtz. Ueber die Lösung der binomischen Gleichung . 49
W. Bauer. Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear. 50
Th. Kötteritzsch. Ueber die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen. 50
†L. Zmurko. Studien im Gebiete mehrerer Gleichungen. 51
A. Cayley. Note on a system of algebraical equations. 51
†K. Weihrauch. Untersuchungen über eine Gleichung ersten Grades. 51
Ziegler. Das Zusammentreffen der graphischen mit der goniometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen. 52
L. Matthiessen. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben. 52
S. Gundelfinger. Bemerkung zur Auflösung der kubischen Gleichungen. 52
B. Tortolini. Soluzione di un problema relativo alle equazioni di 3° e 4° grado. 52
A. Cayley. Note on the solution of the quartic equation $aU + 6\beta H = 0$. 53
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 2. 53
V. Janni. Decomposizione di un' equazione di 4° grado fra due variabili in due fattori razionali di 2°. 53
L. Schläfli. La risolvente dell' equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee. . . . 53
T. N. Thiele. Lösning af Opgave 179. 54
Sylow. Bemarkning om Kjendetegnet paa en algebraisk Lignings Oplöselighed ved Rodtegn, naad den irreduktibel og dens Grad er et Primtal. 54
C. F. E. Björling. Om rötterna till algebraiska equationer. . . . 54
J. Petersen, A. F. Bing. Lösning af Opgave 124. 54
A. S. Guldberg. Om Ligningen af 5te Grad. 55
T. N. Thiele. Nogle kritiske Bemarkninger. 55
J. J. Walker. On the anharmonic-ratio sextic. 55
A. Cayley. Note. 56
G. Yung ed A. Armenante. Sopra una equazione dell 8° grado. 56
C. Jordan. Sur une équation du 16ème degré. 56
H. Schwarz. Kritische Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. 56
A. Cayley. A Note on his memoir: „On the condition for the existence of three equal roots". 57

Seite

G. B. Airy. On the factorial resolution of the trinomial $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$. 57
J. C. Adams. Note on the resolution of $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$ into factors. 57
A. Vecchio. Sulle equazioni trascendenti. 58
C. Jordan. Sur les équations de la géométrie. 273
C. Jordan. Théorèmes sur les équations algébriques 274
C. Jordan. Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. 274
C. Jordan. Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre 274
C. Jordan. Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré. 274
L. Kronecker. Sur le théorème de Sturm. 275
Brioschi. Sur les fonctions de Sturm. 276
Parpaite. Note sur la règle des signes de Descartes. 276
Le Besgue. Sur l'équation du troisième degré 276
Laguerre. Sur l'équation du troisième degré. 276
E. Catalan. Note sur l'article de Mr. Alexandre. 277
A. Roger. Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré. 277
G. Darboux. Sur la méthode d'approximation de Newton, mit Note von Gerono. 278
H. Montucci. Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinomes 278
Herrmann. Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendantes. . . 278
G. Darboux. Discussion de la fraction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. 279
E. Pellet. Solutions de deux questions (869, 890). 279

Capitel 2. Theorie der Formen.

A. Clebsch. Zur Theorie der binären algebraischen Formen. . . 58
P. Gordan. Die simultanen Systeme binärer Formen. 59
Beltrami. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. . 61
P. Gordan. Ueber ternäre Formen dritten Grades. 61
A. Clebsch und P. Gordan. Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. 62
A. Clebsch und P. Gordan. Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen. 64
A. Bessel. Ueber die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen. 64
F. Harbordt. Das simultane System einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form. 65
S Gundelfinger. Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. 65
A. Clebsch. Zur Theorie der binären Formen sechsten Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 66
A. Clebsch. Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren. 67
G. Battaglini. Sulle forme ternarie quadratiche. 68
P. Gordan. Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. 69

Seite

A. Clebsch. Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. 70
A. Cayley. Note on the theory of invariants. 70
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 9. 71
W S. Burnside. On the invariants and covariants α, α of a binary quartic, considered geometrically as a system of two ternary quadrics. 71
P. Gordan. Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante R einer Form n^{ten} Grades und einer Form m^{ten} Grades genügt. 72

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten. Invarianten. Covarianten. Symmetrische Functionen.

Rosanes und Pasch. Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. 73
Brioschi. Des substitutions de la forme
$\theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right)$ pour un nombre premier de lettres. . 74
A. Cayley. On a problem of elimination. 74
A. Cayley. Note on the discriminant of a binary quantic. 75
S. Roberts. On the degree of the discriminant with respect to a parameter in certain cases. 75
G. Bauer. Von der Zerlegung der Discriminante der kubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten. 76
Henrici. On certain formulae concerning the theory of discriminants. 76
J. Cockle. Third chapter on coresolvents. 78
S. Roberts. Note on a binary evectant form. 79
C. Neumann. Zur Theorie der Functionaldeterminanten. 79
A. Clebsch. Note zu dem Aufsatze: „Ueber eine Eigenschaft der Functionaldeterminanten". 79
R. Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. 80
L. Kronecker. Bemerkungen zur Determinantentheorie. 80
v. Zelewski. Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten. 82
J. Versluys. Application nouvelle des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. 82
Unterhuber. Einleitung in die Theorie der Determinanten. . . . 82
Ph. Gilbert Sur une propriété des déterminants fonctionels et son application au développement des fonctions implicites. . . 82
V. Eugenio. Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari. 83
H. G. Day. Theorem in Algebra. 83
A. Cayley. A „Smith's Prize' paper. 1869. Question 4. 84
Metzler. Die symmetrische Function
$fx'^{\alpha}x''^{\beta}x'''^{\gamma}\ldots - ([\alpha-1] + [\beta-1] + [\gamma-1] + \ldots)$. 84
E. Hess. Ueber die Darstellung der einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischer Gleichungen. 84
C. Jordan. Traité des substitutions algébriques. 280
R. Radau. Sur la résultante de 3 formes quadratiques ternaires. . 280
Abonné. Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants. 280
Gerono. Sur une application de la théorie des déterminants. . . 280
F. Lucas. Sur une formule d'analyse. 281

Seite

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

G. Cantor. Ueber die einfachen Zahlensysteme. 85
G. Cantor. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Producte 86
C. Sardi. Theoremi di aritmetica. 86
T. N. Thiele. Lösning af Opgave 225. 86
A. Steen. Lösning af Opgave 45. 86
E. Meissel. Ueber die Bestimmung der Primzahlmenge innerhalb gegebener Grenzen. 87
V. Schemmel. Ueber relative Primzahlen. 87
Götting. Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl von der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$. 87
W. B. Davis. Queries. 88
W. A. Wh. Queries. 88
M. A. Stern. Ueber einen Satz von Gauss. 88
M. A. Stern. Ueber quadratische, trigonale und bitrigonale Reste. 88
Bouniakowsky. Sur les congruences binômes exponentielles à base 3 et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives. 89
Bouniakowsky. Sur quelques formules, qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non quadratiques des nombres premiers. 89
W. A. Wh. Book Notices. 90
Ladrasch. Von den kubischen Resten und Nichtresten. 90
F. Unferdinger. Ueber die Kriterien der Theilbarkeit der Zahlen. 90
P. Tardy. Sopra alcuni teoremi aritmetici. 90
C. Sardi. Sull somme de' divisori de' numeri. 91
† G. B. Marsano. Sopra una quistione di posizione di numeri. . . 92
F. W. A. Heime. Untersuchungen über Primzahlen. 92
M. Jenkins. Proof of an arithmetical theorem leading, by means of Gauss's fourth demonstration of Legendre's law of réciprocity, to the extension of that law. 92
Bouniakowsky. Sur un théorème relatif à la théorie des résidus et de son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers. 92
Bouniakowsky. Sur le symbole de Legendre $\left(\frac{q}{p}\right)$ 93
M. A. Stern. Ueber einen einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und einige damit zusammenhängende Sätze. 93
E. Schering. Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. 94
E. Kummer. Ueber die einfachste Darstellung der aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen, welche durch Multiplikation mit Einheiten bewirkt werden können. 94
E. Kummer. Ueber die aus 31ten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. 95
E. Kummer. Ueber eine Eigenschaft der Einheiten der aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda=1$ gebildeten complexen Zahlen und über den zweiten Factor der Classenzahl. 96
L. Kronecker. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen. 97

Seite

Hill. Note sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes. 98
W. A. Wh. A new symbol. 98
W. Simerka. Die rationalen Dreiecke. 98
W. Adam. Methodische Anweisung zum Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel. 99
E. Meissel. Notiz über die Anzahl aller Zerlegungen sehr grosser ganzer positiver Zahlen in Summen ganzer positiver Zahlen. . 99
W. H. Thompson. On magic squares. 99
Horner. On the algebra of magic squares. 99
André. Solutions des questions. 282
J. Liouville. Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5$ (mod. 12). 282
Laisant et Beaujeux. Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques. 282
E. Catalan. Note sur la partition des nombres 282
Gerono. Note sur une démonstration de Legendre. 283
E. S. Barrachina. Note sur les racines des nombres. 283
Pepin. Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationnels. 283
Le Besgue. Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive. 283
J. Bourget. Sur la théorie des racines. 284
J. Bourget. Note sur la racine carrée des nombres approchés. . 284
J. Liouville. Nouveau théorème concernant la fonction numerique $F(k)$. 284
J. Liouville. Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n. 284
J. Liouville. Théorème concernant la fonction numérique $\varrho_2(n)$. . 285
E. Pellet. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire. 285
L. Bignon. Solution d'une question (826). 285
A. Laisant. Solution d'une question (902). 286
Morel. Solution d'une question (914). 286
Schlegel. Solution d'une question (889). 286

Capitel 2. Theorie der Formen.

L. Calzolari. Nuova soluzione generale in numeri razionali dell' equazione: $w^2 = a + bv + cv^2$. 100
L. Calzolari. Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$. 100
L. Calzolari. Soluzione generale dell' equazione $y^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots x_n^2$. 102
L. Calzolari. Nota sull' equazione: $u^2 = Ax^2 \pm By^2$. 102
P. Bachmann. Ueber ternäre quadratische Formen. 102
P. Bachmann. Zur Transformation ternärer quadratischer Formen. 102
A. Clebsch. Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. 103
J. Liouville. Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5$ (mod. 12). 286
J. Liouville. Sur la forme ternaire $x^2 + 2y^2 + 3z^2$. 287
J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. . . 287
J. de Khanikof. Procédé pour résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée $A + Bt^2 = u^2$. 287
Gerono. Sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. 287
Le Besgue. Note sur quelques équations indéterminées. 287
J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. . . 288

Seite

Capitel 3. Kettenbrüche.

F. Minding. Loi de la formation des dénominateurs et des numérateurs pour la réduction des fractions continues en fractions ordinaires. 105
T. N. Thiele. Bemarkning om Kjaedebroker. 105
T. N. Thiele. Den endelige Kjaedebröks-funktions Theori. . . . 106
Falk. Et konvergents kriterium for kedjebråk med omvexlande positiva og negativa leder. 106
Seeling. Verschiedene Aufsätze zur Zahlenlehre. 106
E. Weyr. Erweiterung der Giltigkeit der Entwickelung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch. 106
V. Eugenio. Dimostrazione di un teorema nella teoria dei numeri. 106
E. Sang. On the extension of Brouncker's method to the comparison of several magnitudes. 107

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

H. Fahland. Die Combinationslehre und der binomische Lehrsatz. 108
A. Dronke. Binomial-Coefficienten. 108
Th. Gessner. Die Bedeutsamkeit der Binomial-Coefficienten für den mathematischen Unterricht. 108
E. Schröder. Vier combinatorische Probleme. 108
C. de Polignac. On a problem in combinations. 109
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 8. 109
†W. Walton. A demonstration of the expression for the number of homogeneous products of n things of r dimensions. . . . 109
S. Hertzsprung. Forsäg paa in Fremstilling af Laren om Permutationen og Kombinationen. 110
A. Steen. Bestemmelse af et Kort efter Omlagning i Bunker. . . 110
A. Steen. Optälling af hvert andet Kort i en Stamme i en bestemt Orden. 110
F. J. Wrede. Om kombinerade lif räntors beräknande. 110
†A. Dorna. Sulla media aritmetica nel calcolo di compensazione. . 111
A. Frost. General solution and extension of the problem of the 15 school girls. 111
C. Seidelin. Beviser for a Par Saetninger i Permutationer Kombinationer. 111
P. Mansion. Sur le problème des partis. 111
G. Zeuner. Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. . . 111
M. Kanner. Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik. 113
M. Kanner. Grundlage zu einer Theorie des mittleren Risiko bei Lebensversicherungen. 114
D. Regis. Tavole grafiche atte a risolvere ogni quesito relativo agl' interessi composti ed alle annuità. 115
M. W. Crofton. On the proof on the law of errors of observation. 115
J. Todhunter. On the method of least squares 115
M. W. Crofton. On the theory of local probability. 116
J. Lüroth. Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. 116
P. Tchébychef. Formule d'interpolation par la méthode des moindres carrés. 116
W. Walton. On the expression of a certain function in the form of a series. 116

Seite

G. Santini. Compendiato esposizione del modo più vantaggiosa di risolvere una serie di equazioni lineari, resultanti da operazioni tutti ugualmente probabili, per la determinazione degli elementi di una proposta teorica. 117
F. Minding. Ueber eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 117
J. A. Serret. Sur un problème de calcul intégral. 289
W. Crofton. Sur quelques théorèmes de calcul intégral. 290
A. G. Melon. Sur les combinaisons complètes. 290
de St. Germain. Lettre à Mr. Bourget. 290

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

F. W. Barfuss. Lehrbuch der mathematischen Analysis. 118
K. Koppe. Anfangsgründe der algebraischen Analysis. 118
A. Winckler. Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. 118
C. Sardi. Su talune serie ed applicazione all' aritmetica. 119
A. Cayley. On the binomial theorem, factorials and derivations. . 120
Tröger. Ueber Summirung unendlicher Reihen. 120
†R. Most. Ueber die Summirung gesetzmässig ausgewählter Reihenglieder. 120
N. Jadanza. Sulle progressioni a due e a tre differenze. 120
N. Jadanza. Sulle progressioni. 120
A. Vecchio. Sulle proporzioni e progressioni. 121
E. Lemoine. Note sur une question d'arithmétique. 291
E. Catalan. Note sur la convergence et la divergence d'une certaine série. 291
P. Doucet. Note sur un caractère de convergence des séries. . . 291
Ch. Brisse. Démonstration d'un théorème de Gauss relatif aux séries. 292
Anonymus. Note relative à quelques cas de convergence. . . . 292
E. Catalan. Sur quelques développements en séries. 292
Bailland. Note sur les séries de termes positifs. 292
A. Genocchi. Sur la théorie élémentaire des produits infinies. . . 292
F. Didon. Sur certaines systèmes de polynomes associés. 293

Capitel 2. Besondere Reihen.

W. Walton. On an equation of mixed differences. 121
A. Winckler. Der Rest der Taylor'schen Reihe. 121
J. Thomae. Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen. . . . 122
L. Schläfli. Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe. . . 122
J. Thomae. Eine Recursionsformel. 122
†J. Thomae. Beiträge zur Theorie der durch die Heine'sche Reihe darstellbaren Functionen. 122
F. Unferdinger. Die verschiedenen Darstellungen des Products $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\dots(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$ als Summe von vier Quadraten. 122
F. Unferdinger. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. 123
O. Schlömilch. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. 123
O. Schlömilch. Ueber die harmonische Reihe. 123
A. Enneper. Relationen zwischen einigen unendlichen Reihen. . . 124

Seite
† Ch. Lindmann. De seriebus quibusdam annotationes. 124
B. Imchenietzky. Sur les fonctions de J. Bernoulli et l'expression de la différence entre l'intégrale aux différences finies et l'intégrale ordinaire dont les limites sont les mêmes. 124
J. Chiò. Nota sulla formola sommatoria applicata al calcolo di $S\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x}$. 124
E. Heine. Aus brieflichen Mittheilungen. 125
E. Heine. Ueber trigonometrische Reihen. 125
G. Darboux. Sur la série de Laplace. 295
P. Tardy. Note sur une formule de Leibniz. 295
J. Bourget. Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin. . . . 295
E. Lucas. Note sur les coefficients du binôme de Newton. . . . 295
de Virieu. Solution d'une question (615). 295
J. Chatelain et Moret-Blanc. Solution d'une question (951). . 295
S. Réalis. Identités arithmétiques. 296
Ph. Gilbert. Sur la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. 296
E. Pellet. Solution d'une question (853). 296
D. André. Solution d'une question (838). 296
S. Réalis. Démonstration d'une formule de trigonométrie. . . . 297
E. Lucas. Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers. 297

Sechster Abschnitt. Differential- und Integral-Rechnung.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.)

Stern. J. Bertrand: Traité de calcul différentiel et intégral. . . . 126
F. W. Barfuss. Lehrbuch der Differentialrechnung. 126
A. v. Tegethoff. Compendium der Differential- und Integralrechnung. 126
S. Spitz. Erster Cursus der Differential- und Integralrechnung. . . 127
† Price. Treatise on infinitesimal calculus. 127
† Björling. Elementerna af algebraisken Analysen och Differentialkalkylen. 127
Manilius. Note sur l'interprétation de la conception infinitésimale de Poisson. 127
A. de Morgan. On the root of any function and on neutral series. 127
A. S. Guldberg. Om Dannelsen of nye Algorithmer i Infinitesimalregningen. 128
C. Tychsen. Grundprinciperne for Differentiation af Functioner · 128
J. Bertrand. Traité de calcul différentiel. 298
Debacq. Théorie des infiniment petits. 298
A. Genocchi. Sur le passage des différences aux différentielles. . 299
F. Tissérand. Sur un point du calcul des différences. 300

Capitel 2. Differentialrechnung.

(Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima.)

E. B. Christoffel. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. 128
E. B. Christoffel. Ueber ein die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Problem. . . 129
R. Lipschitz. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Variabeln. 129

Seite

R. Lipschitz. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. 130
A. Genocchi. Intorno ad un teorema di calcolo differenziale. . . 130
R. Götting. Differentiation des Ausdrucks x^k, wenn x eine Function irgend einer unabhängig Variabeln bedeutet. 131
F. Unferdinger. Die allgemeinen Differentialquotienten der Functionen $e^{\alpha x} \cos(a + \beta x)$. 131
W. Walton. On a theorem on maxima and minima. 133
R. W. G. On geometrical methods in maxima and minima. 134
G. B. Marsano. Sulla legge delle derivate generali delle funzioni di funzioni di più variabili indipendenti, e sulla teoria delle forme di partizione dei numeri interi. 134
Lemoine. Sur un passage du traité de calcul différentiel par Mr. Serret. 300
E. Combescure. Sur quelques formes différentielles. 301

Capitel 3. Integralrechnung.

A. Andréieffsky. Sur l'intégration des expressions différentielles homogènes avec quelques applications. 134
A. Genocchi. Dimostrazione di una formola di Leibniz e Lagrange e di altre formole affini. 135
O. Schlömilch. Ueber die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen. 135
F. Unferdinger. Transformation und Bestimmung zweier dreifacher Integrale. 135
F. Unferdinger. Ueber zwei allgemeine Integrale. 141
A. Winckler. Ueber einige vielfache Integrale. 142
A. Enneper. Reduction eines vielfachen Integrals. 143
A. Steen. Om Ondrengen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af förste Art. . . . 144
R. Most. Ueber drei Integrationen innerhalb des Gebildes $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \dots = 1$. 145
O. Schlömilch. Ueber rectificable Curven. 145
O. Schlömilch. Notiz über die Rectification von Curven. 145
F. Didon. Sur une intégrale double. 302
Tissot. Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. 303
J. A. Serret. Sur un problème de calcul intégral. 303
W. Crofton. Sur quelques théorèmes de calcul intégral 303
R. Hoppe. Corollaire au théorème de Mr. Crofton. 304
F. Didon. Développément sur certaines séries de polynomes à un nombre quelconque de variables 304

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

A. Winckler. Ueber einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln. 146
H. Hankel. Beweis eines Hülfssatzes in der Theorie der bestimmten Integrale. 150
J. W. L. Glaisher. On a theorem in definite integration, mit Note von Cayley. 151
J. J. Nejedli. Ueber die mehrfachen und willkürlichen Werthe einiger bestimmten Integrale. 152
Zuchetti. Integrali simmetrici. 153
R. P. Note on a formola of Cauchy 153

Seite

G. F. Meyer. Ueber zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale. 153
D. Besso. Sull' integrale $\int_0^\beta \frac{\sin^m x\,dx}{x}$. 154
H. Mylord. Lösning af Opgave 270. 154
G. Dillner. Definite integraler af synektiska funktioner. 154
E. Catalan. Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler et sur quelques intégrales définies. 155
W. Roberts. Sur une intégrale double définie. 156
Ch. Hermite. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. 157
J. W. Strutt. On the values of the integrals $\int_0^1 Q_n Q_{n'}\,d\mu$, $Q_n, Q_{n'}$ being Laplace's coefficients of the orders n, n'. 157
P. Tchébycheff. Des fonctions semblables à celles de Legendre. 157
J. Liouville. Extrait des lettres adressées à Mr. Le Besge. . . 305
F. Tissérand. Sur l'interpolation. 305
Ch. Hermite. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. 307

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Al. Mayr. Construction der Differentialgleichungen aus partikulären Integralen. 158
F. Grelle. Die Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen mittels der Methode der Trennung der operativen Symbole. 160
J. Cockle. On convertent functions. 162
P. du Bois-Reymond. Ueber die Integration totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht. . . . 162
Grünwald. Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differentialgleichungen mit variabeln Coefficienten. 163
N. Trudi, Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl' integrali. 163
G. G. Stokes. Supplement to a paper on the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments. . . . 163
Zorer. Integration der Gleichungen des ersten Grades mit constanten Coefficienten. 164
Ch. Hansen. On partikulare Oplösninger svarende til Differentialligninger af först Orden. 165
Studnička. Beiträge zur Theorie der Integration von completen linearen Differentialgleichungen. 165
N. Bougaieff. Sur les formes intégrables des équations différentielles du premier ordre. 166
J. J. Sylvester. The story of an equation of differences of the second order. 167
J. Cockle. On a certain Boolian trinomial. 167
D. G. Bidrag till in elementär Framställning af läran om integrerande faktorn. 167
D. G. Om integrering medelst substitution. 168
A. Steen. Om lineare Differentiallingningers Integration ved bestemte Integraler. 168
Holmgren. Sur l'intégration d'une équation différentielle. . . . 169

Seite

H. Mylord. Lösning af Opgave 267. 169
A. Steen. Ogtan en Methode til Integration af

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=f(x^2+y^2)$$ 169

G. M. Leffler. Integration af differentialequationer

$$f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ 169

A. Steen. Nogle Bemarkninger om Integration af Differentialligninger. 170
Anonymus. On a class of differential equations. 170
A. Cayley. On the integration of certain differential equations by series. 171
† P. Helmling. De aequatione $X_0 \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$ integranda. 172
R. Most. Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. . 172
J. Cockle. Om criticoids. 175
L. Fuchs. Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. 175
C. Tychsen. Rettelse til in Afhandling af Abel. 175
Andréiewsky. Sur l'intégration de quelques équations différentielles du second ordre par la méthode du facteur. 308
Collet. Théorie du facteur pour l'intégration des expressions différentielles du premier ordre. 309
J. Bertrand. Rapport sur Mr. Collet: „Théorie etc.“ 309
Collet. Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes. 309

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

B. Riemann. Die partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. 175
F. Grelle. Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen mittelst der Methode der Trennung der operativen Symbole. 177
V. G. Imschenetsky. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 177
C. Niven. Application of a change of the dependent and independent variables. 178
R. Radau. Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik. 178
A. Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement. . 178
G. Holzmüller. Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetz von Weber. 178
A. Brill. Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen. 178
† R. Moon. The solution of linear partial differential equations of the second order involving two independent variables. . . . 179
S. Spitzer. Integration einer partiellen Differentialgleichung. . . . 179
A. Cayley. A „Smith's Prize“ paper 1869. Question 14. 180
P. C. V. Hansen. Lösning af Opgave 118. 180
P. C. V. Hansen. Cauchy's Methode til Integration af partielle Differentialligninger af 1ste orden. 181

Seite

R. Moon. On the equation of Laplace's coefficient. 181
L. Schläfli. Ueber die partielle Differentialgleichung $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2w}{dx^2}$. 181
Korkine. Sur les équations simultanées aux différences partielles du premier ordre. 311
Collet. Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. 312
Laguerre. Note sur une classe d'équations différentielles du second ordre. 315
Laguerre. Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées du premier ordre. 315
Laguerre. Sur l'intégration d'une equation différentielle du second ordre. 315
G. Darboux. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. 316
G. Darboux. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles 316
Moutard. Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. 321
J. Bertrand. Rapport sur: „Moutard, Recherches". 321
F. Didon. Sur une équation aux dérivées partielles. 322
F. Didon. Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles. 324

Capitel 7. Variationsrechnung.

A. Mayer. Ueber den Satz der Variationsrechnung, welcher dem Princip der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht. . . 182
Sabinine. Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples. 183
Lundström. Distinction des maxima et minima dans un problème isopérimétrique. 185
E. Heine. Aus brieflichen Mittheilungen Nr. 2. 185
L Lindelöf. Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minima. 186
W. Walton. On a problem in the calculus of variation. 186
F. Didon Sur une mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables. 325
F. Didon. Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles. . 326

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeine Functionen.

J. Thomae. Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 187
E Beltrami. Articolo bibliografico: Teorica generale delle funzioni di variabili complesse. 187
J. Worpitzky. Beiträge zur Functionentheorie. 187
H. Hankel. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden Functionen. 190
A. Grunert. Allgemeine analytische Theorie der Function $\Pi(x)$. . 191
W. Hultmann. Potensläran. 192
Seidel. Ueber den Grenzwerth eines unendlichen Produkts von der Form $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$ 192

Seite

A. Winckler. Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. 194
J. Brockmann. Die goniometrischen Functionen in ihrer allgemeinen analytischen Bedeutung. 196
A. Cayley. On the logarithmes of imaginary quantities. 197
Hill. Remarques sur les fonctions entières à diviseurs binômes. . 198
Tchébycheff. Sur la détermination des fonctions par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable. 198
E. Netto. De transformatione aequationis $y^n = R(x)$. 199
E. Schröder. Ueber iterirte Functionen. 200
M. Nöther. Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln. 202
C. Neumann. Ueber eine Erweiterung desjenigen Satzes der Integralrechnung, welcher der Theorie der Potentialbruchzerlegung zu Grunde liegt 203
L. Kronecker. Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. 203
R. Lipschitz. Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems. 206
C. Weierstrass. Ueber die allgemeinsten eindeutigen und $2n$fach periodischen Functionen von n Veränderlichen. 207
B. Riemann. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige, mehr als $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist. 208
A. Grandi. Di una formola nota che si puo dedurre da un teorema di Cauchy. 208
H. Weber. Note zu Riemann's Beweis des Dirichlet'schen Princips. 209
F. E. Prym. Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$ 210
F. Prym. Ueber ein Randintegral. 212
F. Prym. Beweis zweier Sätze der Functionentheorie. 213
H. A. Schwarz. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ für die Fläche eines Kreises. 214
H. A. Schwarz. Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. 214
H. A. Schwarz. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. 214
H. Weber. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + k^2u = 0$. 217
E. Heine. Ueber trigonometrische Reihen. 217
G. Cantor. Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. 218
G. Cantor. Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. 218
J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. . . 327
E Catalan. Sur un paradoxe algébrique. 327
de St. Germain. Note sur la décomposition des fractions rationnelles. 327
C Jordan. Théorème sur les fonctions doublement périodiques. . 327
J. Hoüel. Théorie élémentaire des quantités complexes. 328

Seite

Capitel 2. Besondere Functionen.

O. Schlömilch. Ueber den Werth von arc tg $(\xi+i\eta)$. 219
W. H. L. Russell. Report on recent progress in elliptic and hyperelliptic functions. 219
A. Steen. Om Ondrengen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af förste Art . . 220
J. Thomae. Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen mit einer Veränderlichen. 220
F. Grube. Ueber zwei bestimmte Integrale. 225
W. Walton. A demonstration of a property of elliptic functions. . 225
B. Möllmann. Die geometrische Bedeutung des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$. 226
A. Enneper. Bemerkungen über eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. 226
A. Genocchi. Rassegna d'alcuni scritti relativi all' addizione degl' integrali ellittici ed abeliani. 227
F. Siacci. Sull teorema del Conte di Fagnano. 228
J. Lieblein. Ueber den Zusammenhang verschiedener Transformationsformeln für elliptische Integrale mit einem Problem der Geometrie. 230
L. Schläfli. Sullo sviluppo del periodo imaginario, pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo. . . . 232
Ch. Hermite. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques, en fonction du quotient des deux périodes. 233
E. Catalan. Sur l'addition des fonctions elliptiques. 234
F. J. Richelot. Die Landen'sche Transformation. 234
L. Königsberger. Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. 236
L. Königsberger. Die linearen Transformationen der Hermite'schen φ-Functionen. 238
L. Schläfli. Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. 238
L. Kiepert. De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. 239
E. Schering. Mittheilung über den III. Band von Gauss' Werken. 241
Th. Noth. Ueber die mit Hülfe der Jacobi'schen Function zu behandelnden Fälle der Centralbewegung. 241
† K. Seegers. Zur Theorie der elliptischen Functionen. 242
† E. V. Bonsdorf. Den geometriska theorie för complexa funktioner 242
M. Roberts. Sur les fonctions abéliennes 242
C. Jordan. Sur les équations de la division des fonctions abéliennes. 242
F. Casorati. Le relazioni fondamentale tra i moduli di periodicità. 243
J. Thomae. Beiträge zur Bestimmung von $\vartheta(0,0,\ldots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen. 244
L. Cremona. Sugl' integrali a differenziale algebrice. 244
A. Clebsch. Ueber die Curven, für welche die Klasse der zugehörigen Abel'schen Functionen $p=2$ ist. 245
H. Weber. Ueber das Additionstheorem der Abel'schen Functionen. 245
H. Weber. Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale. 246
A. Winckler. Ueber die Relationen zwischen den vollständigen Abel'schen Integralen verschiedener Gattung. 246

Seite

L. Fuchs. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. 248
L. Fuchs. Ueber eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. 252
L. Königsberger. Die Differentialgleichung der Perioden der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. 253
L. Königsberger. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. 254
A. Clebsch. Zur Theorie der binären Formen sechsten Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 255
†F. Casorati. Sulli moduli di periodicità degli integrali Abeliani. 255
C. Neumann. Ueber die Entwickelung einer Function nach Quadraten und Producten der Fourier-Bessel'schen Functionen. . 255
Ch. Hermite. Sur la transcendante E_n. 256
R. Most. Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunctionen. . 257
H. Hankel. Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. . . . 257
E. Lommel. Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. 258
E. Lommel. Integration der Gleichung

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}}\mp y=0$$

durch Bessel'sche Functionen. 258
L. Schläfli. Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen der Bessel'schen Functionen. 261
C. Neumann. Ueber Producte und Quadrate der Bessel'schen Functionen. 262
G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. 263
J. Thomae. Beitrag zur Theorie der Function

$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{pmatrix}x$ 263
Ascoli. Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse. 264
P. du Bois-Reymond. Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält. 264
L. Pochhammer. Ueber hypergeometrische Functionen $n$ter Ordnung. 265
L. Fuchs. Bemerkung zu der Abhandlung: „Ueber hypergeometrische Functionen erster Ordnung". 266
G. Zeuthen. Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un. 328
C. G. J. Jacobi. Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques. 328
F. Didon. Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégral elliptique. 330
P. Mansion. Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. 330
Allégret. Note sur l'existence de nouvelles classes de courbes. . 331
J. A. Serret. Rapport sur un Mémoire de Mr. Bouquet. 331
C. Jordan. Sur la trisection des fonctions abéliennes 331
C. Jordan. Sur la division des fonctions hyperelliptiques. 331
F. Brioschi. Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques. . . 332

Seite

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

A. Cayley. A memoir on abstract geometry. 333
Lagout. Premiers principes de la géométrie. 334
B. Riemann. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. 334
E Beltrami. Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidéenne. 334
J. Hoüel. Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide. 335
Flye St.-Marie. Sur le postulatum d'Euclide. 335
A. Genocchi. Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. 336
A. Genocchi. Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide. 336
R. Baltzer. Ueber die Hypothese der Parallelentheorie. 338
Laguerre. Sur l'emploi des imaginaires en géométrie. 339
S. Lie. Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. 341

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen. (Analysis situs.)

E. Bertini. Sui poliedri Euleriani. 341
K. Becker. Ueber Polyeder. 342
C. Jordan. Sur les assemblages de lignes. 344

Capitel 3. Elementare Geometrie.

E. Zizmann. Geometrische Formenlehre. 344
F. Becker. Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. . . . 345
†J. Frischauf. Elemente der Geometrie. 345
†A. Maier. Die ebene Geometrie und deren Anwendung. 345
Röhr. Methodologisch-mathematische Aphorismen. 345
†H. Green. Euclid's problems. 345
Schmidt. Anwendung der analytischen Geometrie zum Beweis bekannter Lehrsätze der Planimetrie. 345
G. Dillner. Grunddragen af geometriska kalkylen. 345
Laguerre. Sur la règle des signes en géométrie. 346
G. Dillner. Schematisk framställning af läran om jemnlöpunde linier. 346
G. Jung. Dimostrazione del teorema I Vol. VIII Giornale di Napoli Pag. 96. 346
R. Most. Zur Lehre von den Transversalen im Dreieck und in der dreiseitigen Pyramide. 346
S. Brauns. Zur Lehre von den Dreieckstransversalen. 347
A. Dietrich. Ueber Nulllinien. 348
A. Grunert. Ueber einen geometrischen Satz. 349
E. Lemoine. Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle. 349
Chr. F. Lindmann. Demonstratio synthetica theorematis, quod ex Elementis Euclidis a Cell. Betti et Brioschi editis sumtum et pag. 116 tomi Li hujus Archivi propositum est. 350
W. H. Besant. Mathematical notes. 350
J. Lappe. Ueber den Feuerbach'schen Satz für das ebene Dreieck. 350

Seite

Th. Spieker. Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des geradlinigen Dreiecks als Analogon des Kreises der 9 Punkte. 351
Retsin. Démonstrations nouvelles de deux théorèmes de géométrie. 351
V. von Oyen. Zwei geometrische Sätze. 351
Chr. Lindmann. Problema geometricum. 352
W. Stammer. Ueber Fermat's geometrischen Satz. 352
G. Dostor. Propriétés du triangle rectangle. 352
C. A. Bretschneider. Bemerkungen zu den Aufgaben des Herrn Ligowski. 353
A. Grunert. Allgemeine analytische Theorie der Function $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Punkte. 353
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 3. 353
†J. F. Wolff. Note on Euclid Book VI. Prop. 7. 353
Thiele. Lösning af Opgave 228. 353
H. Nawrath. Ueber die Construction eines einfachen Polygons, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygon zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist. 353
G. Affolter. Beiträge zur Geometrie der Vielecke. 354
P. Huther. Elementare Bestimmung des Punktes in der Ebene eines Polygons, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Ecken des Polygons ein Minimum wird. 354
Chr. Schmidt. Das reguläre Siebeneck geometrisch construirt. . 355
J. J. Sylvester. Note on a new continued fraction applicable to the quadrature of the circle. 355
†J. Smith. The ratio between diameter and circumference in a circle. 355
Oppermann. En Tilnarmelsesformel. 355
C. W. Merrifield. On a geometrical proposition indicating that the property of the radical axis was probably discovered by the Arabs. 356
†M. Collins. On the common tangents of circles. 356
J. Ch. Dupain. Note sur les tangentes communes à deux cercles. 356
S. Morel. Problèmes de géométrie. 356
G. Dostor. Calcul des rayons des deux cercles qui touchent trois cercles tangentes deux à deux. 357
†J. Eilles. Das Appollonische Tactionsproblem. 357
Zons. Ueber harmonische Punkte und Strahlen, Pol und Polare, Aehnlichkeitspunkt, Potenzlinie und Potenzkreis. 357
V. Eugenio e F. Fuortes. Dimostrazione di un teorema di Eulero. 357
C. A. Bretschneider. Der Lehrsatz des Matthew Stewart. . . . 358
Binder. Das Malfatti'sche Problem 358
Zorer. Malfatti'sches Problem. 360
†Faber. Einige Sätze und Aufgaben von Orthogonal-Kreisen. . . 361
V. Mollame. Dimostrazione dei due teoremi. 361
V. N. Bitonti. Dimostrazione dei tre quistioni. 361
†D. Orlando. Dimostrazione dei teoremi proposti da V. N. Bitonti. 361
Lionnet. Démonstration d'un théorème de Fermat. 361
Grant. Démonstration d'un théorème de géométrie 361
G. V. Schiaparelli. Relazione „sopra una regola proposta per la trisezione dell' angolo del sign. G. Baratto". 362
Jouanne. Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal. . 362
E. Saymié. Division d'un angle en parties égales et multiplication du cube. 362
C. A. Bretschneider. Die harmonischen Polarcurven. 363
Rosendahl. Quadratur und Rectification der Curven. 363

Seite
J. Schlotke. Stereoscopische Figuren. 363
Marx. Die Elemente der Geometrie des Raumes. 363
Anonymus. Euclid XI. 364
Le Besgue. Sur les quetions 894 et 961. 364
F. Unferdinger. Theorie des Tetraeders aus den 6 Kanten. . . 364
E. G. Björling. Om de reguliera polyedrarne. 365
A. Lorey. Die fünf regelmässigen Körper. 365
Chr. Hansen. Elementar Bestemmelse af Torens Areal og Volumen. 365
Seidelin. Bevis for en Satning af Stereometrien. 365
P. Freuchen. Volumen af et Polyeder begraenset af Trekanter . 366
F. Lionnet. Note sur un problème élémentaire de géométrie sphérique. 366
Steinheil. Ueber constructive Auflösung der sphärischen Dreiecke. 366
F. Henrich. Lehrbuch der Trigonometrie und Polygoniometrie. . 367
A. Ziegler. Ebene und sphärische Trigonometrie. 367
J Joffroy. Démonstration de la formule $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$. 367
† A. Dilling. Algebraisch-trigonometrische Untersuchungen über die regulären Vielecke. 368
† F. Klamminger. Die Auflösung der sphärischen Dreiecke. . . 368
C. F. J Sondhauss Ueber die Ableitung der Nepper'schen Analogien und der Gauss'schen Gleichungen. 368
G. Dostor. Propriétés du triangle sphérique rectangle. 368
F. Unferdinger. Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck. . . 368

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

A Flohr. Der Unterricht in der beschreibenden Geometrie. . . . 369
† Brennecke. Einführung in das Studium der darstellenden Geometrie 369
† Butz. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. 369
† H. Behse Die darstellende Geometrie. 369
† J P. Schmidt Cours de géométrie déscriptive. 369
† C. F. G. Steiner. Geometrische Constructionslehre und Linear-Perspective. 369
† Kommerell Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie. 369
† G. Bellavitis. Applicazione della geometria descrittiva 369
† Schlesinger. Darstellung der räumlichen Collinearprojectionen in orthogonalen Abbildungen. 369
† K. Rudel. Die ersten Elemente der darstellenden Geometrie. . . 369
† F. Hoschek. Die centrale Projectionsmethode und ihre Anwendung in der Perspective. 370
† E. Baumgardt. Axonometrie 370
† D. Pantanelli. Disegna assomometrica. 370
† D. Regis Sopra un applicazione dei principii di omologia alla prospettiva 370

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

C. F. Geiser. Einleitung in die synthetische Geometrie. 370
J. Frischauf. Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner. 370
Grouard. Étude géométrique sur les figures planes semblables. . 371
J. Rosanes. Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage. 372

Seite

H. Schröter. Ueber perspectivisch liegende Dreiecke. 372
D. Tessari. Sopra la divisione degli angoli in un numero dispari qualunque di parti uguale. 373
K. Clifford. On the general theory of anharmonics. 373
Chr. Wiener. Die mehrdeutigen Beziehungen zweier ebenen Gebilde auf einander. 375
H. G. Zeuthen. Nouvelle démonstration de théorémes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. 375
E. Weyr. Geometrische Mittheilungen. 377
E. Weyr. Ueber einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei- und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades. 378
E. Weyr Ueber Curvenbüschel. 379
A. Olivier. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven. 380
A. Olivier. Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven. . 380
A. Olivier. Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projectivische Curvenbüschel erzeugt wird. 382
E. Weyr. Ueber Involutionen höherer Grade. 383
E. Weyr. Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. 384
A. Cayley. Note on a relation between two circles. 384
†H. Besant. Conic sections. 385
W. P. Turnbull. Review. 385
A. Hirst. On the degenerate forms of conics. 385
St. Smith. On some geometrical constructions. 386
R. Niemtschick. Ueber die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittlinien. 387
R. Niemtschick. Ueber die Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittlinien. 388
R. Staudigl. Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird. . . . 389
†F. Grelle. Ueber ein geometrisches Kennzeichen der Art der durch 5 gegebene Tangenten, durch 5 gegebene Punkte u. s. w. bestimmten Kegelschnitte. 390
J. Wolstenholme. On certain properties of confocal conics and theorems derived therefrom. 390
Anonymus. The nine-point's conic af any tetrastigm. 391
E. Folie. Note sur quelques théorèmes de géométrie supérieure. . 391
O. Tognoli. Teoremi di Chasles sopra la proprietà dei sistemi di coniche. 392
†C. Montag. Ueber ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. 392
A. de Morgan. On the conic octagram. 392
J. P. Taylor. Geometrical proof of Mr. Faure's and some kindred theorems. 392
A. Knitterscheid. Ein neues Supplement zum Problem des Apollonius. 393
K. Clifford. Synthetic proof of Miquel's theorem. 394
Eduard Weyr. Ueber ähnliche Kegelschnitte. 394
St. Smith. On the focal properties of homographic figures. . . . 394
Eduard Weyr. Ueber einen Satz von Steiner. 401
E. Weyr. Ueber Punktsysteme auf Curven dritter Ordnung. . . . 401
E. Weyr. Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte. 401
E. Weyr. Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. 402

Seite
Eduard Weyr. Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Klasse. . 403
H. Durège. Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen. 404
F. D. Thomson. Notes on the geometry of a cubic curve. . . . 405
H. J. E. Smith. Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. 405
H. Kortum. Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. 405
A. Olivier. Ueber die Erzeugung solcher geometrischer Curven, welche durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven, bestimmt sind. 413
C. F. E. Geiser. Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades. 417
C. F. E. Geiser. Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades. 417
M. W. Crofton. On various properties of bicircular quartics. . . 418
Whitworth. La spirale équiangle. 420
Emil Weyr. Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven. 420
Emil Weyr. Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven. 422
E. Bertini. Nuovo dimostrazione di un teorema. 422

B. Räumliche Gebilde.

G. Wenzel. Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. 422
† W. Fuhrmann. Ueber Abhängigkeit geometrischer Gebilde. . . 422
G. H. Zeuthen. Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un 422
Th. Cotterill. On a correspondence of points, such that a curve of the nth order in one plane corresponds to a curve of the $4n$th in another plane etc. 424
L. Lindelöf. Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée renferment le plus grand volume. . 425
R. Sturm. Ueber Singularitäten der allgemeinen Fläche $n$ter Ordnung. 425
R. Sturm. Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4ième ordre et 2ième espèce en quatre points d'un cercle. 425
Th. Reye. Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung. 425
H. Schubert. Geometrische Bestimmung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernfläche. 426
E. Weyr. Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen beliebiger Flächen. 427
Halphén. Théorèmes sur les normales communes à des surfaces et à des courbes. 427
G. Darboux. Sur un mode de transformation des figures. 428
R. Sturm. Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. 428
H. Müller. Ueber eine geometrische Verwandtschaft fünften Grades. 430
Jörres. Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen. 431

Seite
R. Sturm. Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung. 432
H. Müller. Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetischer Behandlung. 433
H. Schubert. Eine geometrische Eigenschaft der 16 Kugeln, welche 4 beliebig gegebene Kugeln berühren. 433
H. Schubert. Metrische Relationen zwischen den Radien der 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren. 433
†R. Niemtschick. Einfache Construction windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschnitten. 434
Haag. Théorèmes de géométrie. 434
H. Müller. Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung. . . 434
M. Gardiner. On the inscription, by a symplification of Sir Hamilton's process of reduction, of closed n-gons in any quadric. . 435
J. Lüroth. Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raum. 436
R. Townsend. Solution by the method of ordinary homographic division, of the problem: To inscribe in a given ruled quadric a polygon of any given order. 436
C. F. Geiser. Ueber die Flächen zweiten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben 438
H. Durrande. Sur les surfaces du quatrième ordre. 438
Th. Reye. Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung. 438
R. Sturm. Ueber die römische Fläche von Steiner. 439

C. Geometrie der Anzahl.

H. Schubert. Zur Theorie der Charakteristiken. 441
H. G. Zeuthen. Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. 444
Halphén. Sur le nombre des droites qui satisfont à quatre conditions données. 446
A. Cayley. On the problem of the inscribed = and = circumscribed triangle. 446
R. Sturm. Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches. 447

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

R. Heger. Die Grundformeln der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. 449
R. Heger. Neue homogene Plancoordinaten. 450
G. Zeuthen. Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. 450
G. Zeuthen. Om et nyt Rumkoordinatsystem. 451
E. d'Ovidio. Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee. 452
Neuberg. Étude sur les coordonnées tétraédriques. 452
†J. Töplitz. Die constanten Relationen bei den Dreiecks- und tetraedischen Coordinaten. 452
F. Klein. Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. 452
A. Hall. Transformations in Hansen's method of perturbation. . . 452

Seite
C. Taylor.[4] On some equivalent equations. 453
† Fiedler. Ueber die projectivischen Coordinaten. 453
M. Jeffery. On conicoids referred to four-points tangential coordinates. 454
W. Esson. Axial coordinates. 454
J. Hoüel. Sur la méthode d'analyse géométrique de Mr. Bellavitis. 454
G. Darboux. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. 455
M. Lévy. Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales. . 455
Aoust. Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. 456
Aoust. Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées. 458
Aoust. Note sur les équations fondamentales du problème de la déformation des surfaces. 458
Aoust et Gilbert. Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. 458
D. Codazzi. Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. 460
† F. Lippich. Die Ebene und Gerade als Elemente des baryceutrischen analytischen Calculs. 460
E. Françoise. Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de géométrie analytique. 460
G. Bardelli. Sulle trasformazione delle coordinate nello spazio. . 460
A. Cayley. On the six coordinates of a line. 460

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

† A. Steen. Begyndelsegrunde i den analytiske Geometri. 461
O. Schlömilch. Ueber rectificable Curven. 461
J. Somoff. Note sur la rectification approximative des courbes quelconques. 461
A. Steen, M. Leffler. Ogtan en Methode til Integration af en Differentialequationer. 462
† A. Ribaucour. Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan. 462
G. Dostor. Relations nouvelles entre les tangentes, normales, soustangentes et sous-normales des courbes en général, avec applications aux lignes du second degré. 462
L. Painvin. Courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface. 463
L. Lindelöf. Sur la courbure moyenne d'une courbe plane fermée. 463
H. Jeffery. On dual curvature, and the duals of evolutes and involutes. 463
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 4. 463
de la Gournerie. Sur les singularités élevées des courbes planes. 464
H. Jeffery. On cusps and points of inflexion, on cuspidal points and lines of inflexion. 464
W. H. Besant. Mathematical notes. 465
† Levi. Sulle evolventi allungate e associate delle linee piane. . . 465
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 2. 465
R. W. G. On geometrical methods in maxima and minima. 466
W. K. Clifford. On a generalization of the theory of polars. . . 466
W. H. A. Russell. On the mechanical description of curves. . . 467

Seite

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Weyr. Ueber algebraische Curven. 467
E. Weyr. Ueber höhere Involutionen. 467
E. Weyr. Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involution. 468
P. Güssfeldt. Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen. 469
O. Henrici. On series of curves. 470
C. F. Haase. Zur Theorie der ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- oder Rückkehrpunkten. 471
M. Reiss. Analytisch-geometrische Studien. 471
H. Lemonnier. Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion. 472
A. Transon. Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes. 472
J. Casorati e L. Cremona. Considerazioni intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere. 473
J. Brioschi. Nota sulla equazione che dà i punti di flesso di curve ellittiche. 473
A. Clebsch. Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p=2$ ist. 474
G. Jung ed Armenante. Sulle trasformazione birazionale univoze e sulle curve normale e subnormale del genere p. 474
A. Brill. Ueber zwei Eliminationsprobleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen. 474
L. Cremona. Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. . . . 475
E. Beltrami. Ricercha sulla geometria delle forme binarie cubiche. 477

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

A. Grunert. Allgemeine Discussion der Gleichung der Linien des zweiten Grades. 479
A. Grunert. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises in Dreilinien-Coordinaten. 479
A. Grunert. Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades zwischen Dreilinien-Coordinaten. 479
J. Zampieri. Altes und Neues. 481
W. P. Turnbull. Review. 481
E. d'Ovidio. Nuova esposizione della teoria generale delle curve di 2° ordine in coordinate trilineari. 481
P. Cassani. Studio intorno alla conica dei 9 punti e delle 9 rette. 482
P. Cassani. Nota sulla conica dei 9 punti e delle 9 rette. 482
M. Jesser. Kurzgefasste Lehre von den Kegelschnittslinien. . . . 482
Rhein. Von den Kegelschnitten. 483
C. Taylor. The principles of geometrical conics. 483
St. Germain. Détermination des foyers dans les coniques. . . . 483
G Dostor. Relations nouvelles entre les tangentes, normales, soustangentes et sous-normales des courbes en général, avec applications aux lignes du second degré. 484
L. Painvin. Note sur la construction géométrique des normales à une conique. 484
R. W. G. On the chords of conic curvature. 485

Seite

Grunert. Ueber die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise. 485
G. Dostor. Ellipse et hyperbole. 486
G. Dostor. Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole. 486
M. Kuhn. Ueber die Entwickelung der Kegelschnittslinien aus zwei gegebenen Kreisen. 486
F. D. Thomson. The equation to the axes of a conic. 487
H. G. Day. Note on conic sections. 488
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 7. 488
A. Bertrand. Rectification directe de l'ellipse. 488
A. Caylay. Solution of a senate-house problem. 488
H. G. Day. Notes on geometrical conics. 489
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 1. 490
P. Cassani. Soluzione della quistione 178 dei Nouvelles Annales. 490
Dilettante. Sopra due quistioni del Salmon. 490
E. Leclert. Propriétés de la parabole. 490
Morel. Problèmes de géométrie analytique. 491
G. Dostor. Propriété des bissectrices d'un angle du triangle. . . 491
G. Dostor. Propriétés nouvelles des diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole. 491
G. Dostor. Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle. 492
R. B. Worthington. On the parabola. 493
C. T. Two short proofs. 493
E. Hochheim. Ueber geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks. 493
K. Mette. Ueber die Kegelschnitte. 494
G. Dostor. Généralisation d'un théorème d'Euler sur le cercle et son extension à l'ellipse. 494
F. de Lanneau. Instrument destiné à tracer une ellipse d'un mouvement continu. 494
V. N. Bitonti. Dimostrazione delle quistioni 2, 3 e 4. 495
Bröckerhoff. Das Appollonische Tactionsproblem. 495
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 5. 495
R. Staudigl. Ellipsenconstructionen. 496
L. Paillotte. Moyen simple de mener la normale à l'ellipse. . . 496
J. Wolstenholme. On a certain system of trigonometrical equations, with applications to the porisms of two coaxal conics. . 496
G. Rossi. Sulla locale de' centri delle coniche, che toccano due rette e passano per due punti. 497
G. Mirabello. Sopra una quistione proposta nel giornale del Terquem. 498
V. Mollame. Dimostrazioni di due teoremi. 498
V. N. Bitonti. Soluzione di una quistione. 499
E. d'Ovidio. Sopra due teoremi del Sig. Mannheim. 499
A. Milinowski. Kegelschnitte in doppelter Berührung. 499
J. Griffiths. On a property of the eight circles which can be drawn through the six points of intersection of three given circles. 500
W. S. Burnside. On the invariants and covariants of a system of three conics. 500
A. Cayley. Note on a relation between two circles. 501
P. Cassani. Nota sul triangolo conjugato di due coniche. 501
J. J. Walker. On the anharmonic-ratio sextic of a pair of conics. 501
M. Neuberg. Triangles et coniques combinés. 501
Carnoy. Note sur le triangle circonscrit à une conique. 502
A. Zimmermann. Untersuchung der einer Ellipse ein- und umschriebenen Dreiecke und Parallelogramme bezüglich ihrer Fläche. . 503

Seite

H. Kühl. Untersuchung über das einer Ellipse eingeschriebene grösste n-Eck. 503
H. Kühl. Das kleinste n-Eck um eine Ellipse zu beschreiben. . . 503
H. Mylord. Lösning af Opgave 204. 504
T. N. Thiele. Lösning af Opgave 23. 504
H. Mylord. Lösning af Opgave 70. 504
Ch. Lindmann. Anteckningar angående rätliniga figurer, inskrifna uti och omskrifna omkring en ellipse. 504
R. W. G. On geometrical methods in maxima and minima. 504
A. Cayley. On the porism of the in-and-circumscribed polygon, and the (2, 2) correspondence of points on a conic. 505
J. Wolstenholme. Note to the article on porisme. 505
F. Folie. Extrait d'une lettre à Mr. Catalan. 505
Rosanes und Pasch. Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. . . . 505
J. J. Walker. Anharmonic properties of conics inscribed in a quadrilateral. 505
E. Weyr. Ueber Kegelschnitte, welche einem Dreieck ein- oder umgeschrieben sind und einen festen Kegelschnitt doppelt berühren 506

D. Andere specielle Curven.

F. W. Newman. On curves of the third degree or tertians. . . . 507
H. Durège. Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte. 507
A. Clebsch. Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. 509
E. Weyr. Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. 509
†Hössrich. Discussion der Cardioide. 510
J. J. Walker. On tangents to the cissoid. 510
Kuhse. Abhandlung über die Lemniscate. 510
S. Roberts. On the mechanical description of some species of circular curves of the third and fourth degrees. 511
J. Lüroth. Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung. 511
J. Casey. On bicircular quartics. 512
W. Crofton. On various properties of bicircular quartics. 513
O. Schlömilch. Ueber einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. 513
A. Hochheim. Tangentialcurven der Kegelschnitte. 514
†S. Löwenherz. De curvis tangentialibus. 515
W. H. Besant. Note on the envelope of the pedal line of a triangle. 515
J. Griffiths. Note on finding the degree of a certain locus connected with a triangle inscribed in a circle. 515
F. H. Rump. Construction und Berechnung von Ovalen. 516
H Mylord. Lösning af Opgave 223. 516
J. Petersen. Om et Punkts Potens med Hinsyn til en Curve. . 516
W. S. Burnside. On the invariants and covariants α, α of a binary quartic considered geometrically as a system of two ternary quadrics 516
Ph. Gilbert. Sur les courbes planes à équations trinomes. . . . 516
W. Walton. Note on rhizic curves. 517
Allégret. Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes. . . . 517

Seite
F. Unferdinger. Ueber den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarcoordinaten und über diejenigen Curven, deren Gleichung: $r^k = a^k \sin k\theta$ 517
H. Montucci. Deux mémoires sur la recherche des racines des équations à trois termes de tous les degrés à l'aide de la cubicycloide. 519
F. Streinz. Ueber Cycloiden. 519
Fouret. Sur la double génération des épicycloides planes. 520
F. E. Eckardt. Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide. 520
L. Painvin. Note sur l'hypocycloide à trois rebroussements. . . 521
Laguerre. Extrait d'une lettre à Mr. Bourget. 522
O. Callaudreau. Théorèmes sur l'hypocycloide à trois rebroussements. 523
† Wollseiffen. Ueber die Hypocycloide. 523
F. Marten. Die Rolllinien und die Brennlinien durch Zurückwerfung. 523
Aoust. Sur les roulettes en général. 523
E. Catalan. Note sur les roulettes et les podaires. 523
† H. Funcke. Zur Theorie des Rollens. 524
† J. Sylvester. On the successive involutes to a circle. 524
† A. Cayley. On evolutes and parallel curves. 524
J. Paczkowski. Geometrische Eigenschaften des Bildes unter Wasser gelegener Curven. 524
Bösser. Die Theorie der kaustischen Linien und Flächen. 524
H. M. Jeffery. On the evolutes of cubic curves. 524
O. Schlömilch. Ueber eine Spirale. 525
de la Gournerie. Sur la spirique à centre. 525
† E. Marx. Beitrag zur Kenntniss der Kettenlinie. 525
W. Walton. On axes of lug and axes of kick. 525
A. Gleue. Analytisch geometrische Untersuchungen. 525
P. Serret. Sur un théorème de Ferrers. 526
† F. Rummer. Untersuchungen einer neuen krummen Linie. . . . 526

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

O. Hesse. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. . 526
E. Beltrami. Théorie fondamentale des espaces de courbure constante. 527
Laguerre. Emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace. 527
E. Weyr. Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. 528
E. Weyr. Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zweideutiger Gebilde. 529
A. Ribaucour. Sur les surfaces orthogonales. 533
E. Catalan. Sur les surfaces orthogonales. 533
A. Enneper. Ueber eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen. 534
A. Ribaucour. Sur la théorie des surfaces. 534
J. Welsch. Démonstration élémentaire d'un théorème de Monge. . 535
L. Painvin. Courbure en un point multiple d'une surface. . . . 536
L. Painvin. Courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface. 537
Laguerre. Propriétés des courbes tracées sur une surface quelconque. 537

Seite
E. Roger. Note sur les courbures des surfaces. 538
E. Roger. Note sur quelques propriétés des surfaces courbes. . . 538
H. M. Jeffery. On centres of curves or surfaces and their polar and pole curves or surfaces. 539
P. Frost. On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an umbilicus. 539
A. Cayley. Note on Mr. Frost's paper. 540
A. Transon. Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces. 541
W. Spottiswoode Théorème concernant la théorie des surfaces. . 541
U. Dini. Ricerche sopra la teorica delle superficie 541
W. Firth. On the measure of curvature of a surface referred to polar coordinates. 542
L. Painvin. Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. 543
†E. Eckardt. Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen. 543
†Ph. Gilbert. Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. 543
†Aoust. Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. 543
†G. Battaglini. Intorno ai sistemi di rette di 2° grado. 544
A. Mannheim. Droite polaire, axe de courbure. 544
E. Beltrami. Zur Theorie des Krümmungsmaasses. 544
E. Beltrami. Sulla teoria generale delle superficie. 547
E. Weyr. Krümmungsverhältnisse eines Curvenbüschels in einem Scheitel. 548
†F. W. Newman. On conic osculation. 548
G. Darboux. Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques. 548
G. Darboux. Sur la représentation sphérique des surfaces. . . . 550
E. Beltrami. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sign. Christoffel nella teoria delle superficie. 551
L. Painvin. Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable. 551
Ch. Buchonnet. Expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice. 552
Tortolini. Sopra un nuovo sistema di variabili, introdotto dal Sign. Ossian Bonnet nello studio delle proprietà delle superficie curve. 552
U. Dini. Sopra le superficie che hanno un sistema di curvatura sferiche. 552
U. Dini. Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane. 552
A Enneper. Ueber die developpabelen Flächen, gebildet aus den berührenden Ebenen längs einer Curve auf einer Fläche. . . . 553
A. Enneper. Ueber die developpabele Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist. 554
Falk. Om developpabele ytors kurvartulinier. 554
A. Enneper. Ueber asymptotische Linien. 554
A. Enneper. Ueber die Loxodromen der Kegelflächen. 555
Boije. At finna volymen af ett revolutions solidum då genererande kurvan är hänfördt till polarkoordinater. 556
E. Weyr. Ueber Evoluten räumlicher Curven. 556
W. Spottiswoode. On the contact of conics with surfaces. . . . 556
A. Cayley. A memoir on the theory of reciprocal surfaces. . . . 556
E. Fischer. Ueber äquidistante Niveaucurven. 557

Seite

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

E. de Jonquières. Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques. 557
G. Darboux. Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. 558
E. Catalan. Remarques sur une note de Mr. Darboux relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. . . 558
G. Darboux. Réponse aux observations de Mr. Catalan. 558
G. Halphén. Mémoire sur les courbes gauches algébriques. . . . 559
Laguerre. Sur les courbes, que l'on peut tracer sur les surfaces algébriques. 561
O. Tognoli. Sopra una estensione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque alle superficie algebriche di qualunque grado. 562
Laguerre. Quelques propriétés des cônes algébriques. 562
W. K. Clifford. On the theory of distances. 563

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

J. Versluys. Application nouvelle des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. 564
A. Grunert. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte. 564
F. Unferdinger Relation zwischen den Halbmessern der Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide. 564
Niewenglowski. Étude sur la sphère. 564
J. Neuberg. Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre. 565
F. W. Newman. On the curvature of surfaces of the second degree. 566
W. Walton. On a property of surfaces of the second degree. . . 566
Housel. Axes des surfaces du 2me degré, obtenues par une sphère concentrique. 566
P. C. V. Hansen. Nogle Sätninger om Fladerne of ander Orden. 566
F. Unferdinger. Kubatur der Segmente und Schichtenräume in Flächen zweiter Ordnung. 567
G. Bauer. Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung. . 567
L. Saltel. Note sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface de second ordre. 568
Laguerre. Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre. 569
L. Painvin. Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. 569
H. M. Jeffery. On conicoids referred to quadriplanar coordinates. 570
C. Hierholzer. Ueber Kegelschnitte im Raume. 570
A. Enneper. Ueber ein Problem der sphärischen Geometrie. . . 571
L. Geisenheimer. Ueber sphärische Kegelschnitte. 571
G. Darboux. Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces. 571
M. Roberts. Sur les lignes de courbure d'un ellipsoide. 572
G. Zurrio. Sulla superficie dell' ellissoide a tre assi inuguali. . . 572
A. Cayley. On the geodesics on an oblate spheroid. 573
F. Joachimsthal. Sur les nombres des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoide. 573
G. Darboux. Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipsoide. 573
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 10 and 11. 573

Seite

F. Grelle. Ueber das an Volumen grösste einem dreiaxigen Ellipsoid einbeschriebene Tetraeder. 574
P. de Campoux. Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales. 575
H. Lemonnier. Solution d'une question géométrique. 575
E. Hill. On the asymptotes to a hyperbolic section of an oblique cone. 575
A. Cayley. A memoir on cubic surfaces. 576
A. Sartiaux. Note sur les surfaces du troisième ordre. 576
E. Weyr. Ueber den perspectivischen Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe und jener dritter Classe vierter Ordnung. . . . 577
†J. Sylvester. On Prof. Wiener's stereoscopic representation of the cubic eikosi-heptagram of Dr. Salmon. 577
Ch. Wiener. Stereoscopische Photographie des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. 578
L. Cremona. Sulle 27 rette di una superficie del 3° ordine. . . . 578
A. Cayley. On the double-sixers of a cubic surface. 578
C. Jordan. Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. 579
C. Jordan. Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre. 579
C. Jordan. Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré. 579
G. Weihrich. Einige Sätze über die Raumcurve dritter Ordnung und die abwickelbare Fläche dritter Klasse. 579
R. Townsend. On the nodal cones of quadrinodal cubics and the zomal conics of tetrazomal quartics. 579
M. Gardiner. Properties of quadrics having common intersections. 580
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 5. 580

D. Andere specielle Raumgebilde.

H. Durrande. Note sur les surfaces du quatrième ordre. 580
A. Cayley. On the quartic surfaces. 582
L. Cremona. Sulle superficie gobbe di quarto grado. 583
A. Cayley. On the geometrical interpretation of the covariants of a binary cubic. 584
H. Lemonnier. Étude géométrique sur la cyclide. 584
A. Enneper. Die cyklischen Flächen. 585
de la Gournerie. Mémoire sur les lignes spiriques. 586
Laguerre. Sur quelques propriétés des lignes spiriques. 588
Laguerre. Sur un problème de géométrie relatif aux courbes du quatrième ordre. 588
de la Gournerie. Note sur les quadricuspidales. 590
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 6. 590
E. Lampe. Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes. 591
Frosch. Die singulären Punkte und Tangentialebenen der Wellenoberfläche. 591
E. Catalan. Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes. 592
E. Catalan. Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées. 592
†Ph. Gilbert. Sur quelques propriétés des surfaces apsidales. . . 593
A. Enneper. Zur Charakteristik der Helicoidflächen. 593
†W. K. Clifford. On the umbilics of anallagmatic surfaces. . . . 594

Seite
R. Staudigl. Untersuchung einiger Gewölbformen, durch welche ein Raum mit trapezoidförmigem Grundriss überwölbt werden kann. 594
L. Burmester. Ueber Isophoten 596
†A. R. Clarke. On the course of geodesic lines on the Earth's surface. 596
E. Fischer. Ueber äquidistante Niveaucurven. 596
L. Lindelöf. Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume. 596
L. Lindelöf. Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minima. 596
R. Baltzer. Ueber den Ausdruck des Tetraeders durch die Coordinaten der Eckpunkte. 597
A. Cayley. A third memoir on skew surfaces otherwise scrolls. . . 598
A. Cayley. On certain surfaces otherwise scrolls. 598

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme).

D. Chelini. Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, d'aree e di punti. 599
J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes. 601
G. Janni. Esposizione della nuova geometria di Plücker. 601
A. Clebsch. Ueber die Plücker'schen Complexe. 602
v. Drach. Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe. 602
M. Pasch. Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden. 604
F. Klein. Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. 605
F. Aschieri. Sopra un complesso di 2° grado. 606
F. Aschieri. Sopra un complesso del 2° grado. Generazione geometrica dei complessi del 1° grado. 607
S. Lie. Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes. 607
F. Klein und S. Lie. Ueber die Haupttangenten der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. 609
Th. Reye. Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie. . . . 610
†B. Irmer. Ueber Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brenncurven. 611

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformation, Abbildung.

†A. Cayley. On a correspondance of points and lines in space. . 611
J. Richelot. Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebilden. 611
G. Wenzel. Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. 612
C. F. Geiser. Sopra un teorema fondamentale della geometria. . . 614
A. Enneper. Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen. 615
A. Enneper. Ueber ein Problem der analytischen Geometrie. . . 616
M. Nöther. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. 616
E. Habich. Note sur une méthode de transformation des surfaces. 617
A. Transon. De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes. 618
Moutard. Transformations géométriques des surfaces. 618
A. Ribaucour. Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre. 618

Seite

M. Nöther. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. 619
Housel. Homographie et perspective. 620
L. Painvin. Note sur la transformation homographique. 620
J. C. Maxwell. On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress. 621
P. Bretschneider. Punktverwandtschaft und Linienverwandtschaft ebener Figuren. 622
U. Dini. Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di un' altra. 622
M. Nöther. Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. 624
E. Christoffel. Sopra un problema proposta da Dirichlet. . . . 624
E. Christoffel. Ueber die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise. 624
E. Christoffel. Ueber die Abbildung einer n-blättrigen, einfach zusammenhängenden Fläche auf einem Kreise. 624
H. Schwarz. Ueber einige Abbildungsaufgaben. 626
H. Schwarz. Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf eine Kugel. 626
H. Schwarz. Notizia sulla rappresentazione di un ellisse sopra un circolo. 627
E. Jochmann. Zur Abbildung der Rechtecke auf der Kreisfläche. 628
H. Weber. Ueber ein Problem der Abbildung. 628
R. Hoppe. Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente. 628
A. Grunert. Ueber conforme Kartenprojectionen. 629
F. Eisenlohr. Ueber Flächenabbildung. 629
A. Ribaucour. Sur la déformation des surfaces. 630
†C. Exner. Ueber die Gestalt kleiner Flächenstücke. 631
Blažek. Ueber das dreiaxige Ellipsoid als Deformation der Kugel aufgefasst. 631
F. Klein und S. Lie. Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. 632
A. Clebsch. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. 633
A. Clebsch. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. 633
A. Clebsch. Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung. 635
A. Clebsch. Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen. 636
E. Armenante. Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano. 636
G. Korndörfer. Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten. 637
A. Clebsch. Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen. 637
A. Clebsch. Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen. . 637
C. F. Geiser. Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. 639
F. Klein. Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse. 640

Seite

H. Müller. Ueber eine Construction der allgemeinen Curve vierter Ordnung, welche durch 14 ihrer Punkte bestimmt ist. 640
E. Weyr. Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. 641

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

G. Krebs. Lehrbuch der Physik und Mechanik. 645
R Wolf. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 645
W. Schell. Theorie der Bewegung und Kräfte. 645
J. Henrici. Elementar-Mechanik des Punktes und des starren Systems. 646
†L. Brothier. Elementi di meccanica. 646
†A. Privat-Deschanel. Elementary treatise on natural philosophy. 646
A. Transon. Cinématique ou phoronomie. 647
A. Genocchi. Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. 647
A. Genocchi. Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide. 647
P. de Mondésir. Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la mécanique. 647
M. de Tilly. Études de mécanique abstraite. 648
J. Ch. Walberer. Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. . . 651

Capitel 2. Cinematik.

†A H. Béchaux. Mechanical geometry. 651
G. Battaglini. Memoria sulle dinami in involuzione. 651
G. Battaglini. Nota sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido. 652
G. Battaglini. Nota sul movimento geometrico finito di un sistema rigido. 652
C. Neumann. Geometrische Untersuchung über die Bewegung eines starren Körpers. 653
C. Neumann. Untersuchungen über die Bewegung eines Systems starrer Körper. 653
A. Mannheim. Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. 654
A. Mannheim. Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique. 656
A. Mannheim. Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies. 658
A. Mannheim. Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite, que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions. . . 658
A. Mannheim. Construction de l'axe de courbure de la surface développable, enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions. 658
Ch. Brisse. Mémoire sur le déplacement des figures. 659
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 12. 659
H. Mylord, Lösning af Opgave 149. 659

Seite
H. Resal. Étude géométrique sur le mouvement d'une sphère glissant ou roulant sur un plan horizontal. 660
Marx. Beitrag zur Kenntniss der Kettenlinie. 660
L. Saalschütz. Zur Theorie der Evolventenverzahnung. 660
†Preusse. Eine Gerade, auf welcher ein schwerer materieller Punkt gleiten kann. 660

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

K. v. Ott. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. 661
G. Battaglini. Nota sulla composizione delle forze. 661
W. H. Preece. The parallelogram of forces. 661
K. Culmann. Ueber das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kräfte. 662
C. Neumann. Ueber den Satz von der virtuellen Verrückung. . . 662
J. Petersen. De virtuelle Hastigheders Princip. 662
W. Firth. A demonstration of the principle of virtual velocity. . . 663
J. Somof. Note relative à une démonstration donnée par Cauchy des équations générales de l'équilibre. 663
E. J. Routh. Equilibrium of one heavy rough body on another. . 664
F. Piani. Sul centro di gravità. 664
J. N. Haton de la Goupillière. Recherches sur les centres de gravité. 665
A. Grunert. Ueber den Schwerpunkt des Trapeziums, insbesondere über die graphische Bestimmung desselben. 668
H. Emsmann. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks. 669
C. A. Bretschneider. Bemerkungen über einen im Archiv besprochenen Lehrsatz. 669
Fassbender. Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives. 669
R. Most. Ueber den Schwerpunkt der Umgrenzung bei den einfachsten Figuren und Körpern. 670
P. A. Hansen. Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen sphärischen Dreiecks. 670
Th. Reye. Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen. 671
G. Battaglini. Nota sulla serie di sistemi di forze. 674
G. Battaglini Nota sulla teoria dei momenti. 674
R. Townsend. On the moment of inertia of a ring with respect to its axis of revolution. 675
E. J. Routh. Moment of inertia of a quadrilateral. 675
†J. M. Hepps. On a general investigation of the bending moments and deflections of continuous beams. 676
F. Jenkin. On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains of frameworks. 676
J. C. Maxwell. On reciprocal figures, frams and diagrams of forces. 677
J. Carvallo. Étude sur la stabilité des tours balises. 677
J. M. Heppel. On the theory of continuous beams. 677
W. J. Rankine. Remarks on Mr Heppels theory of continuous beams. 677
M. Lévy. Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. 678

Seite

de Saint-Venant. Rapport sur le mémoire de Mr. Lévy. 678
de Saint-Venant. Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque. . . . 678
J. Boussinesq. Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion. 678
de Saint-Venant. Recherche d'une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur. . . . 678

B. Hydrostatik.

J. Moutier. Sur les principes fondamentaux de l'hydrostatique. . 681
†A. Galbroith and Haughton. Manual of hydrostatics. 681
G. Kirchhoff. Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. 681
W. Eberhardt. Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Drucks einer um zwei oder mehrere vertikale Axen rotirenden Flüssigkeit. 683
J. Todhunter. On Jacobi's theorem respecting the relative equilibrium of a revolving ellipsoid of fluid. 684
Kostka. Ueber die Auffindung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen, um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse, wenn deren Dichtigkeit und Umlaufszeit bekannt sind. 684
G. L. Matthiessen. De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem 686
W. Walton. On the solid of least resistance. 686
A. Handl. Theorie der Waagebarometer. 686
R. Radau. Bemerkungen über das Waagebarometer. 687
W. Walton. On a theorem on the resistance of fluids. 687
A. M. Bustelli. Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante. . . 687
J. Petersen. Svömmende Legemer. 687

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

E. Schering. Die Schwerkraft im Gaussischen Raum. 688
A. Mousson. Der jetzige Standpunkt unserer Kenntniss über die Schwere. 689
R. B. Hayward. A proof of Lagrange's equations of motion referred to generalised coordinates. 689
Grünwald. Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differentialgleichungen mit variabeln Coefficienten. 690
A. Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. 691
H. Th. Noth. Ueber gewisse Fälle der Centralbewegung. 694
H. Müller. Die Kepler'schen Gesetze. 694

Seite

W. A. Whitworth. Law of force in elliptic orbit about any whatever. 694
C. Zeidler. Einige Probleme aus der Dynamik des Punktes. . . 695
B. Hülsen. Ueber die Bewegung eines von 2 festen Punkten angezogenen Punktes. 695
G. Holzmüller. Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetz von Weber. 695
C. F. F. Björling. Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationnelle et entière de la distance d'un centre fixe. 698
C. Lampe. Zur Bewegung des Systems zweier Punkte, deren einer sich auf vorgeschriebener Bahn bewegt. 698
R. Radau. Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. 699
R. Radau. Betrachtungen über die Flächensätze. 702
R. Radau. Weitere Bemerkungen über das Problem der drei Körper. 702
R. Radau. Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. 702
R. Radau. Sur une transformation des coordonnées de trois corps dans laquelle figurent les moments d'inertie. 702
R. Radau. Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik. 703
A. Weiler. Ueber das Problem der drei Körper. 703
A. Weiler. Notes sur le problème des trois corps. 703
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 13. 704
A. Enneper. Bemerkungen über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. 704
J. d'Arcais. Del moto sopra un ellissoide di un punto sollicitato da forze che hanno una certa funzione potenziale. 706
R. S. Ball. A problem in mechanics. 707
R. S. Ball. On the small oscillation of a rigid body about a fixed point unter the action of any force. 708
E. Padova. Applicazione del metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie. 709
H. Moseley. On the descent of a solid body on an inclined plane when subjected to alternation of temperature. 709
W. H. Besant. Mathematical notes. 709
W. Krumme. Aufgaben über die schiefe Ebene. 709
R. Hoppe. Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand. . . . 710
H. Gretschel. Elementare Ableitung der Formel für die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels. 711
W. Krumme. Das Parallelogramm der Bewegung in der Wellenlehre. 712
C. Neumann. Notiz über das cykloidische Pendel. 712
H. Resal. Note sur le pendule à oscillations elliptiques. 712
A. Tissot. Sur le pendule conique. 713
E. Combescure. Note sur le pendule conique. 713
F. Lucas. Étude sur la mécanique des atomes, nebst Rapport von de St.-Venant. 714
H. Bertram. Probleme der Mechanik in Bezug auf die Variationen der Schwere und die Rotation der Erde. 714
A. Dupré. Mémoire sur le choc. 717
P. Gautier. Essai sur le mouvement d'un projectile dans l'air. . 717
W. Walton. On a problem in the calculus of variation. 717

Seite

M. de Brettes. Détermination de l'épaisseur du blindage en fer que peut traverser un projectile dont on connait le poids, le calibre et la vitesse d'arrivée. 718
M. de Brettes. Relation entre les diamètres, les poids, les vitesses initiales des projectiles d'artillerie, et la tension de leurs trajectoires. 718
M. de Brettes. Influence de la vitesse initiale, du diamètre ou des poids d'un projectile d'artillerie sur les tensions de ses trajectoires d'égales portées. 718
M. de Brettes. Détermination d'une ou plusieurs de quantités suivants: le diamètre d'un projectile oblong, son poids, sa vitesse initiale, la flèche de sa trajectoire et le poids du canon, lorsque les autres sont données. 718
C. W. Merrifield. Resistance as the cube of the velocity. . . . 719
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 3. 719
A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 6. 720
Y. Villarceau. Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé et méthodes pour les équilibrer 721
H. Moseley. On the mechanical impossibility of the descent of glaciers by their weight only. 722
de Saint-Venant. Sur l'établissement des équations des mouvemements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. 722
M. Lévy. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. 723
H. Tresca. Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux. 723
de Saint-Venant. Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile contenu dans un vase à parois verticales, pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur. 724
R. Radau. Sur la rotation des corps solides. 724
N. M. Ferrers. Note on Prof. Sylvester's representation of the motion of a free rigid body. 724
P. G. Tait. On the rotation of a rigid body round a fixed point. . 725
J. Zuleger Grundzüge von Poinsot's Theorie der Drehung. . . . 725
A. Brill. Sul problema della rotazione dei corpi. 725
D. Chelini. Nuova dimostrazione delle proprietà fondamentali degli assi conjugati di rotazione e degli assi permanenti. 726
Lorenz. Om Centrifugalkraften 726
C. Tychsen. Cm Bevagelsen af den gyroskopiske Top. 727
H. Mylord. Om Centralellipsoider og principale Axer. 727
G. R. Dahlander. Om några tillämpningar i dynamiken af de geometriska rörelselagarne. 728
† W. Walton. On the stress exerced by a rigid body on a fixed point rigidly connected with the body, which is revolving spontaneously about the point. 728
† W. Walton. On the relation between the angular velocity of the instantaneous axes of a body. 728
E. Rolland. Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse. 728

Seite

B. Hydrodynamik.

J. Cockle. On the motion of fluids. 729
†J. Warren. Note on a fundamental theorem in hydrodynamics. . 729
†W. J. M. Rankine. On the mathematical theory of combined streams. 729
†H. Moseley. On the uniform motion of an imperfected fluid. . . 729
W. Veltmann. Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel. 730
G. Kirchhoff. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. 730
G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. 731
A. Clebsch. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. 733
E. Padova. Sul moto di un ellissoide fluido ed omogenee. 733
E. Padova Del moto di un ellissoide in un fluido incompressibile ed indefinito. 734
Bjerknes. Om den samtidige Bewaegelse af kugelformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum. 735
de Saint-Venant. Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique. 735
J. Boussinesq. Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques, und Rapport de Mr. de Saint-Venant. 737
J. Boussinesq. Note complémentaire au mémoire précédent. . . . 737
Beech. Sur la théorie des ondes liquides périodiques. 738
J. Boussinesq. Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi. 738
d'Estocquois. Note sur le mouvement des liquides. 741
de Saint-Venant. Rapport sur un mémoire de Mr. M. Lévy relatif à l'hydrodynamique. 741
de Saint-Venant. Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope etc. 743
P. Boileau. Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides. 743
P. Boileau. Mémoire sur la détermination du travail latent dans les systèmes à mouvements uniformes ou uniformément périodiques. 743
P. Boileau. Nouvelles études sur les eaux courants. 743
F. Grashof. Humphreys' und Abbot's Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen. 744
H. Resal. Sur la question du mouvement relatif de l'eau dans les aubes de la roue Poncelet. 744
J. Boussinesq. Théorie des expériences de Savart. 745
M. Lévy. Sur un système trés simple de vanne à débit constant sous pression variable. 746
Challis. A new discussion of the mathematical theory of oceanic currents. 746
T. K. Abbott. On some propositions in the theory of tides. . . . 747

Capitel 5. Potentialtheorie.

P. G. Tait. On Green's and other allied theorems. 748
A. K. Grünwald. Zur Theorie des Potentials. 748
J. Moutier. Sur la fonction potentielle et le potentiel. 749
E. Mathieu. Sur la généralisation du premier et du second potentiel. 749

Seite
E. Mathieu. Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$. 750
de Saint-Venant. Sur un potentiel de deuxième espèce, qui resout l'équation aux différences partielles du quatrième ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes. 752
W. v. Bezold. Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. 753
C. Neumann. Zur Theorie des Potentials 753
E. Padova. Sopra due teoremi del Sgr. Neumann. 754
F. Lucas. Nouvelles propriétés de la fonction potentielle. 754
J. Somoff. Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle trés-mince sur un point de sa surface. 754
F. Mertens. Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. 755
L. Kronecker. Zur Potentialtheorie. 755
A. Cayley. Note on the attraction of ellipsoids. 756
F. Grube. Zur Geschichte des Mac-Laurin'schen Satzes, betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide. 756
F. Grube. Ueber die Anziehung der von einer Fläche zweiten Grades und von zwei zu deren Axen senkrechten Ebenen begrenzten Körperstumpfe. 757
R. del Grosso. Memoria sull' attrazione degli sferoidi. 757
O. Schlömilch. Ueber die Anziehung eines Ellipsoides auf einen äusseren Punkt. 758
E. Padova. Sol moto di un ellissoide fluido ed omogeneo. 758

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

R. Wolf. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 759
de Saint-Venant. Rapport sur cinq mémoires de Mr. F. Lucas intitulés: Recherches concernant la mécanique des atomes. . . 759
F. Lucas. Étude sur la mécanique des atomes. 759
Leray. Théorie nouvelle de la gravitation. 761
L. de Boisbaudran. Note sur la théorie de la pésanteur. 762
W. C. Wittwer. Beiträge zur Molecularphysik. 762
A. Beer. Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. 762
de Saint-Venant. Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation dans les solides ductiles au delà des limites de leur élasticité. 763
de Saint-Venant. Sur un potentiel de deuxième espèce. 763
E. Mathieu. Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$. 763
E. Mathieu. Sur le mouvement vibratoire d'une plaque. 764
L. F. Ménabréa. Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique. 765
J. H. Röhrs. On the strains to which ordnance are subject and on the vibrations of solid bodies in general. 766
L. F. Ménabréa. Dilucidazioni sul principio di elasticità. 766
Phillips. De l'équilibre des solides élastiques semblables. 767

Seite
Kirsch. Theorie der Elasticität und Festigkeit dünner Platten. . 767
Kirsch. Ueber die Festigkeit rechteckiger Platten, welche am Rande lose aufliegen. 768
L. Boltzmann. Ueber die Festigkeit zweier mit Druck übereinander gesteckter cylindrischer Röhren. 768
M. Okatow. Notiz über das Gleichgewicht eines schweren Drahtes, dessen Axe eine Schraubenlinie ist. 769
R. S. Ball. On an elementary proof of a theorem of Lagrange. . . 769
W. C. Wittwer. Anwendung der Lehre vom Stosse elastischer Körper auf einige Wärmeerscheinungen. 770
H. Résal. De l'équilibre, de l'élasticité et de la résistance du ressort à boudin. 770
H. Schneebeli. Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. 770
M. Kuhn. Ableitung der Gleichungen für die Bewegung eines elastischen Theilchens. 770
J. Stahl. Ueber einige Punkte in der Theorie der Capillarerscheinungen. 771
L. Boltzmann. Ueber die Ableitung der Grundgleichungen der Capillarität aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. 772
P. du Bois-Reymond. Ueber den Antheil der Capillarität an den Erscheinungen der Ausbreitung der Flüssigkeiten. 773
A. Mousson. Bemerkungen über die Theorie der Capillarerscheinungen. 774
Koniecki. Elementare Darstellung der Capillaritätslehre. 774
J. Moutier. Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide. 774
J. Boussinesq. Théorie des expériences de Savart. 775

Capitel 2. Akustik und Optik.

R. Moon. On the theory of sound. 775
de Saint-Venant. Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde. 775
A. Terquem. Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus. 775
J. Bourget. Sur le mouvement vibratoire des membranes élastiques. 776
A. Kundt. Zur Theorie der Schwingungen in Luftplatten. 777
E. Warburg. Ueber tönende Systeme. 778
E. Warburg. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern. 779
R. Hoppe. Berechnung der Vibrationen einer Saite mit Berücksichtigung ihres Biegungswiderstandes. 779
V. v. Lang. Einleitung in die theoretische Physik. 779
†O. Airy. Geometrical optics. 780
Colnet d'Huart. Mémoire sur la théorie mathématique de la chaleur et de la lumière. 780
C. Neumann. Ueber die Aetherbewegung in Krystallen. 782
A. Brill. Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen. 785
E. Ketteler. Ueber den Einfluss der ponderabeln Molecüle auf die Dispersion des Lichts. 788
†Challis. The dispersion of light on the hypothesis of undulations. 789
M. Ricour. Sur la dispersion de la lumière. 789
P. Glan. Ueber die Absorption des Lichts. 790
W. Veltmann. Fresnel's Hypothese zur Erklärung der Aberrationserscheinungen. 790
W. Veltmann. Ueber die Fortpflanzung des Lichts in bewegten Medien. 790

Seite
E. Jochmann. Ueber eine von Quincke beobachtete Klasse von Beugungserscheinungen. 791
E. Lommel. Die Frauenhofer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung. 792
E. Lommel. Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. 793
A. Kurz. Berechnung der hyperbolischen dunkeln Büschel in zweiaxigen Krystallen. 793
E Reusch. Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. 794
Kramm. Ueber die Brechung des Lichts in einem System von Flächen zweiter Ordnung. 795
Kudelka. Die Gesetze der Lichtbrechung. 795
W. Graffweg. Ueber Linsen, welche von einem homogenes Licht ausstrahlenden Punkte ein mathematisch genaues Bild geben. 796
H. Zinken-Sommer. Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. 796
E. Hill. On a practical method of finding the magnifying power of a telescope. 797
O. Airy. To find the condition of minimum deviation of a ray of light passing through a prism composed of a medium denser than the original medium. 797
W. v. Bezold. Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. 797

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

C. Neumann. Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik. 797
W. Weber. Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung. 798
J. Stefan. Ueber die Grundformeln der Elektrodynamik. 798
Reynard. Nouvelle Théorie des actions électrodynamiques und Rapport von Bertrand. 799
H. Helmholtz. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper. 800
J. Moutier. Sur les attractions et répulsions des corps électriques. 805
P. Frost. Electro-dynamics. 806
L. Lorenz. Zur Moleculartheorie der Elektricitätslehre. 806
J. Seeger. Ueber die Gleichgewichtsvertheilung der statischen Elektricität auf drei und vier leitenden Kugeln. 806
J. Loschmidt. Ableitung des Potentials bewegter elektrischer Massen aus dem Potential für den Ruhezustand. 807
P. Volpicelli. Della distribuzione elettrica sui conduttori isolati. 807
Th. Kötteritzsch. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Conductoren. 808
G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. 810
J. Loschmidt. Die Elektricitätsvertheilung im galvanischen Strome. 810
L. Boltzmann. Ueber die elektro-dynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. 810
C. Neumann. Ueber die oscillirende Entladung einer Franklin'schen Tafel. 811
H. Lorberg. Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern. 812

Seite

Th. du Moncel. Note sur les accouplements des piles en séries. 813
Th. du Moncel. Note sur le maximum de force des électro-aimants. 813
E. Betti. Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in uno lastro rettangolare. 813
G. Kirchhoff. Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus. 813
E. Weyr. Ueber die Curve der grössten und kleinsten electromagnetischen Wirkung 814
E. du Bois-Reymond. Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. 816
Linder. Sur le magnétisme terrestre. 817
R. Most. Ueber die Beziehung der Pole zur magnetischen Vertheilungscurve. 818
J. C. Maxwell. On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress. 818
Faye. Sur le log à boussole à propos d'un naufrage. 818

Capitel 4. Wärme.

G. Hoffmann. Physikalische Studien. 818
W. C. Wittwer. Entwurf einer Theorie der Gase. 819
Chaucourtois. De l'interprétation des imaginaires en Physique mathématique. 819
Colnet d'Huart. Mémoire sur la théorie mathématique de la chaleur et de la lumière. 820
F. Mohr. Allgemeine Theorie der Bewegung und Kraft als Grundlage der Physik und Chemie. 820
R. Most. Ein einfacher Beweis des zweiten Wärmegesetzes. . . . 820
L. Boltzmann und R. Most. Bemerkung, Entgegnung und Erwiderung zu dieser Arbeit. 820
A. Kurz. Notiz zu dem Aufsatz: Eine Bestimmung der specifischen Wärme der Luft von F. Kohlrausch. 821
L. Boltzmann. Ueber die von Gasmassen geleistete Arbeit. . . . 821
A. Kurz. Ueber die von bewegten Gasmassen geleistete Arbeit. . 821
J. Loschmidt. Der zweite Satz der mechanischen Wärmetheorie. 822
Zech. Einige Notizen über Wärme 822
K. Puschl. Ueber Wärmemenge und Temperatur der Körper. . . 823
M. Zanotti. Lezioni sulla termodinamia. 823
R. Clausius. Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. 823
J. Moutier. Sur la détente des gaz. 824
G. R. Dahlander. De l'effet mécanique exercé par la vapeur d'eau saturée pendant la détente. 824
G. R. Dahlander. Några undersökningar, beträffande den mekaniska värmetheorien. 825
F. Massieu. Sur les fonctions caractéristiques des divers fluides. 826
Reech. Équations fondamentales dans la théorie mécanique de la chaleur. 826
J. Bertrand. Rapport sur le mémoire de Mr. Massieu. 826
T. Hopkinson. On a proposition in thermo-dynamics. 827
F. Lippich. Ueber die Breite der Spectrallinien. 827
E. Mulder. Geschwindigkeit der Molecularbewegung und des Schalls in Gasen. 827
F. Zöllner. Ueber die Natur und physische Beschaffenheit der Sonne. 828
C. Neumann. Ueber die mechanische Energie der Schwefelsäure. 828

Seite
K. v. d. Mühl. Ueber den stationären Temperaturzustand. 828
J. Boussinesq. Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, dans les milieux homogènes, chauffés en un de leurs points. 829
J. Boussinesq. Construction générale des courants de chaleur en un point quelconque d'un milieu athermane, homogène ou hétérogène. 829
E. Mathieu. Sur le mouvement de la température dans les corps enfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques. 830
E. Stahlberger. Ueber die Berechnung der mittleren Tagestemperatur aus der höchsten und tiefsten Temperatur. 831
H. Résal. Calcul des épaisseurs des fonds plats et bombés des chaudières cylindriques. 831
W. J. M. Rankine. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. 832
W. J. M. Rankine. On the thermal energy of molecular vortices. 832

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

R. Wolf. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 833
C. M. Bauernfeind. Elemente der Vermessungskunde. 833
H Doergens. Theorie und Praxis der geographischen Kartennetze. 834
A. Grunert. Theorie des Polarplanimeters. 834
†Lüdde. Die Sonne im Dienste der Kartographie. 834
†H. Elsching. Kurz gefasste Anleitung zum barometrischen Nivelliren. 834
†F. Bournier. Formule de nivellement trigonométrique. 834
Ch. Wiener. Die Berechnung der Veränderungen in einem veränderlichen Dreiecksnetze 834
E. Helmert. Beiträge zur Theorie der Ausgleichung. 834
A. Schell. Ueber die Genauigkeit der Winkelgleichung des Stampfer'schen Nivellirinstrumentes. 836
C. Bremiker. Studien über höhere Geodäsie. 836
A. Sonderhof. Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel. 838
R. Heger. Bemerkung zu der Bestimmung der Abplattungsgrenze für das Erdsphäroid aus der Nutation. 838
W. Jordan. Bemerkung zu der zweiten Gauss'schen Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. 839
J. Weingarten. Ueber eine geodätische Aufgabe. 840
P. A. Hansen. Reflexionen über die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks von kleinen Seiten auf die Winkel des ebenen oder sphärischen Dreiecks von denselben Seiten. . . . 841
J. Weingarten. Ueber die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen oder sphärischen. . . . 841
W. Jordan. Ueber die Bestimmung der Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten. 841
E. Beltrami. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie. 842
G. Darboux. Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques. 842
Anonymus. Note on geodesics. 842

Seite
U. Dini. Sopra alcune formola di trigonometria sferoidica. 842
B. v. Prondzynsky. Ueber die Anzahl der Winkel- und Sinus-Gleichungen bei Ausgleichung trigonometrischer Dreiecksnetze. 843
G. Zachariae. Den danske Gradmasling 1ste Bind. 843

Capitel 2. Astronomie.

†C. White. Elements of theoretical astronomy. 844
†Herrmann. Kritik Newton'scher Astronomie. 844
†Cheyne. An elementary treatise on the planetary theory. 844
†N. Meyer. Gestalt der Himmelskörper. 844
J. Lüroth. Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. 844
A. Cayley. Note on Lambert's theorem of elliptic motion. . . . 844
A. Cayley. On the problem of the determination of a planet's orbit from three observations. 845
C. Puschl. Ueber eine kosmische Anziehung, welche die Sonne durch ihre Strahlen ausübt. 846
Th. v. Oppolzer. Ueber die Bestimmung einer Kometenbahn. . . 846
F. Tietjen. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, wenn dieselben geocentrisch nahe in einem grössten Kreise liegen. 847
Michal. Application de la géométrie analytique à la détermination des orbites des planètes. 848
S. Newcomb. Aperçu d'une méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels. 848
J. Bourget. Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice. 849
E. Kayser. Untersuchung des Mondes hinsichtlich seiner ellipsoidischen Gestalt. 849
W. Ligowski. Ueber die Reduction der Monddistanzen mit Anwendung vierstelliger Logarithmen ohne Benutzung von Hülfstafeln. 850
Ch. Simon. Mémoire sur la rotation de la lune 850
V. Puiseux. Sur l'accélération séculaire du mouvement de la lune nebst Rapport von Delaunay. 851
H. Gyldén. Ueber eine Methode, die Störungen eines Kometen vermittelst rasch convergirender Ausdrücke darzustellen. . . . 852
E. Weiss. Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. 853
W. Klinkerfues. Einige Bemerkungen betreffend die Berechnung von Kometenbahnen. 854
†E. Kaiser. Die Gleichungen einer Kometenbahn. 854
F. Minding. Ueber eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 854
A. Cayley. Sur la construction graphique de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de soleil. . . 854
A. Cayley. On the geometrical theory of solar eclipses. 855
Anonymus. Eclipses. 855
†W. L. Dickinson. On three occultations of Saturn by the moon. 855
†W. L. Dickinson. On the eclipses of the sun December 21-22. 1870. 855
W. G. Penny. On the rotatory motion of heavenly bodies. . . . 856
C. Flammarion. Loi du mouvement de rotation des planètes. . . 856
G. Quesneville. Remarque relative à la note de Mr. Flammarion. 856
C. Flammarion. Réponse à la remarque de Mr. Quesneville. . . 856
†Buzzetti. La rotazione della terra. 856

Seite

Bach. Du passage de Vénus sur le disque du soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du soleil. 856
L. Mathiessen. Ueber die scheinbare und absolute Grösse der Sonne. 857
†L. J. Gruey. Recherches sur la flexion de la lunette méridienne. 857
W. Veltmann. Fresnel's Hypothese zur Erklärung der Aberrationserscheinungen. 857
W. H. Besant. Mathematical notes. 857
H Kinkelin. Die Berechnung des christlichen Osterfestes. . . . 857

Anhang.

A. Farnochio. Corso elementare completo di matematiche pure. . 858
A. S. Guldberg. Matematikens Betydning og Anvendelse. . . . 858
F. Henrich. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 858
A. Schlimbach. Die politische Arithmetik und ihre Herleitung. 859
A. d'Abbadie. Sur la division décimale de l'angle et du temps. . 859
R. Wolf. Observations relatives à la division décimale des angles et du temps. 859
Y. Villarceau. Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps. 859
J. Hoüel. Sur la choix de l'unité angulaire. 859
J. Thoulet. Sur les formules et les calculs qui ont servi à construire la grande carte gnomonique de l'Europe. 861
Bammert. Aufgaben aus der mathematischen Geographie. 861
G. Emsmann. Sechszehn mathematisch-physikalische Aufgaben. . 861
Schenk. 60 geometrische Aufgaben. 862
Tafeln von Bruhns, Schlömilch, Nell, Luvini, Wittstein, Stampfer, Gauss, Schoder, Domke, Lürtz, der Sternwarte zu Berlin, Butterbeck, Glaisher, Schaller, Regis. 862
M. R. Pressler. Das mathematische Aschenbrödel. 864

Verzeichniss
der Herren, welche für den zweiten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

Herr	Dr. August in Berlin.	A.
-	Prof. Battaglini in Neapel.	Bi.
-	Dr. Bruns in Pulkowa.	B.
-	J. Casey Esq. in Kingstown-Dublin.	Csy.
-	Prof. Cayley in Cambridge.	Cly.
-	Prof. Clebsch in Göttingen.	Cl.
-	Dr. Curtze in Thorn.	Ce.
-	Prof. Glaisher in Cambridge.	Glr.
-	Dr. Hamburger in Berlin.	Hr.
-	P. C. V. Hansen in Kopenhagen.	Hn.
-	Prof. Henrici in London.	He.
-	Prof. Hoppe in Berlin.	H.
-	Dr. Hutt in Brandenburg a. H.	Ht.
-	Dr. G. Jung in Mailand.	Jg.
-	Prof. Dr. Klein in Erlangen.	Kln.
-	Prof. Korkine in Petersburg.	Ke.
-	Dr. Kretschmer in Frankfurt a. O.	K.
-	Dr. Maynz in Ludwigslust.	Mz.
-	Dr. Felix Müller in Berlin.	M.
-	Natani in Berlin.	Ni.
-	Dr. Netto in Berlin.	No.
-	Prof. C. Neumann in Leipzig.	Nn.
-	Dr. Ohrtmann in Berlin.	O.
-	Dr. Oberbeck in Berlin.	Ok.
-	Dr. Scholz in Berlin.	Schz.
-	Dr. Schubert in Hildesheim.	Scht.
-	Dr. Schumann in Berlin.	Schn.
-	Prof. Dr. Stolz in Innsbruck.	St.
-	Dr. Teichert in Freienwalde a. O.	T.
-	Dr. Wangerin in Berlin.	Wn.
-	Dr. Wittstein in Leipzig.	Wtn.
-	Dr. Worpitzky in Berlin.	Wy.
-	Prof. Zolotareff in Petersburg.	Z.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Carl Ohrtmann, Berlin, Markgrafenstr. 78.

Druckfehler-Verzeichniss.

S. 20, Z. 8 v. u. lies: „Untersuchung über einige Artikel, die“ statt: „Untersuchung, von der einige Artikel“.

S. 279, Z. 11 v. u. lies: $\frac{ax^2+bx+c}{ax'^2+b'x+c'}$ statt: $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x'^2+c'}$.

S. 353. Z. 7 v. o. lies: „Dreiecke und Vierecke“ statt: „Dreiecke und Punkte“.

S. 679, Z. 17 v. o. lies: „Elasticitätstheorie“ statt: „Electricitätstheorie“.

Vorrede.

Das spätere Erscheinen des zweiten Bandes unseres Jahrbuches ist durch eine längere Arbeitseinstellung in der Officin der Verlagshandlung verursacht worden. Wir haben die französische Literatur in dieses Heft nicht aufnehmen können, weil uns wegen der durch den Krieg verursachten Verkehrsstockungen beim Beginn des Druckes das erforderliche Material fehlte. Die betreffenden Referate werden den Anfang des zweiten Heftes bilden; für das zweite und dritte Heft wird eine solche Trennung nicht erforderlich sein.

Die Anordnung der geometrischen Arbeiten ist geändert worden, da die im ersten Bande durchgeführte Eintheilung sich nicht durchgängig bewährt hat.

Für die zahlreichen Zusendungen der Arbeiten von Seiten der Herren Verfasser sprechen wir an dieser Stelle unseren Dank aus, da uns eine besondere Beantwortung wegen der grossen Zahl nicht möglich war.

Erster Abschnitt.
Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.
Geschichte.

C. A. Bretschneider. Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie. Pr. Gotha. 1869.

C. A. Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig. Teubner. 1870.

Die erst citirte Arbeit enthält nur Vorstudien zu der zweiten ausführlicheren. Im ersten Abschnitt wird an der Hand griechischer Autoren nachgewiesen, dass der Ursprung der Geometrie auf die Aegypter zurückzuführen sei. Die Geometrie der Aegypter wird als „Reisskunst" charakterisirt, die, auf einer geringen Anzahl von bewiesenen Lehrsätzen begründet, vorzugsweise Regeln zur Construction von Aufgaben enthalten habe, die die Praxis gestellt. Der mathematische Umfang wird näher auseinandergesetzt. Der zweite Abschnitt behandelt den Uebergang der ägyptischen Mathematik an die Griechen. Die ersten Anfänge ägyptischer Kenntnisse wurden, nach des Verfs. Ausführung, durch die in Folge der Vertreibung der Hyksos um 1700 v. Chr. stattfindende Ansiedlung von Aegyptern in Griechenland eingeführt. Später thaten die Studien des Thales und namentlich des Pythagoras in Aegypten selbst das Uebrige. Der erste, welcher die eigentliche Geometrie in Griechenland einbürgerte, ist Thales. Sein Aufenthalt in Aegypten und die Untersuchung, was von den ihm zugeschriebenen Entdeckungen ihm eigenthümlich, was von den Aegyptern überkommen, bildet den dritten Abschnitt. Dem schliessen sich Notizen über die mathematischen und astronomischen

Leistungen der jonischen Schule und des isolirt dastehenden Geometers Oinopides an. Als eigentlicher Gründer der wissenschaftlichen Geometrie ist indessen erst Pythagoras im Verein mit seinen unmittelbaren Schülern anzusehen (Abschnitt IV.). Durch Zersprengung des Pythagoräischen Bundes wurden die von demselben gewonnenen Kenntnisse in's Publikum gebracht. Von den Schülern des Pythagoras bis zu Platon werden im V. Abschnitte behandelt Hippokrates aus Chios, Antiphon, ein Athenischer Sophist, und Bryson, die sich vorzugsweise mit der Quadratur des Kreises beschäftigten. Der VI. Abschnitt behandelt die Geometer von Platon bis Euklides. Platon's eigene Leistungen auf diesem Gebiete sind nur gering, doch lenkte er die Bemühungen seiner Schule besonders auf die Theorie des Irrationalen hin. Namentlich besprochen werden die Leistungen von Leodamas von Thasos, Theaitetos von Athen und Archytas von Tarent, die nicht unmittelbar zu Platon's Schule gehörten; von seinen eigentlichen Schülern Deinostratos, Menaichmos, Eudoxos von Knidos, Hermotimos von Kolophon. Im Anhange endlich werden die Leistungen einiger Geometer der alexandrinischen Schule behandelt, des Perseus, Nikomedes und Diokles. O.

Cantor. Recension über Bretschneider, Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie. Schlömilch Z. XIV. Litz. 29-30. 1869.

G. Friedlein. Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen. Deichert. 1869.

J. Houel. „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen etc.“ von G. Friedlein. Boncompagni Bull. III. 67-90. 1870.

Der erste Theil dieses Werkes war bereits 1868 unter dem Titel „Beiträge zur Geschichte der Mathematik“ erschienen (siehe Fortschr. d. M. I. 3-4). Der übrige Theil beschäftigt sich zunächst mit der Darstellung der Zahlen bei den Römern. Es werden die Recheninstrumente der Römer besprochen; zunächst der Abacus, der bei den Römern in zwei verschiedenen Arten vorkommt;

ferner waren Biegung und Stellung von Fingern im Gebrauch, endlich zusammenfassende Zeichen. Der dritte Abschnitt behandelt die Zeit vom 7. bis zum 13. Jahrhundert n. Chr. Auch hier treten jene drei Arten der Zahlendarstellung auf. Der Abacus spielt ebenfalls eine wichtige Rolle. Durch arabischen Einfluss kamen dann im 12. Jahrhundert die Ziffern gobâr auf, d. h. die Darstellung der Zahlen durch neun Zeichen und einen circulus, die Null.

Der zweite Theil beschäftigt sich mit dem elementaren Rechnen. Bei den Griechen kommen vor die vier Spezies und das Quadratwurzelausziehen, bei welchem versuchsweise verfahren wurde. Ebenso werden dann die Römer und das Abendland vom 7. bis 13. Jahrhundert behandelt. Auf den reichen Inhalt hier auch nur andeutungsweise näher einzugehen, verbietet der beschränkte Raum. O.

F. Junghans. Ueber Methode und Genauigkeit astronomischer Beobachtungen bei den Alten. Pr. Stettin. 1870.

Der Verf. giebt eine Uebersicht der Methode der alexandrinischen Schule bei ihren astronomischen Beobachtungen, verbunden mit Notizen über die aus derselben resultirenden Fehler. Zum Schluss finden sich Bemerkungen über die Zeitmessinstrumente dieser Schule. O.

C. Göbel. De coelestibus apud Platonem motibus. Pr. Wernigerode 1869.

Die Arbeit ist ihrem Inhalte nach zu philologisch, um mehr als den Titel, der Vollständigkeit halber, anzuführen. O.

C. v. Littrow. Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. Wien. Gerold. 1870.

Recension von Schlömilch dazu siehe Schlömilch Z. XV. Litz. 75-76. Grunert Arch. LI. 112-114. 1870.

G. Hofmann. Die Sonnenfinsterniss des Thales vom 28. Mai 585 v. Chr. Pr. Triest. 1870.

Max Dunker hat in seiner Geschichte des Alterthums sich

dahin entschieden, dass die Sonnenfinsterniss am 30. Sept. 610 v. Chr. die des Thales gewesen sei. Der Verfasser weist nun nach, dass keine in die Zeit von 612 bis 593 fallende Sonnenfinsterniss in Kleinasien total gewesen sei, die von 585 aber, obwohl total, sich nicht auf den Lydisch-medischen Krieg beziehen kann, weil damals Kyaxares schon acht Jahre gestorben war. Wahrscheinlich hat aber Thales überhaupt nur eine Sonnenfinsterniss vorausgesagt, und diese ist von dem lange nach ihm schreibenden Herodot auf die Sonnenfinsterniss des Krieges übertragen worden. Die seine Ansicht, dass die Sonnenfinsterniss des Thales die vom Jahre 585 ist, unterstützende Notiz des Diogenes Laertius, dass nämlich Thales seit dem Archontat des Damasias (585-583 v. Chr.) „der Weise" genannt worden sei, wohl in Folge seiner Vorherverkündigung, scheint dem Verf. entgangen zu sein.

Ce.

M. Steinschneider. Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen in's Arabische und ihres Einflusses auf die arabische Literatur. Z. d. Deutsch. Morgenl. Ges. XXIV. 325-392. 1869.

Der Verf. knüpft an die Vorrede des Abraham Ibn Esra, welche dieser seiner Uebersetzung des arabischen astronomischen Werkes Kalila we-Dimnar vorgesetzt hat, an und giebt dieselbe zum ersten Male im hebräischen Urtext und in deutscher Uebersetzung. Durch die Angaben dieser Vorrede in Verbindung mit einer Fülle von sonstigen literarischen Notizen giebt der Verf. eine Berichtigung der Angaben fast aller Schriftsteller über die berühmtesten arabischen Mathematiker. Ein Resumé seiner Resultate zu geben, dürfte in kurzen Worten unmöglich sein; die Uebersicht wird durch den vollständigen Index wesentlich erleichtert.

Ce.

B. Boncompagni. Intorna all' opera d'Albiruni sull' India. Boncompagni Bull. II. 153-206. 1869.

Die Arbeit behandelt eine Beschreibung Indiens, die dem arabischen Mathematiker Abu'l-Bihân-Mohamed-ben-Ahmed Albiruni aus dem 11. Jahrhundert zugeschrieben wird.

O.

M. Steinschneider. Levi ben Gerson. Hebräische Bibliographie IX. 162-164.

Mittheilung über eine in dem Basler Codex F. II. 33 enthaltene Handschrift des Schriftchens des Levi ben Gerson oder lateinisch Leo Ebraeus: De numeris armonicis (Leo starb 20. April 1344). Das Schriftchen zeigt, dass es ausser den Zahlen 2 und 3; 3 und 4; 8 und 9 keine anderen unmittelbar folgenden Zahlen geben kann, die nur die Factoren 2 und 3 besitzen. Der Verf. untersucht dann noch, welches grössere mathematische Werk das sein könnte, welches Leo im Eingang des Schriftchens über harmonische Zahlen erwähnt. Er kommt zu dem Schlusse, dass dies eine Astronomie desselben war, die in lateinischer Uebersetzung noch in den Handschriften Codex Vaticanus 3098, Codex Vaticanus 3380 und Codex Ambrosianus D. 327 existirt.

Ce.

Gustav Flemming. Ein Beitrag zur Geschichte des Kalenders. Pr. Altenburg. 1869.

Abdruck und Erklärung eines Calendariums für die Jahre 1434—1457, sehr ähnlich dem Kalender des Johannes de Gamundia, der von 1442—1472 reicht. Das Original befindet sich in einer Handschrift der v. Lindenau'schen Bibliothek. Der Kalender ist noch dadurch ausgezeichnet, dass er die goldene Zahl VIII. dem 2. Januar zuweist, eine Verbesserung, welche auch Joh. v. Gmunden in seinem Kalender angebracht hat. Gewisse Anzeichen deuten darauf hin, dass das ursprüngliche Calendarium aus dem 14. Jahrhundert stammt. Auch über den weiteren Inhalt der Handschrift ausser den 16 abgedruckten Seiten giebt der Verf. Auskunft und dürfte derselbe danach für die Culturgeschichte von hohem Werthe sein. Beiläufig sei hier noch bemerkt, dass die Gymnasialbibliothek zu Thorn zwei Calendarien aus dem 14. Jahrhundert besitzt, das eine sogar mit der nicht zweifelhaften Jahreszahl 1328. Ce.

Tappe. Gerbert oder Papst Sylvester II. und seine Zeit. Pr. Berlin 1869.

Die Abhandlung giebt uns die politische Geschichte Gerbert's, ohne auf seine mathematischen Studien einzugehen. Ce.

GERHARD. Zur Geschichte der Algebra in Deutschland. Berl. Monatsber. 1870. 141.

Das erste Manuscript, das der Algebra erwähnt, befindet sich in der Bibliothek zu München. Es stammt aus der Benedictiner Abtei St. Emmeran und giebt einen Ueberblick der Kenntnisse in der Algebra um die Mitte des 15. Jahrhunderts. In Wien ist das Manuscript, auf das sich Heinrich Schreyber aus Erfurt und Christof Rudolff von Jauer stützten. Sein Titel ist: Regula cose oder Algebra. Es finden sich darin Regeln über die Rechnung mit positiven und negativen Grössen, sowie Nachrichten über die Entstehung der Wurzelzeichen. O.

M. CURTZE. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme. Berlin. Calvary. 1870.

Der Herr Verf. giebt hier eine exactere Zusammenstellung und Analyse der mathematisch-physikalischen Werke des Oresme, dessen Algorithmus proportionum bereits 1868 von ihm veröffentlicht wurde (Fortschr. d. M. I., 5 und 8). Nach einer kurzen Biographie des Nicole Oresme (geb. in der Normandie, in dem ersten Viertel des XIV. Jahrhunderts; Schützling Charles V., der ihn zum Bischof von Lisieux machte, wo er 1382 starb), bespricht H. Curtze die einzelnen mathematisch-physikalischen Schriften desselben. Es sind folgende:

I. Tractatus proportionum.

II. Tractatus de incommensurabilitate motuum celestium (Näheres über den Inhalt unbekannt).

III. Algorithmus proportionum (Rechnung mit Potenzen mit gebrochenem Exponenten).

IV. Tractatus de latitudinibus formarum (enthält die Grundidee der Descartes'schen analytischen Geometrie).

V. Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum (wahrscheinlich eine weitere Ausarbeitung des Vorigen).

VI. Traité de la sphère (ein Werk, durch welches sich Oresme die grössten Verdienste um die wissenschaftliche Sprache der Franzosen erworben).

VII. Utrum res futurae per astrologiam possint praesciri.

VIII. Rationes et causae plurium mirabilium in natura (Oresme

war ein entschiedener Feind der Astrologie und Zeichendeuterei).

IX. Plura quodlibeta et diverse questiones.

X. Solutiones predictorum probleumatum.

XI. Tractatus contra astronomos judiciarios.

XII. Liber de divinacionibus.

XII. Uebersetzung des Werkes: De Coelo et Mundo des Aristoteles.

Am Schlusse recapitulirt der Verf. kurz die Verdienste des Oresme um die Wissenschaft. M.

M. Curtze. Domenico Maria Novara da Ferrara, der Lehrer des Copernicus in Bologna. Vortrag. Thorn. Altpr. Monatsschr. VI. 735-743. 1869.

Eine kurze Biographie des Novara, aus mehreren italienischen Monographien geschöpft. F. Hipler hatte bereits in seiner Monographie: „Nikolaus Kopernikus und Martin Luther. Braunsberg 1868" einige Notizen über den Lehrer des Copernicus gegeben, die hier ergänzt und zum Theil berichtigt werden. Novara ist 1454 geboren, wurde 1483 Professor in Bologna und starb am 15. August 1504. Er war vorzugsweise beobachtender Astronom. Er stellte zuerst fest, dass sich der Pol seit Ptolemäus um einen Grad dem Zenith genähert haben müsse, und bestimmte die Schiefe der Ekliptik zu 23° 29'. M.

M. Curtze. Berichtigungen zu dem Aufsatze: Domenico Maria Novara da Ferrara. Altpr. Monatsschr. VII. 253-256. 1870.

Dieselben betreffen nur Details, in welche wir hier nicht eingehen können. M.

— — Domenico Maria Novara da Ferrara, Maestro del Copernico in Bologna. Lettura. Rivista Europea (A. de Gubernatis). Firenze. II., 3° fasc. 1-3. 1870.

Eine Anzeige des obigen Vortrages. M.

M. Curtze. Ueber einige bis jetzt unbekannte gedruckte Schriften des Domenico Maria Novara da Ferrara. Altpr. Monatsschr. VII. 515-521. 1870.

M. Curtze. Weitere Notizen über bis jetzt unbekannte gedruckte Schriften des Domenico Maria Novara da Ferrara. Altpr. Monatsschr. VII. 726-727. 1870.

Diese, im Besitz des Fürsten Boncompagni zu Rom befindlichen, hier näher beschriebenen Schriften enthalten unter Anderem Stellen, in denen jenes wichtigen Prognosticons erwähnt wird, in welchem Novara zuerst behauptete, die Weltachse habe ihre Lage seit Ptolemäus verändert und sich dem Zenith genähert.

M.

Leopold Prowe. Das Andenken des Copernicus bei der dankbaren Nachwelt. Thorn. Lambeck. 1870.

Eine Zusammenstellung und Beschreibung der zunächst in der Provinz Preussen, dann aber auch ausserhalb derselben befindlichen Monumente und Bilder auf den grossen Thorner Astronomen. Ce.

Leopold Prowe. Ueber den Sterbeort und die Grabstätte des Copernicus. Thorn. Lambeck. 1870.

Seit Hartknoch in seinem „Alt und Neues Preussen" dem Zweifel Ausdruck gegeben, ob Copernicus wirklich in Frauenburg begraben sei, ist vielfach darüber gestritten, ob er, wie zwei Frauenburger Manuscripte sagen, in Thorn gestorben und begraben. Der Verf. zeigt nun an der Hand der überlieferten Nachrichten und authentischen Aktenstücke, dass Copernicus in Frauenburg gestorben ist, dass aber die Stelle in der dortigen Domkirche, an welcher Anfang dieses Jahrhunderts Czacki die Gebeine desselben aufgefunden haben wollte, nicht die Grabstätte sein kann, wie sich auch durch theilweise Entzifferung der Inschrift bewahrheitet hat, wonach dort das Grab des Bischofs Henricus Flemming ist, der 1300 starb. Czacki fand eben das, was er finden wollte. Ce.

J. Fiedler. Peurbach und Regiomantanus. Eine biographische Skizze. Pr. Leobschütz 1870.

Die biographische Skizze der beiden bedeutendsten deutschen

Astronomen vor Copernicus bringt nur wenig Neues und ist nicht frei von Fehlern. Die erste Ausgabe von der Theoriae Planetarum des Peurbach ist nicht in 4° sondern in Fol. gedruckt, sie ist nicht 1460, sondern 1472 erschienen. Der Verf. sagt später selbst, dass Regiomontan seine Druckerei, aus der sie hervorging, erst 1471 einrichtete. Auf dem letzten Blatte wird freilich eine Beobachtung aus 1460 erwähnt, dies ist aber bekanntlich das letzte Lebensjahr Peurbach's (er starb 8. Apr. 1461) und schon deshalb unmöglich das Jahr des Druckes, da ja das Buch erst nach seinem Tode erschien. Von den übrigen angeführten Ausgaben ist nur die letzte zu Ingolstadt gedruckt, nicht alle. Die von 1499 ist z. B. in Venedig erschienen. Auch die Fabel von griechischem Gifte, an dem Regiomontan gestorben, hätte nicht wieder aufgefrischt werden sollen, sondern vielmehr widerlegt. Regiomontan starb an der Pest. Wäre Gift die Ursache seines Todes, so hätte wohl kaum Papst Sixtus IV., der ihn nach Rom beschieden hatte und sein eifriger Gönner war, unterlassen, eine Untersuchung einzuleiten, selbst wenn auch nur der Verdacht einer Vergiftung vorgelegen. Von alle dem ist aber Nichts berichtet.

Gelegentlich die Bemerkung, dass die Schreibweise Coperni*k*us, der wir hier stets begegnen, falsch ist. Die Familie schrieb sich Koppernigk, er selbst hat aber sich nie, weder in seinen lateinischen, noch seinen deutschen Schriften anders als latinisirt Copernicus geschrieben; und so sollte man doch seinen Namen beibehalten. Ce.

Breusing. Gerhard Kremer genannt Mercator, der deutsche Geograph. Vortrag zu Duisburg am 30. März 1869. Duisburg. Nieten. 1869.

J. A. Grunert. Gérard Mercator oder Gerhard Mercator? Der berühmte Geograph und Mathematiker ein Flamänder oder ein Deutscher? Grunert Archiv L. Lit. Ber. CC. 1-12. 1869.

Breusing will in seiner kleinen Schrift beweisen, dass der bis jetzt stets als Flamänder angesehene berühmte Geograph

Mercator ein Deutscher sei. Seine Angaben sind unverbürgt bis auf die eigenen Worte Mercator's: „Obwohl ich in Flandern geboren bin, so sind doch die Herzoge von Jülich meine angestammten Herren, denn unter ihrem Schutze bin ich in Jülicher Lande und von Jülichschen Eltern erzeugt und erzogen" aus der Widmung seiner Tabulae Galliae et Germaniae an die Herzöge von Jülich. Ob man dieselben mit Grunert als einen reinen Ausdruck der Courtoisie halten muss, dürfte doch fraglich sein, da er seine Eltern nicht Jülichsch nennen würde, wenn sie es nicht wirklich waren, und die Nationalität der Eltern, nicht der zufällige Geburtsort die Nationalität bestimmt. Als gute Vergleichung giebt Grunert noch in seiner Abhandlung den Abschnitt über Mercator aus der Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges par A. Quetelet, von der soeben eine zweite Auflage erschienen ist. Ce.

L. F. Ofterdinger. Ueber den Keppler'schen Kessel in Ulm. Vortrag, gehalten in Ulm den 7. Januar 1870. Ulm. Wagner'sche Druckerei.

Nachdem Keppler 1611 sich wieder verheirathet hatte, kam er durch seine vielfachen Haushaltungssorgen auf die Abfassung des berühmten Buches Nova stereometria doliorum etc. Linz 1615, das er dann popularisirt in dem: „Ausszug auss der Vralten Messe-Kunst Archimedis etc. Linz 1616" von Neuem herausgab; dies war der Grund, dass sich der Magistrat in Ulm an ihn wendete, als er die Maasse und Gewichte der Republik wieder in Ordnung bringen wollte. Der Kessel Keppler's, der nach seiner Angabe gefertigt ist, befindet sich noch jetzt in der Sammlung des Kunst- und Alterthumsvereines für Ulm und Oberschwaben. Die kleine Schrift Ofterdinger's giebt ausser einer Abbildung des Kessels genaue Angaben über seine Maasse nach heutigem Gebrauche und eine Vergleichung der dadurch wiederhergestellten alten Ulmer Gemässe mit den jetzt gebräuchlichen. Ce.

F. Jacoli. Notizia sconosciuta relativa a Bonaventura Cavalieri. Boncompagni Bull. II. 299-312. 1869. O.

E. Wohlwill. Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei. Berlin. Oppenheim. 1870.

G. Friedlein. Recension über: „Wohlwill, Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei.“ Hoffmann Z. I. 333-340. 1870.

Herr Wohlwill kommt durch seine Untersuchungen zu dem Resultat, dass die Inquisition die Verurtheilung des Galilei auf Grund eines rechtlich werthlosen, entweder niemals geprüften oder als werthlos erkannten Dokumentes beschlossen hat. Die Aktenstücke aus dem Jahre 1616, auf deren Inhalt Herr Wohlwill seine Ansicht begründet, sind nach Ansicht des Herrn Friedlein jedoch nur Theile eines einzigen, das eine wesentlich andere Stellung einnimmt, als Herr W. meint, so dass die Anschauung des Herrn Wohlwill über die juristische Unhaltbarkeit der Verurtheilung Galilei's seitens des Inquisitionstribunals unbegründet wäre.

Mit demselben Gegenstande beschäftigt sich:

J. Gherardi. Il Processo Galileo riveduto sopra documenti di nuova fonte. Firenze 1870. O.

G. Govi. Intorno a tre lettere di Galileo Galilei tratte dall' Archivio dei Gonzaga. Boncompagni Bull. III. 267-281. 1870.

R. Wolf. Die Erfindung des Fernrohres und ihre Folgen für die Astronomie. Rede. Zürich. Schulthess. 1870.

Die Arbeit behandelt Abschnitt I. die Entdeckung der Brillen und Fernröhre; Abschnitt II. die Entdeckungen Galilei's im Gebiete der Astronomie mittelst derselben; Abschnitt III. die Verbesserung des Fernrohres und endlich Abschnitt IV. den Galilei'schen Process. O.

G. A. Vorsterman van Oijen. Quelques Arpenteurs hollandais de la fin du XVIe. et du commencement du XVIIe. siècle et leurs instruments. Boncompagni Bull. III. 323-376. 1870.

Die Arbeit giebt Auskunft über die folgenden Werke und

ihre Verfasser: 1) „Practigk des landmetens: Leerende alle ratte ende kromgydige Landen Bosschen Boomgaerden ende andere velden meten soo vel met behulp des Quadrants als sonder het selve. Mitsgaders alle Landen deelen in ghelijcke ende onghelijcke deelen ap verscheyden manieren, met eenighe nieuwe ghecalculeerde Tafeln, deer toe dienende. Gecomponeert door Johan Sems, ende Jan Pietersz Dou“ Amsterdam. 2) „Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, où sont insirées les mémoires mathématiques esquelles s'ést exercée le Très-haut et Très-illustre Prince Maurice de Nassau. Le tout revu, corrigé et augmenté par Albert Girard Samielois.“ Leide. 3) „Oeuvres mathématiques de Samuel Marolois Traictant de la Géométrie et Fortification, réduites en meilleur ordre, et corrigées d'un nombre infiny de fautes escoulées aux impressions précédentes: la Géométrie par Théodore Verbeeck et la Fortification par François van Schoten. Amsterdam.“ 4) Dasselbe Werk in demselben Jahre 1628 herausgegeben von Albert Girard. 5) „Practique, Om te Leeren Rekenen Cypheren ende Boeckhouwen met die Regel Coss, ende Geometrie seer Profytelycken voor Allen Coopluyden. Van Njeams ghecarrigeert ende vermeerdert Deur Nicolaum Petri Dauentriensem. Amsterdam 1567.“ 6) Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae, Door Adrianum Metium. Franeker 1633.“ Zahlreiche Auszüge aus diesen Werken, erläutert durch Figuren, suchen ein Bild der damaligen Feldmesskunst zu geben. O.

KIESSLING. Chr. Huygens „De circuli magnitudine inventa“ als ein Beitrag zur Lehre vom Kreise. Flensburg. Herzbruch. 1869.

Abdruck der Arbeit von Huygens nebst eigener kurzer Herleitung der von Huygens gefundenen Resultate.

Schlömilch's Recension siehe Schlömilch's Z. XIV. Litz. 45.

O.

ERNST. Descartes, sein Leben und Denken. Pr. Böhmisch Leipa 1869.

J. G. DREYDORFF. Pascal, sein Leben und seine Kämpfe. Leipzig. Duncker und Humblot. 1870.

Das Werk enthält vorzugsweise Nachrichten über den theologischen Entwickelungsgang Pascal's (Blaize Pascal, geb. den 10. Juni 1623 zu Clermont, gest. am 19. Aug. 1652 zu Paris) und seine Kämpfe gegen die Jesuiten. Der übrigen wissenschaftlichen Leistungen wird nur nebensächlich gedacht.

Cantor, Recension dazu siehe Schlömilch Z. XV. Litz. 16-28.

O.

J. Pisko. Newton oder Pascal. Pr. Wien. 1870.

Nach einer kurzen Charakteristik der Leistungen Newton's und Pascal's auf wissenschaftlichem Gebiete giebt die Arbeit ein sehr übersichtliches Resumé des bekannten Chasles'schen Streites.

O.

H. Hankel. Die Entdeckung der Gravitation — und Pascal. Ein literarischer Bericht. Schlömilch XIV. 165-173. 1869.

Eine gedrängte Darstellung des bekannten Chasles'schen Handschriftenstreites, welche jedoch nur bis Ende 1867 reicht, also den schliesslichen Ausgang jener Angelegenheit nicht mehr enthält,

B.

C. Struve. Versuch, die naturphilosophischen Ansichten Newton's in ihrer Beziehung zu denen seiner Vorgänger darzulegen. Pr. Sorau. 1869.

Die Arbeit giebt zunächst eine Darstellung der verschiedenen Methoden, welche Newton in den beiden ersten und im 3. Buche der „Philosophiae naturalis principia mathematica" eingeschlagen hat. Dem lässt der Verf. eine Analyse der allgemeinen naturphilosophischen Anschauungen Newton's folgen. Den Schluss der Abhandlung bildet ein Vergleich der Anschauungen Newton's mit denen Descartes', Locke's, und seiner Vorgänger Baco und Hobbe.

O.

J. Durdik. Leibniz und Newton. Halle. Pfeffer. 1869.

F. Giesel. Jacob Bernoulli. Pr. Leer. 1869.

Eine Lebensbeschreibung Jakob Bernoulli's mit besonderer Berücksichtigung des Streites mit seinem Bruder Johann.

Cantor, Recension dazu siehe Schlömilch Z. XV. Litz. 17-19.

O.

F. Burckhardt-Brenner. Leonhard Euler's Lehre vom Licht. Pr. Basel. 1869.

Verf. setzt in der vorliegenden kleinen Schrift die Ansichten Descartes', Newton's und Huygens' in populärer Weise auseinander. Den Hauptinhalt bildet eine Darstellung der Euler'schen Lehre über die Natur der Lichterscheinungen, wobei die irrigen Anschauungen desselben nicht übergangen werden. Euler's wesentliches Verdienst besteht in der Wiederaufstellung der Undulationstheorie zu einer Zeit, wo Alles der Newton'schen Lehre anhing. Betont wird auch, dass Newton selbst die Emanationshypothese nicht als unbedingt sicher aufgestellt, sondern auch der Wellentheorie eine gewisse Berechtigung eingeräumt habe. O.

P. Sigmund Fellöcker. Geschichte der Sternwarte der Benedictinerabtei Kremsmünster. Pr. Kremsmünster. 1864-69.

Den Anfang bildet eine einleitende Uebersicht über die Leistungen der Mitglieder des Stiftes vor Gründung der Sternwarte. Gebaut wurde letztere unter dem Abte Alexander Fixlmillner in den Jahren 1748-1758 unter besonderer Fürsorge von Anselm Desing durch Wolfgang Seethaler und seinen Sohn Leonhard. Der erste Astronom war Placidus Fixlmillner (1762-1791), der zweite P. Thaddäus Derfflinger (1791-1821), der dritte P. Bonifaz Schwarzenbrunner (1824-1830), der vierte P. Marian Koller (1830-1847). Die Leistungen derselben einzeln aufzuführen, würde den hier gestatteten Raum eines Referates weit überschreiten. Neben einer Lebensbeschreibung finden sich die wissenschaftlichen Arbeiten und Manuscripte, die Anschaffung an Instrumenten, die gemachten Beobachtungen, ja sogar die Correspondenz eines Jeden auf's Eingehendste besprochen. Zugleich wird über die sonstigen naturwissenschaftlichen Sammlungen des Stiftes berichtet. O.

H. Hankel. Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Akademische Antrittsrede. Tübingen. Fues. 1869.

Die Rede enthält in grossen Zügen ein Bild der Entwickelung der Mathematik. Von Euclid und Diophant ausgehend, überspringt sie das Mittelalter gänzlich und gewährt nur bei den eigentlich epochemachenden Namen einen genaueren Einblick in den erreichten Fortschritt. O.

E. F. Kummer. Festrede am 3. August 1869. Berlin. Vogt. 1869.

Nach einer Darstellung des traurigen Zustandes des mathematischen Studiums in Deutschland vor Gauss, werden die Wirkungen seiner Schriften besprochen. Das eigentliche Aufblühen des Studiums der Mathematik ist aber, in Folge der geringen Rücksicht, welche Gauss auf das Didaktische nahm, erst von dem Auftreten Jacobi's in Königsberg und Lejeune-Dirichlet's in Berlin zu rechnen. Zum Schluss wird auf die grosse Wichtigkeit aufmerksam gemacht, die der Gründung des Crelle'schen Journals im Jahre 1826, sowie der fortschreitenden Entwickelung der übrigen exacten Wissenschaften für das Gedeihen der Mathematik beizumessen ist. O.

F. W. Hültmann. Svenska aritmetikens historia. Dillner Tidskr. II. 57 u. 105. 1869.

Ein Bericht über die Lehrbücher der Elementar-Arithmetik, die von Schweden verfasst sind, so lange dort überhaupt jene Wissenschaft cultivirt ist.

Hültmann. Svenska aritmetikens historia. Dillner Tidskr. III. 7, 49, 241. 1870.

Fortsetzung der obigen Arbeit. Hn(Wn).

R. Wolf. Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques. Boncompagni Bull. II. 313-342. 1869.

I. Ueber die Erfindung der Libelle (siehe das Referat über Govi auf pag. 16).

II. Notiz über den Tod von G. W. Strauch; geb. 5. Mai 1811 zu Heppenheim, gest. als Prof. der Mathematik zu Muri im Aargau d. 23. Januar 1868. Sein Hauptwerk ist: „Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalculs. Zürich 1849."

III. Notizen über die Correspondenz der Familie Bernoulli.

IV. Supplemente zu den Notizen über Nicolas Fatis de Duiller in des Verfassers Biographien zur Culturgeschichte der Schweiz. 4. Cyclus, p. 67-68. Zürich 1862.

V. Nachrichten über Marcus Michael Bousquet, den Verleger Euler'scher und Bernoulli'scher Werke.

VI. Notiz über Cosimo Bartoli, Verfasser des: „Del Modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive et tuttele altre cosi terrene, che possono occorere agli homini." O.

G. Govi. Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air. Boncompagni Bull. III. 282-296. 1870.

H. Wolf hatte in der obigen Arbeit auf Grund seiner Untersuchungen die Erfindung der Libelle nicht Thevenot, sondern Chapotot, einem Mechaniker in Paris, zuerkannt. Zum Schluss hat er die Gelehrten Frankreichs und Italiens zu näheren Untersuchungen nach dieser Richtung in den dortigen Sammlungen aufgefordert. H. Govi ist dieser Aufforderung nachgekommen und glaubt auf Grund seiner Nachforschungen beweisen zu können, dass Chapotot nicht die Libelle, sondern ein anderes Nivellirinstrument erfand, die Erfindung der Libelle dagegen mit Recht Thevenot zugeschrieben werde. O.

F. Jacoli. Intorno a due edizioni di Marco Michele Bousquet. Brano di lettere a. D. B. Boncompagni in data di „Genova 10 Gennara 1870." Boncompagni Bull. III. 91 u. 92. 1870.

Notiz über das bei Bousquet erschienene Werk: „Davidis Gregorii M. D. Astronomicae Professoris Saviliari Oxoriae, et Regalis Societatis Londonensis Sodalis Astronomiae Physicae et Geometriae Elementa. Secunda editio. Genovae. MDCC. XXVI."

O.

L. Am. Sédillot. Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collége de France. Boncompagni Bull. II. 343-368. 387-448. 461-510. 1869. III. 107-170. 1870.

Die vorliegende Arbeit ist vorzugsweise bestimmt, die Lücken auszufüllen, die sich in den Werken von Guillaume Duval: „Le Collége Royal de France ou Institution, Etablissement et Catalogues des Lecteurs et Professeurs ordinaires du Roy, fondez à Paris par le Grand Roy François I., Père des Lettres, et autres Roys, ses successeurs jusqu'à Louis XIV. Dieu-donné." Paris MDCXLIV. und vom Abbé Gouiet: „Mémoire historique et littéraire sur le Collége Royal de France." Paris MDCCLVIII. finden. Der Verf. unterscheidet vier Perioden: 1) 1530-1547 die Gründung unter Franz I. 2) 1547-1589 die Entwickelung unter den letzten Valois (Einführung der Konkurse zur Besetzung der Stellen). 3) 1589-1774. 4) 1774-1869 mit speciellen Angaben über die Besetzung der einzelnen Stellen in dieser Zeit. Literarische Bemerkungen über die Arbeiten der Einzelnen finden sich überall eingestreut. O.

F. Jacoli. Intorno ad una edizione degli Elementi d'Euclide. Lettera a B. Boncompagni. Boncompagni Bull. III. 297 u. 298. 1870.

Nachricht über eine Ausgabe der Elemente des Euclid vom Jahre 1557, in der sich eine Notiz über Prof. Magnienus findet, einen der Professoren des Collége de France, dessen Sédillot in seiner Arbeit erwähnt. O.

H. Martin. Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos. Lettre à B. Boncompagni. Boncompagni Bull. III. 299-302. 1870.

H. Sédillot hatte in seiner obigen Arbeit 2 Werke als Roberval zugehörig angegeben. Das eine derselben war: „Aristarchi Samii de mundi systemate, partibus et motibus ejusdem libellus." H. Martin bemerkt, es stehe bereits seit lange fest, dass der Name des Aristarch untergeschoben sei, und das Werk gänzlich von Roberval herrühre. O.

B. Boncompagni. Intorno ad uno scritto intitolato „Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo De' Toschi di Fagnano, fino al mese di Febbrajo dell' anno 1752," inviate dal Padre Don Angelo Calogerà al Conte Giovanni Maria Mazzuchelli. Boncompagni Bull. III. 27-46. 1870.

Diese im Jahre 1866 der Bibliotheca Vaticana einverleibte Schrift enthält zahlreichere und zuverlässigere Notizen über das Leben Fagnano's, als die bisherigen Quellen dafür, die Schriften des Abate Giuseppe Santini, der Abaten Vecchietti und Moro, und des Conte Giuseppe Mamiani. Fürst Boncompagni hat diese Schrift pag. 37-46 abdrucken lassen und mit historisch-literarischen Anmerkungen begleitet. M.

F. Siacci. Sul teorema del Conte di Fagnano. Boncompagni Bull. III. 1-26. 1870.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2.

A. Genocchi. Di una formola del Leibniz e di una lettera di Lagrange al Conte Fagnano. Torino 1869.

H. Tardy hatte in seiner Arbeit mitgetheilt, dass der achtzehnjährige Lagrange, ohne die Entdeckungen Leibniz's über die höheren Differenziale eines Products und die Bernouilli'sche Reihe zu kennen (s. Fortschr. d. M. I., p. 85 u. 86), selbständig zu denselben Resultaten gekommen sei. Dem Brief Lagrange's an den Conte Fagnano ist die Arbeit Genocchi's gewidmet. Es wird darin zugleich der Brief mitgetheilt. Einen Abdruck desselben findet man auch in der Arbeit:

J. A. Grunert. Ein merkwürdiger Brief des achtzehnjährigen Lagrange an den Conte Giulio Carlo da Fagnano. Grunert Arch. L. 223-231. 1869. O.

J. Hoüel. Sur une formule de Leibniz. Bordeaux 1869.

Berichterstattung über die Arbeiten Tardy's und Genocchi's. O.

M. CANTOR. Leibniz und die Differentiation mit beliebigem Index. Schlömilch Z. XIV. Litz. 30-31. 1869.

Mittheilung über die Schriften von Tardy und Genocchi.

O.

Intorno ad una formola del Leibniz. Articola estrata dei Volume intitolata: Monatsbericht der kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1868. Sessione del 3. decembre 1868. Traduzione del Sig. Filippo Keller. Boncompagni Bull. II. 275 u. 276. 1869.

CH. G. BORCHARDT. Sur quelques passages de lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indice quelconque. Boncompagni Bull. II. 277 u. 278. 1869.

Französische Reproduction der vom Verf. in der Berliner Akademie an die Tardy'sche Note geknüpften Bemerkungen. (Siehe Fortschr. d. M. I. p. 85 u. 86.) O.

B. BONCOMPAGNI. Intorno ad uno scritto del Sig. Prof. Placido Tardy. Boncompagni Bull. II. 273 u. 274. 1869.

Literarische Notizen über denselben Gegenstand. O.

M. CANTOR. Recension über A. Forti, Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange. Schlömilch Z. XIV. Litz. 56 u. 57. 1869.

(Siehe Fortschr. d. M. I. 15.)

J. BERTRAND und GEORGE DARBOUX. C. A. Valson „La vie et les travaux du Baron Cauchy. 2. vol. in 8°, 1868." Journal des Sav. 1869. Août. — Bull. Math. I. 105-107. 1870.

B. BONCOMPAGNI. La vie et les travaux du Baron Cauchy etc. par C.-A. Valson etc. 2. tom. Paris 1868. Boncompagni Bull. II. 1-96. 1869.

ENRICO NARDUCCI. Indicazione degli scritti di Agostino Cauchy contenute in otto raccolte scientifiche. Boncompagni Bull. II. 97-102. 1869.

Die Recension Bertrand's wirft dem Valson'schen Buche mit Recht vor, dass es den berühmten Geometer mehr als eifrigen Katholiken darstellt, denn als Mann der Wissenschaft; sie deckt überhaupt eine Reihe wesentlicher voreiliger und schiefer Urtheile auf, die Valson über Cauchy gefällt hat, sowie mehrfache Fehler bei Darstellung des Inhalts seiner Werke. Die Recension Boncompagni's hält sich streng an das Valson'sche Buch, leidet daher, fast möchte man sagen noch im verstärkten Maasse, an demselben Fehler wie jenes, nämlich mehr Cauchy's Thätigkeit für die religiösen Orden zu schildern, als seinen Einfluss auf die Fortschritte der Wissenschaft. Das Letztere thut Bertrand in seinem Artikel, während der Boncompagni's durch die vortreffliche, von Valson sehr mangelhaft gegebene, Bibliographie der Cauchy'schen Schriften von Werth ist. Dem Artikel Bertrand's hat Darboux eine summarische Uebersicht der Zahl der Cauchy'schen Schriften nach Valson hinzugefügt, dagegen giebt Narducci in seinem Artikel eine Angabe sämmtlicher Arbeiten Cauchy's, soweit sie in den Comptes Rendus (654), den Mémoires de l'Académie (21), den Mémoires prés. p. div. Savants (2), dem Journal de l'École Polyt. (13), den Annales de Gergonne (3), dem Bull. de Férussac (22), dem Bull. de la Soc. philomat. (16) und den Exercices d'Analyse etc. (68) enthalten sind, mit genauer Angabe des Bandes, der Seitenzahl und der Zeile, aber ohne die Titel der Arbeiten. Die Gesammtzahl aller Schriften und Abhandlungen Cauchy's ist 789. (Siehe Fortschr. d. M. I. 15.) Oe.

A. Genocchi. Di alcuni scritti attribuiti ad Agostino Cauchy. Atti di Torino V. 1870.

Eine kurze und gelehrte historische Untersuchung, von der einige Artikel abgedruckt sind im Bulletin des sciences mathématiques des Baron Férussac, unterschrieben A. C. In derselben wird festgestellt, dass in einem Catalog der Kgl. Gesellschaft in London (Catalogue of scientific Papers 1800-1863 compiled and published by the Royal Society of London t. I. 1867) einige Arbeiten irrthümlich Cauchy zugeschrieben sind, die Cournot zuzuschreiben sind. Jg. (O).

F. Palermo. Sulla vita ed opere di Giovanni Battista Amici. Boncompagni Bull. III. 187-248. 1870.

Lebensbeschreibung dieses Gelehrten mit eingehenden Notizen über seine Instrumente und Beobachtungen. (G. B. Amici, geb. d. 25. März 1786 zu Modena, gest. 10. April 1863, ist vorzugsweise bekannt durch seine Verdienste um das Mikroskop.) O.

J. A. Grunert. Joh. Jos. Ign. v. Hoffmann. Grunert Arch. XLIX. Lit. Ber. CLXXXXVI. 1-5. 1869.

H. geb. zu Mainz 17. März 1777; 1802 Supplent der Physik an der Univ. Aschaffenburg, 1806 Prof. der Mathem. an derselben Anstalt; 1807 Director des Forstlehrinstituts daselbst, 1858 in den Ruhestand getreten, starb in Aschaffenburg am 30. Jan. 1866. Die Zahl seiner veröffentlichten Arbeiten ist 42. Ce.

A. Quetelet. Notice sur J.-A. Timmermans. Grunert Arch. XLIX. Lit. Ber. CLXXXXIV. 2-12. 1869.

T. geb. 22. Aug. 1801 zu Brüssel, Dr. ès sciences 1822, im selben Jahre Lehrer der Math. am Collége in Gent., 1830 Capitain im Geniecorps, 1835 Professor der Math. an der Universität Gent, starb daselbst am 2. Dec. 1864. Dem seiner wissenschaftlichen Thätigkeit gerechtwerdenden Nekrologe ist eine Liste der Werke von Timmermans angehängt; dieselbe weist 38 Nummern auf, wobei seine Arbeiten in den Annales belgiques, der Correspondance de Férussac, den Annales de Gergonne und den Mém. de la Société de Lille nicht eingerechnet sind. (Siehe Fortschr. d. M. I. 14). Ce.

C. Bruhns. Johann Franz Encke. Leipzig, Günther. 1869.

Enrico Narducci. Intorno alla vita ed agli scritti di Francesco Woepcke. Boncompagni Bull. II. 119-152. 1869.

Franz Woepcke, geb. zu Dessau d. 6. Mai 1826, Dr. der Philos. 1847; Privatdocent in Bonn 1850; 1850-1855 zu Paris lebend, 1856-1858 Lehrer am Collége Royal Français in Berlin, dann wieder in Paris und im Auftrage Boncompagni's in England lebend, starb am 25. März 1864. Die Abhandlung Narducci's giebt

eine Darstellung des Lebens und ein vollständiges, auch bibliographisch exactes Verzeichniss der von Woepcke veröffentlichten (50) und der als Manuscript hinterlassenen Schriften (5); von letzteren befinden sich 3 im Besitz der Société Asiatique in Paris, die anderen, Auszüge aus arabischen Handschriften mit französischer Uebersetzung, und 174 Briefe im Besitze des Fürsten Boncompagni. Eine Analyse der Woepcke'schen Schriften, die bei ihrer grossen Seltenheit sehr erwünscht gewesen, giebt Narducci nicht.

Ce.

J. A. Grunert. Christian Leonhard Philipp Eckhardt. Grunert Arch. XLIX. Lit. Ber. CLXXXXIV. 1 u. 2. 1869.

E. geb. 1. Juli 1784 zu Dauernheim in der Wetterau, starb als Grossh. Hessischer Geheimrath am 20. Dec. 1866 zu Darmstadt. Besonders hervorzuheben sind seine Bemühungen um die geodätische Vermessung seines Vaterlandes. Ce.

E. Schering. Notice biographique sur Bernhard Riemann. Traduit par P. Mansion. Boncompagni Bull. III. 409-428. 1870.

Uebersetzung aus den Göttinger Nachrichten 1867 mit einer Note über Riemann's akademische Thätigkeit und einem Verzeichniss seiner Arbeiten. O.

Heinrich Gretschel. August Ferdinand Möbius. Grunert Arch. XLIX. Lit. Ber. CLXXXXV. 1-9. 1869.

M. geb. 17. Nov. 1790 zu Schulpforta, Dr. phil. 1814, Privatdocent in Leipzig 1815; ausserordentl. Prof. der Astronomie daselbst 1816; der barycentrische Calcul 1827; ordentlicher Prof. 1844; starb am 26. Sept. 1868. Ce.

E. Janichefsky. Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky. Discours prononcé dans la Séance solennelle de l'Université Impériale de Kazan, le 5/17. Novembre 1868. Traduit du russe par A. Potocki. Boncompagni Bull. II. 223-262. 1869.

J. Hoüel. Notice sur la vie et les travaux de N.-J. Lobatchefsky. Bull. Math. I. 66-71. 1870.

Geb. 1793 zu Makarief im Gouvernement Nischni-Nowgorod,

trat L. 1802 als Schüler in das Gymnasium zu Kazan; 1807 ging er auf die seit 2 Jahren gestiftete Universität dieser Stadt über, 1811 erhielt er die Magisterwürde und 1812 trat er zum ersten Male als Supplent seines älteren Bruders als Docent der Arithmetik und Geometrie auf. 1816 wurde er ausserordentlicher Professor, 1820 war er alleiniger Vertreter der Mathematik an der Universität. 1827 zum Rector gewählt, behielt er diese Würde bis 1846, in welchem Jahre er zum Vicecurator derselben ernannt wurde. Seit 1847 kränkelte er und starb am 12/24. Febr. 1856. Die Arbeit Janichefsky's bringt besonders noch eine interessante Geschichte der Universität Kazan während dieser Zeit und eine Liste der Werke Lobatchefsky's, bekanntlich mit Bolyai de Bolya Begründer der sogenannten imaginären Geometrie. Die Notiz Houel's ist nur ein kurzer Auszug über das Leben L.'s aus dem Bulletino. Ce.

v. Martius. Carl Georg Christian v. Staudt. Grunert Arch. XLIX. Lit. Ber. CLXXXXIII. 1-5. 1869.

St. geb. 28. Jan. 1798 zu Rothenburg a. d. Tauber, Dr. d. Phil. 1822 und Prof. am Gymnasium zu Würzburg, 1827 in gleicher Eigenschaft nach Nürnberg versetzt, 1835 ordentl. Professor der Mathematik in Erlangen, starb 1. Juni 1867. Der Aufsatz giebt auch eine kurze Uebersicht über das Wesen der neueren Geometrie und die hohen Verdienste, welche sich v. Staudt um dieselbe erworben. Ce.

v. Martius. Sir David Brewster. Grunert Arch. XLIX. Lit. Ber. CLXXXXIV. 12-14. 1869.

Wenn auch vorzugsweise Physiker, war Br. doch für die Mathematik durch seine Biographien von Newton, Euler, Robinson, Galilei, Tycho, Brahe und Kepler thätig. Brewster wurde geb. 11. Dec. 1787 zu Jedburg in Schottland. Mitglied fast sämmtlicher Akademien der Welt starb er als Kanzler der Universität Edinburg am 10. Febr. 1868 im 87. Jahre seines Lebens. Ce.

Spring. Discours prononcé au nom de l'Académie (de Bruxelles), lors des funérailles de M. J.-B. Brasseur, membre de l'Académie, décédé à Liège, le 13. Mai 1868. Grunert Arch. L. Lit. Ber. CLXXXXVIII. 1-3. 1869.

Alphonse Le Roi. Notice sur la vie et les travaux de Jean Baptiste Brasseur. Boncompagni Bull. II. 263-272. 1869.

J. Liagre. Notice sur J.-B. Brasseur, Membre de l'Académie, Né à Esch-sur-l'Alzette, le 24 juin 1802, mort à Liège, le 13 mai 1868. Annuaire de l'Acad. de Belg. 121-144. 1869.

Geb. 24. Juni 1802 zu Esch-sur-l'Alzette (Luxemburg), begann Brasseur seine Studien auf dem Athenäum in Luxemburg und ging 1824 auf die Universität Lüttich, wo er 1829 den Doctorgrad erwarb. 1830 war er in Paris und besuchte dort die Vorlesungen von Cauchy, Biot u. A. Noch im selben Jahre habilitirte er sich als Privatdocent in Lüttich. 1831 wurde er Conducteur der Brücken und Strassen zu Löwen, endlich 1832 Professor der Mathematik in Lüttich; 1847 wurde er correspondirendes Mitglied der belgischen Akademie, 1855 ordentliches Mitglied derselben; er starb am 13. Mai 1868 zu Lüttich. Das Verzeichniss seiner Schriften geben Liagre und Le Roi; das letztere vollständigere weist 20 Arbeiten nach, von denen eine in 4 Auflagen erschienen ist. Ce.

M. Cantor. Notice sur la vie et les ouvrages du général J. V. Poncelet par M. le général Didion lue à l'Académie impériale de Metz dans la séance du 18 mars 1869. Paris 1869. Schlömilch Z. XIV. Litz. 53-56. 1869.

Auszug aus einer Rede, das Leben und die Werke Poncelet's betreffend. O.

F. Marchetti. Cenni Necrologici del P. Nazareno Mancini. Boncompagni Bull. III. 429-438. 1870.

Nazareno Mancini ist geb. d. 1. December 1822 und starb als Assistent an dem Observatorium des Collegium Romanum am 7. November 1870. Angefügt ist ein Catalog seiner Arbeiten. O.

H. M. Dr. Ludwig Oettinger. Grunert Arch. LI. Lit. Ber. CCI. 1-3. 1870.

O. geb. 7. Mai 1797 zu Edelfingen bei Mergentheim, 1817 Cand.

der Theol.; 1819 Lehrer an der lat. Schule zu Durlach, 1820 am Gymnas. zu Heidelberg; 1823 Professor daselbst und Privatdocent an der Universität, 1836 an Buzengeiger's Stelle ordentl. Prof. in Freiburg i. Br., starb als solcher 10. Oct. 1869. Ce.

F. August. Ernst Ferdinand August. Grunert Arch. LI. Lit. Ber. CCIV. 1-5. 1870.

Geb. 18. Febr. 1795 zu Prenzlau, verwaiste A. früh und fand Aufnahme in der Familie eines armen Handwerkers. 1805 kam er durch Hülfe namentlich des Geh. Rath Kenke als Lect. an das Gymnasium zum grauen Kloster in Berlin; 1813 schloss er sich dem Lützow'schen Freicorps an; den zweiten Feldzug machte er als Landwehrlieutenant mit. Nach dem Frieden studirte er Theologie und Philol. und wurde 1817 Probandus am grauen Kloster, dann ordentl. Lehrer am Joachimsthalschen Gymnasium. 1823 promovirte er und erhielt bald darauf den Professortitel. 1827 organisirte er das mit dem grauen Kloster bis dahin verbundene Köllnische Gymnasium zu einer selbständigen Anstalt, dem köllnischen Realgymnasium, das er 43 Jahre als Director leitete. 1868 feierte er sein 50jähriges Dienstjubiläum. Er starb nach fast $1^1/_2$jährigem Leiden am 25. März 1870. Dem Nekrolog ist eine Uebersicht seiner mathematisch-physikalischen Arbeiten angehängt. Ce.

G. Friedlein. Annotationes ad historiam matheseos spectantes. Boncompagni Bull. III. 303-306. 1870.

I. Bemerkungen zu einer Kritik H. H. Martin's über des Verfs.: „Die Geometrie des Pediasimus. Pr. Ansbach 1866."

II. Berichtigung der Kritik Hoüel's über des Verfs.: „Die Zahlzeichen" in Bezug auf die Zeichen + und —.

III. Notiz „De Victorii Calculo." O.

L. Matthiessen. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben zur directen Auflösung der quadratischen und kubischen litteralen Gleichungen. Schlömilch Z. XV. 41-47. 1870.

Nach historischen Bemerkungen über die Regel vom falschen

Satze folgt eine Erörterung der Methode, welche von den Indern und von den Arabern zur Auflösung der Gleichungen ersten Grades angewandt worden ist. Es wird dann von dieser Methode Gebrauch gemacht zur Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Diese Anwendung wird analytisch-geometrisch begründet. Daran schliesst sich dann die Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen durch dieselbe Methode. T.

BÖSSER. Die Theorie der kaustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Pr. Eutin. 1869.

Die Schrift verbindet in sehr gelungener Weise die Geschichte der Entdeckungen auf dem bezeichneten Gebiete und die Charakterisirung der Leistungen der einzelnen Autoren mit einer ziemlich vollständigen Darlegung des Gegenstands und selbständig vereinfachten Begründung der Resultate, und fügt schliesslich eine Aufstellung in Betreff der physikalischen Deutung hinzu.

Huyghens betrachtete die Wellenfläche als Einhüllende der Kugeln, deren Radien im Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit wachsen, und bestimmte durch sie den Strahl als Normale. Nimmt man, mit Beschränkung auf die Ebene, die Wellenlinie als Ort der Punkte, für welche die Entfernungen von der brechenden Curve und von einem festen Kreise in constantem Verhältniss stehen, so geht sie für den Fall einer brechenden Kreislinie, identisch mit Descartes' Bestimmung, in dessen Ovale über. Er zeigte zuerst, dass parallel auffallende Strahlen durch eine Ellipse in deren einen Brennpunkt gebrochen werden, wenn das Verhältniss der Excentricität zur grossen Halbaxe gleich dem Brechungsexponenten ist.

Die Brennlinien als Evoluten der Wellenlinie untersuchte zuerst Tschirnhaus 1682, und zwar für Reflexion. Er wendet die Länge des ausfallenden Strahls bis zum Coincidenzpunkt an. Sein Ausdruck für denselben lässt sich sehr vereinfachen: er geht über in die Projection des halben Krümmungsradius auf den Strahl, was Tsch. für den Kreis auch beweist. Anwendung

wird gemacht auf Parabel und Kreis; bei letzterem ergiebt sich eine Epicykloide als Evolvente; erstere bietet ihm die Bemerkung dar, dass die Länge der Brennlinie die Summe des ein- und ausfallenden Strahls ist.

Diesen Satz kennt Joh. Bernoulli allgemein, und hat auch den genannten vereinfachten Ausdruck für die Länge des Strahls. Für die Katakaustik der Cykloide findet er eine Cykloide von halb so grossen Dimensionen. Er untersucht die Katakaustik für divergent einfallende Strahlen und die Diakaustik und stellt die allgemeinen Gleichungen auf. Anwendungen werden auf die Parabel, den Kreis und die logarithmische Spirale für ein leuchtendes Centrum gemacht. Für die Diakaustik dient ihm die Relation:

$$\frac{n}{m}e_1 + b_1 = \frac{n}{m}e_2 + b_2$$

wo $m:n$ das Brechungsverhältniss, e_1 und e_2 consecutive central ausgehende, b_1, b_2 die zugehörigen gebrochenen Strahlen bis zum Coincidenzpunkt bezeichnen.

Jac. Bernoulli, de la Hire, Hôpital werden nur als Schriftsteller genannt.

Nach einer langen Pause nimmt 1808 Malus die Untersuchung wieder auf. Er geht von der Annahme aus, dass die ankommenden Strahlen immer Normalen einer Fläche sind. Wie sie dann auch auf einer neuen Fläche reflectirt oder gebrochen werden mögen, so giebt es in jedem Einfallspunkte zwei Richtungen, nach denen hin die ausfallenden Strahlen Coincidenzpunkte haben, und das ganze Strahlensystem lässt sich als System der Schnitte zweier Systeme developpabler Flächen auffassen. Für central ausgehende Strahlen schneiden sich dieselben unter rechten Winkeln, und diese Eigenschaft bleibt bei wiederholter Reflexion und Brechung bestehen. Malus bestreitet das letztere, Bösser enthüllt den Grund seines Irrthums.

Dupin 1822 giebt dem Satze die Form, dass die Eigenschaft der Strahlen, normal zu einer Fläche zu sein, nach aller Brechung fortdauert. Die Bestimmung der orthogonalen Transversalfläche war nun die Aufgabe der kaustischen Theorie.

Gergonne fand, dass sich das Resultat jeder mehrfachen Brechung durch eine einfache bewirken lässt; ferner dass die Brechung centraler Strahlen an einer Geraden als Kaustik die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel hat; jenachdem der Strahl in ein dünneres oder dichteres Medium übergeht.

Sturm 1824 beweist dies auf's neue und untersucht ebenso die Diakaustik des Kreises. Sie ist die Evolute einer Curve, für welche die Summe oder Differenz der Producte aus den Radienvectoren und zwei constanten Grössen constant ist, und welche mit den Ovalen von Descartes identisch sind.

Quetelet 1825 nennt die Evolventen der Kaustik Caustiques secondaires und betrachtet die Evoluten als Einhüllende von Kreisen. Für einen brechenden Kreis und centrale Strahlen liegen deren Mittelpunkte auf diesem, und ihre Peripherien gehen durch den leuchtenden Punkt. Gehen überhaupt Strahlen von einem Punkte aus und treffen auf eine brechende Curve, so stehen sie nach der Brechung senkrecht auf der Enveloppe der Kreise, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen, und deren Radien zu den Entfernungen der Mittelpunkte vom leuchtenden Punkte im Brechungsverhältniss stehen. Er stellt ferner den Satz auf: Projicirt man eine caustique secondaire auf eine Kugelfläche, so kann die Projection auf's neue auf eine Ebene so projicirt werden, dass die zweite Projection ein Kegelschnitt wird.

Sarrus fügt hinzu: Die Kaustik für parallel einfallende Strahlen ist die Evolute der Enveloppe der Kreise, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen, und deren Radien zu den Entfernungen der Mittelpunkte von einer normalen Transversale im Brechungsverhältniss stehen.

Gergonne combinirt beide Sätze, indem er bei centralen Strahlen statt des Centrums eine Peripherie um dasselbe nimmt und die Länge von da aus rechnet. Auf den Raum übertragen lautet der Satz: Fallen Strahlen, welche normal zu einer Fläche (surface trajectoire) ausgehen, auf eine brechende Fläche, so denke man sich längs dieser variirend den Mittelpunkt zweier Kugeln, deren Radien im Brechungsverhältniss stehen, und deren eine die gegebene surface trajectoire berührt, dann ist die En-

veloppe der anderen die surface trajectoire für die ausfallenden Strahlen.

Von der physikalischen Bedeutung der surface trajectoire, dass sie nämlich den Ort der gleichzeitig eintreffenden Lichtstrahlen bezeichnet, sagt der Verf., dass dieselbe den meisten Bearbeitern der kaustischen Theorie entgangen zu sein scheine.

H.

D. Piani. Sul centro di gravità. Disquisizioni storico-critiche. Mem. di Bologna X. 1870.

Siehe Abschnitt X. Cap. 3.

F. Grube. Zur Geschichte des Mac-Laurin'schen Satzes, betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide. Schlömilch Z. XIV. 261-266. 1869.

Der Verf. sucht nachzuweisen, dass der von Mac-Laurin aufgestellte Satz: „Die Kräfte, mit denen confocale Ellipsoide einen und denselben äusseren Punkt anziehen, sind ihren Massen proportional" nicht nur von Mac-Laurin ausgesprochen, sondern auch bewiesen sei. Er stützt sich dabei auf Mac-Laurin's „Treatise of fluxions" 1743. Art. 649, 651 u. 653. Andere Mathematiker wie d'Alembert, Lagrange, Legendre, Ramus haben Mac-Laurin den Beweis abgesprochen. Der Beweis ist synthetisch. Analytische Beweise für diesen Satz haben gegeben: d'Alembert, Opusc. math. VII. 1780. Lagrange, Nouv. mém. de l'Acad. Berlin 1775, und Legendre, Mém. des math. et de phys. prés. p. divers savans. Paris 1785.

O.

Andrea Stiattesi. Sull' Aritmetica. Dissertazione storico-critica. Boncompagni Bull. III. 389-408. 1870.

Die Arbeit ist die Einleitung zu einem Werke: „Aritmetica razionale ossia introduzione alla studio delle Mattematiche."

O.

Capitel 2.
Philosophie.

J. Jäkel. Der Satz des zureichenden Grundes. Breslau 1868. Gött. Anz. 1869. 668-678.

Die Schrift beginnt mit dem historischen Entwickelungsgang der Auffassung des Wesens der Erkenntniss und verweilt dann bei der formalen Logik. Der Referent erkennt keiner der aufgeführten Gedankenverbindungen Bündigkeit und Berechtigung zu. Worin die Leistung besteht, ist daher aus dem Referat nicht zu entnehmen. Als Formel für den Satz des zureichenden Grundes stellt der Verf. auf: Es ist unmöglich, dass Etwas wird, wenn der Gegensatz von Ich und Nichtich als thuenden und leidenden zum Stehen gekommen ist, d. h. wenn sie 1) der Möglichkeit nach sowohl sich setzen als auch einander aufheben, 2) in Wirklichkeit aber weder sich setzen noch einander aufheben — und hält ihn für zusammenfallend mit dem Satze des ausgeschlossenen Dritten, sofern die zwei Uebrigbleibenden existiren in zwei contradictorisch widersprechenden Möglichkeiten. H.

Valeriano Valeriani. Del piano, sua definizione, assioma del piano elevato a teorema. Battaglini G. VII. 376. 1869.

Die Ebene wird definirt als eine von einer geraden Linie beschriebene Fläche der Art, dass die Erzeugende mit zwei sich schneidenden Geraden zwei Punkte gemein hat, und daraus der Satz bewiesen: Durch einen Punkt einer Ebene lassen sich in derselben beliebig viele Gerade ziehen. H.

Schlömilch. Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft von J. C. Fresenuis. Wiesbaden. Kreidel 1868. Schlömilch Z. XIV. Litz. 4 u. 5. 1869.

Recension. Siehe Fortschr. d. M. I. p. 17 u. 18.

R. Mauritius. Bemerkungen zur Psychologie der Raumvorstellungen und zum Fechner'schen Gesetze der logarithmischen Perception. Pr. Coburg 1870.

Der Aufsatz nimmt seinen Ausgangspunkt in einer sehr com-

pacten Aufgabe, dem psychologischen Nachweis der Entstehung der räumlichen Vorstellungen, entfernt sich jedoch von ihr im äussersten Streben nach Gründlichkeit, um mit einem dem Thema ziemlich fremden Untersuchungspunkte zu schliessen. Die gleiche Aufgabe hatte sich 2 Jahre früher Fresenius in der Schrift: „Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft" (vgl. Ber. I. 17) — gestellt. Durch sie ist der Verf. vornämlich angeregt, doch in keinem Punkte geleitet und bestimmt worden. Während Fresenius seinen Beobachtungen nach Vorführung sogleich seine ungeläuterten Begriffe aufprägt, untersucht Mauritius mit grösster Gewissenhaftigkeit jeden mitwirkenden Umstand und macht hierdurch erst einen ernsten Anfang mit der Lösung. In ähnlichem Falle befindet er sich Kant gegenüber. Er schätzt die von Beiden erhaltenen Anregungen so hoch, dass er ihre Aufstellungen für Leistungen gelten lässt, obgleich er sie geradezu umstossen muss. Wodurch er namentlich seinen Vorgängern entschieden entgegentritt, ist die Lehre, dass die einfachsten räumlichen Vorstellungen, des Punkts, der Geraden, der Ebene, der Richtung, das Resultat vieler, zum Theil ziemlich complicirter Schlüsse sind. Er zeigt dies besonders ausführlich in Betreff der Vorstellung einer Richtung und Drehung. Im Ganzen geht er indess wenig über Darlegung der Erfordernisse hinaus. Die Vorstellung der Bewegung setzt nach seiner Ansicht ein Vermögen zur Beurtheilung der Zeit voraus, und kann nicht ursprünglich, d. h. ohne dies Vermögen, in Raum und Zeit zerlegt werden. Dies führt ihn auf die Untersuchung der Fähigkeit, Zeitdauer durch einfache Sinneswahrnehmung, Gehör, Gesicht, Tastsinn abzuschätzen, bei welcher er sich durch das Fechner'sche Gesetz der logarithmischen Perception leiten lässt. Seine hierzu angestellten Experimente und seine logische Kritik bieten viel Interessantes dar. Die eigentliche Frage jedoch, von der nicht weiter die Rede ist, möchte wohl damit in keiner reellen Verbindung stehen, wie sich gezeigt haben würde, wenn er daran gegangen wäre, die Zeitvorstellung, wie sie ist, wirklich darauf zu basiren. H.

J. J. Baumann. Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen

Einfluss dargestellt und beurtheilt. Bd. II. 1869. Berlin, G. Reimer.

Siehe Fortschr. d. Math. I. 16.

J. C. BECKER. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. Zürich. Schulthess 1870.

I. Ueber die Natur des Raumes nach Kant und Gauss.

II. Die Axiome der Geometrie, wesentlich gegen Riemann's Schrift: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" gerichtet.

III. Ueber die Grundbegriffe der Geometrie, wesentlich gegen Trendelenburg's „Logische Untersuchungen" gerichtet.

IV. Zur Methode der Geometrie, das Euklidische System und die Versuche, dasselbe durch ein natürlicheres zu ersetzen.

Recension von Schlömilch dazu siehe Schlömilch Z. XV. Litz. 93-95. 1870. O.

J. HOÜEL. Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide. Battaglini G. VIII. 84-89. 1870.

Die Flächen constanter Krümmung lassen sich eintheilen in solche, deren Krümmung positiv, null oder negativ ist. Die ersteren gehen aus einer Kugelfläche durch Biegung ohne Dehnung hervor und sind sphärische, während die anderen horisphärische und pseudosphärische genannt werden. Lobatchefsky und Bolyai haben für jede der drei Classen eine der Planimetrie entsprechende Geometrie entworfen. Die sphärische und pseudosphärische Geometrie sind gemeinsam dadurch von der horisphärischen, einschliesslich der ebenen Geometrie unterschieden, dass das Dreieck der Summe seiner Winkel weniger zwei Rechten proportional ist. Es ist nun klar, dass eine Geometrie, die gleicherweise auf alle Flächen constanter Krümmung anwendbar ist, kein Resultat ergeben kann, das nur für die eine Classe Gültigkeit hat. Hieraus kann man in der That schliessen, dass die Planimetrie, sofern sie die Ebene, ohne deren specifische Eigenschaften zu untersuchen, für alle Constructionen voraussetzt und durch nichts als

horisphärische Fläche bestimmt, nicht im Stande sein kann, den Satz, dass die Summe der Dreieckswinkel gleich zwei Rechten ist, zu beweisen. H.

R. STURM. Die neuere Geometrie auf der Schule. Hoffmann Z. I. 474-490. 1870.

Obwohl der Verf. die Frage der Einführung der neueren synthetischen Geometrie in die Lehrmethode der Gymnasien und coordinirten Unterrichtsanstalten als solidäre und primäre behandelt, so können wir doch, gerade im Interesse ihrer Förderung, unser Urtheil nur an das anknüpfen, was er über die Art und Weise ihrer Einfügung sagt, sofern davon die Entscheidung ganz und gar abhängt. In Betreff der methodischen Ausführung wird nun die Schrift: „Einleitung in die synthetische Geometrie von Dr. C. F. Geiser“ empfohlen; im übrigen werden einige Andeutungen gegeben und die Gegenstände genannt, welche wohl in den Kreis des Unterrichts zu ziehen sein würden. In allem aber bleibt die Erörterung dabei stehen, was gelernt werden sollte, unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass es durch Vorführung auch sofort in den geistigen Besitz der Schüler übergehen würde. Gar manche Dinge sind aufgeführt, die nur durch Auffassung höherer Beziehung, wie sie erst bei grösserer Reife möglich ist, das wirklich intellectuelle Interesse erwecken können. Dahin gehört namentlich die gleich anfangs in den Kreis der Betrachtungen gezogene Vorstellung der Unendlichkeit. Der Verf. will das Hangenbleiben am Speciellen, welches er als eine zu überwindende Eigenthümlichkeit der Alten darstellt, als Hemmniss der Entwickelung und Grund der berüchtigten Schwierigkeit des mathematischen Lernens beseitigen. Was er aber völlig ausser Acht lässt, ist, dass das Verweilen beim Speciellen bewusstermaassen, nicht etwa blos traditionell, für nothwendig erachtet wird zur Gewöhnung an genaue Beachtung und der Ausbildung des Sinnes dafür. Durch zu frühzeitig erweiterten Spielraum der Vorstellung wird der Schüler am exacten Denken vorbeigeführt und gewinnt unreife Begriffe ohne das Bedürfniss sie genau und klar zu bestimmen. Dies zu verhüten liegt allerdings in der Hand des Lehrers; nur dürfen dann die Gesichtspunkte

des Verfassers und sein Princip nicht massgebend sein. Wir dürfen dann seiner Auffassung nicht zustimmen, nach welcher die neuere Geometrie als Ganzes bestimmt sei, die Euklid'sche Methode allmälig zu verdrängen; sondern müssen, wie es bisher geschehen ist, und als geschehen in einer Anmerkung der Redaction besonders hervorgehoben wird, die brauchbaren Ideen, welche unbestritten die neuere Geometrie darbietet, zur Vervollkommnung der Methode anwenden. Dass dazu das Aufgeben eines didaktischen Princips nothwendig sei, hat der Verfasser nicht gezeigt. Die Anmerkung der Redaction scheint dies als selbstverständlich zu betrachten. H.

J. Kober. Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. Hoffmann Z. I. 228-236. 1870.

Der Verfasser legt, grösstentheils klar und treffend, die Mängel der gewöhnlichen Definitionen dar. Bezeichnend für seine Auffassung und vorzugsweise beachtenswerth ist, dass er erklärtermassen auf die mitgebrachte Kenntniss des Schülers baut, und nicht dulden will, dass derselbe die Meinung gewinne, er müsse seine Begriffe erst ablegen und mit neuen vertauschen. Sein Vorschlag geht dahin, Raum, Fläche, Linie, Punkt, von der einen oder der andern Seite beginnend, beziehungsweise als Grenze oder durch Erzeugung zu definiren; Raum, Punkt, Gerade und Ebene brauche nicht definirt zu werden. H.

J. Kober. Ueber die Definition des Parallelismus. Bemerkung zu dem Aufsatze Sturm's, Heft IV. S. 277. Hoffmann Z. I. 491-493. 1870.

In der wiedergegebenen Stelle aus Sturm's Aufsatze, welcher im Uebrigen nichts hier zu Erwähnendes darbietet, definirt derselbe Parallelen als zwei Gerade in einer Ebene, die sich in einem unerreichbaren Punkte treffen, und nennt ein Mittel, die Vorstellung dem Schüler plausibel zu machen. Der Verfasser entgegnet ihm in deutlicher Auseinandersetzung, dass die Definition, nicht weil ein solcher Punkt nicht existirt, sondern weil sie dem natürlichen Verstande der Schüler widerspricht, zu verwerfen sei und fragt, ob er „es für statthaft hält, eine Wissen-

schaft auf einer Grundlage aufzubauen, die dem Schüler widersinnig erscheint, und nur auf künstliche Weise „plausibel" gemacht werden kann?" Während jedoch Kober der niedern Mathematik vollkommen klare Begriffe vindicirt, schiebt er den Fehler Sturm's sehr irrthümlich der höhern Mathematik zu, über deren Begriffe er wohl nur aus confusen Darstellungen, wie sie freilich in vielen Lehrbüchern stehen, seine Meinung entnommen haben kann. Es ist unrichtig, 1) dass die höhere Mathematik „den schroffen (?) Unterschied discontinuirlicher Grössen nicht kennt"; 2) dass sie „sich hilft so gut sie kann, wo sie an die Begriffe von Null und absolut Unendlich gelangt." Denn ein absolut oder constant Unendliches kennt sie erstlich gar nicht, und Null und Unendlich sind auch keine Hindernisse, über die sie sich hinweghülfe; vielmehr ist letzteres, dessen Begriff als einer variabeln unendlichen Grösse nebst erster Anwendung in klarer und selbst für Anfänger leicht fasslicher Form darstellbar ist, ihr recht eigentlicher Gegenstand und Quelle der wichtigsten Theorien für die Naturwissenschaft. Die Sturm'sche Definition der Parallelen steht nach unserer Ansicht nicht allein im Widerspruch mit dem natürlichen Verstande der Schüler, sondern auch mit allen klaren Begriffen der höhern Mathematik. H.

J. Kober. Die Lehre vom Parallelogramm. Hoffmann Z. I. 469-473. 1870.

Ausgeführtes Muster der Anordnung der Sätze und Beweise unter dem Gesichtspunkt, dass der Abschnitt als ein geschlossenes schon für sich allein lohnendes Ganze erscheinen soll. H.

H. Kiessling. Das geometrische Zeichnen als Vorschule für den mathematischen Unterricht. Hoffmann Z. I. 47-59. 1870.

Ein Cursus im Zeichnen mit Lineal, Zirkel, Transporteur und Dreiecksmodell soll dem geometrischen Unterricht in der Weise vorausgehen, dass allein und mit Sorgfalt die Technik gelehrt und geübt, die Auswahl der Uebungen jedoch, ohne Mitwissen der Schüler, der Erwerbung mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten angemessen getroffen wird. Technische For-

derungen bringen das Bedürfniss exacter Bestimmung von selbst mit sich. Im ersten Abschnitt sollen nur einzelne Gerade und Kreisbogen gezeichnet, im zweiten die Durchschnitte verschiedener zur Punktbestimmung angewandt, im dritten das Parallelenziehen durch Dreieck und Lineal geübt werden. Für jeden Abschnitt sind eine Reihe zweckentsprechender Aufgaben aufgeführt.

H.

E. Fischer. Beiträge zum geometrischen Unterrichte. Pr. Guben 1869.

Der erste der beiden unabhängigen Artikel zeigt, wie aus dem Lehrsatz des Pappus ohne Anwendung von Proportionen der Ptolemäische und der erweiterte Pythagoräische Lehrsatz hervorgehen. Im zweiten befürwortet der Verfasser das Eintreten einer Erklärung der Ebene in der Planimetrie, nachdem die Sätze vom Dreieck und vom Winkel ohne Bezugnahme auf die Natur der Ebene gelehrt worden sind, und schlägt zwei Definitionen vor. Die Ausführung des Lehrstoffs erscheint uns von Anfang an unrichtig und durchweg unbrauchbar. H.

G. Korneck. Ueber mathematischen Unterricht. Pr. Kempen 1870.

Der Verfasser sucht nachzuweisen, dass der Erfolg des mathematischen Unterrichts durch keine besondere Befähigung der Schüler bedingt ist. Nach Musterung der äusseren Gründe einer gewöhnlichen Erfolglosigkeit, stellt er als Erfordernisse der Methode die begleitende Anschauung und die sichtliche systematische Ordnung auf, deren Mängel er in sehr zutreffenden Beispielen nebst dem Fehler der Verschweigung nothwendiger Bestimmungen namentlich an Kambly's Lehrbüchern rügt. H.

D. Besso. Del concetto di funzione nell' insegnamento della geometria elementare. Battaglini G. VII. 431-436. 1869.

Der Verfasser will das Bewusstsein des Zusammenhangs des mathematischen Studiums mit dem Leben durch Einführung des Functionsbegriffs in den Elementarunterricht wecken. Es soll gleichzeitig mit dem constanten Verhalten die Veränderung innerhalb desselben und von ihm aus aufgefasst werden. Er unterlässt

indess zu zeigen, wie auf diesem Wege ein exactes Resultat überhaupt gewonnen wird, setzt vielmehr den Inhalt des mathematischen Wissens überall stillschweigend voraus und lenkt die Aufmerksamkeit davon ab. H.

EDUARD MUELLER. Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt. Theil I. und II. Braunschweig 1869.

Nach Auffassung des Verfassers hat die Geometrie als Lehrgegenstand drei Aufgaben: 1) die Grundvorstellungen aus der reinen Anschauung zum klaren Bewusstsein genetisch zu entwickeln, 2) aus denselben eine Formenlehre abzuleiten, 3) auf beiden ein System der Geometrie aufzubauen.

Die erste Aufgabe, von welcher der erste Theil der Schrift handelt, kann man schwerlich in der vorliegenden Bearbeitung gelöst nennen. Es werden darin eine grosse Menge räumlicher Beziehungen vorgeführt, die ohne sichtliche Begrenzung oder verständliche Auswahl sich von den concreten in das Abstracte, und zwar nicht in successivem Aufsteigen, sondern aller Orten hineinverlaufen. Der Verfasser scheint sich die Frage gar nicht vorgelegt zu haben, was der Schüler thun soll, um sich die Menge decretirter und fast gar nicht erklärter Begriffe und Vorstellungen anzueignen, vielmehr vorauszusetzen, dass, was allgemeinhin genannt sei, auch in gleich umfassendem Sinne bekannt sein müsse, und ganz zu übersehen, wie die von ihm verworfene Euklidische Methode, im Kleinen beginnend, gerade dieselbe Aufgabe wirklich löst, die er in grossem Massstabe angreift, aber nicht effectiv fördert.

Dem zweiten Theil, der die Formenlehre enthält, geht eine Auswahl der concreteren Beziehungen aus dem ersten Theile voraus. Die Formenlehre behandelt Figuren ohne alle Rücksicht auf quantitative Bestimmung, nämlich erst in der Planimetrie die Punktreihe, die gebrochene und krumme Linie, die Verwandtschaft und die eingeschlossenen Figuren; in der Stereometrie einen Büschelraum verbunden mit einer Transversalebene und einer Linie in ihr, die gebrochenen und krummen Flächen, die Verwandtschaft, die Regelflächen, die Polyeder und die Kugel.

Der dritte Theil, welchem hiernach die ganze eigentlich ma-

thematische Aufgabe zufällt, ist noch nicht erschienen. In ihm muss es sich zeigen, ob es ein Vortheil für das Verständniss sei, bei dem Erlernen der Formen die eine Seite der Denkthätigkeit ganz in Ruhestand versetzt zu haben. H.

OPPEL. Ueber die wissenschaftliche Darstellung der Bruchrechnung und Division in Gymnasien und ähnlichen höhern Lehranstalten. Hoffmann Z. I. 34-46. 1870.

Es handelt sich darum, in der Erklärung der Brüche und Bruchrechnung die strenge Logik mit der Forderung zu vereinen, dass die Doctrin sich bei ihrem Beginn mit den geläufigen Begriffen der Schüler im Einklang befindet. Manche gebräuchlichen Erklärungsweisen leisten weder das eine noch das andre. Als wirkliche Lösung wird Folgendes aufgestellt. Geläufig ist die Multiplication als Ergebniss des Zählens. Ebenso entsteht in namhaften Fällen aus $\frac{1}{n}$ die Einheit. Durch Multiplication entsteht aus dem so erklärten $n$tel der Bruch $\frac{m}{n}$. Die Division ist erst vollständig erklärt als Aufsuchung des ergänzenden Factors; doch müssen vorher die zwei geläufigen Begriffe des Theilens und Enthaltenseins durch den Nachweis des übereinstimmenden Ergebnisses dahin übergeführt werden. H.

BUCHBINDER. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht auf deutschen Gymnasien. Hoffmann Z. I.10-33. 1870.

Der Verfasser thut in einem Gutachten die Nothwendigkeit des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts auf Gymnasien dar, indem er besonders auf die Unentbehrlichkeit der Kenntniss der Naturwissenschaften gerade für die Berufsclassen, für welche das Gymnasium vorzugsweise vorzubereiten hat, Gewicht legt. Der Aufsatz empfiehlt sich, ohne gerade neue Gesichtspunkte zu eröffnen, durch eine recht durchschauliche Gliederung des Themas. H.

W. R. SMITH. Hegel and the Metaphysics of the Fluxional Calculus. Trans. of Edinb. XXV. p. 2. 491-512. 1868-69.

Der Verfasser zeigt, dass Hegel die Schlüsse missverstanden hat, auf welchen Newton's Fluxionscalcül beruht. Cly. (M.)

A. CAYLEY. A Memoir on Abstract Geometry. Trans. of London. CLIX. 51-63. 1869.

Siehe Abschn. IX. Cap. 1.

GEORGE BOOLE (the late). Of Propositions numerically definite. Trans. of London. CLIX. 389-411. 1869.

Nach der Mittheilung des Herrn Prof. de Morgan scheint die Arbeit in bemerkenswerther Weise die Gedankenfolge in Prof. Boole's logischen Schriften zu beleuchten. Geschrieben ist sie nach der Veröffentlichung von de Morgan's „Formal Logic", und vor der letzten Bearbeitung von Boole's „Laws of Thougt", obgleich unmittelbar nach seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand, welche an demselben Tage erschien wie die formale Logik. Die Arbeit erläutert durch numerische Gleichungen solche Formen, die Allen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung geläufig sind und die sich auch in Boole's eigenem System der Logik finden.

Das folgende Beispiel characterisirt die Klasse der Fragen, welche hier untersucht werden. Haben in einer Gesellschaft von r Personen p derselben Röcke an und q Westen: so ist die Zahl Derjenigen, welche Beides (Rock und Weste) anhaben, mindestens $=p+q-r$, und diese Grenze wird überschritten um die Zahl Derer, welche weder Rock noch Weste anhaben. Das ist beispielsweise die Erläuterung der symbolischen Gleichung

$$Nxy = p+q-r+N(1-x)(1-y),$$

welche ganz allgemein hergeleitet werden kann. Cly. (M.)

C. NEUMANN. Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Akad. Antrittsrede. Leipz. Teubner 1870.

Nach einer Erläuterung des Wesens einer physikalischen Hypothese zeigt der Verfasser, dass der gewohnte Ausspruch des Galilei'schen Trägheitsprincipes den strengeren Anforderungen der Wissenschaft nicht genüge. Er substituirt für dasselbe drei andere, die demselben einen wirklichen Inhalt zu geben im Stande sind. Das Newton'sche Anziehungsprincip wird nur kurz berührt.

O.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

L. KOENIGSBERGER. Berichtigung eines Satzes von Abel, die Darstellung der algebraischen Functionen betreffend. Clebsch. Ann. I. 168-169. 1869.

Der von Abel in seiner Arbeit: „Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen", (Crelle, I, 65; Oeuvres I, 10; vgl. auch Serret, Cours d'algèbre), gegebene Hülfssatz über die Darstellung einer algebraischen Function μter Ordnung und $m$ten Grades muss dahin berichtigt werden, dass in der allgemeinen Form

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$q_0, q_2, \cdots q_{n-1}$ algebraische Functionen von der Ordnung μ und höchstens vom Grade $m-1$ sind, und p eine ebensolche Function ist, jedoch so beschaffen, dass auch $p^{\frac{1}{n}}$ von der μten Ordnung ist. M.

C. JORDAN. Commentaire sur Galois. Clebsch. Ann. I. 142-160. 1869.

Die Commission, welche von der französischen Akademie mit der Prüfung der Galois'schen Untersuchungen betraut war, erklärte dieselben für „à peu près inintelligibles." Die Arbeit Jordan's hat den Zweck, jene Untersuchungen verständlicher zu machen. Nach Vorausschickung mehrerer Erklärungen über Sub-

stitution, Gruppe u.s.f. folgen die ersten der von Galois aufgestellten Lemmen und Theoreme. Dann aber geht die Untersuchung einen anderen Weg, indem der Gruppe einer Gleichung zuerst rationale Functionen ihrer eigenen Wurzeln adjungirt werden. Es wird eine Andeutung bezüglich der Classificirung von Gleichungen mit zusammengesetzten Gruppen gegeben; dann werden der Gleichung die Wurzeln einer andern adjungirt, ohne dass jedoch auf die von Galois behandelte algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen eingegangen wird. No.

W. Walton. A Demonstration that every equation has a root. Quart. J. XI. 178-182. 1870.

Elegante Darstellung des Cauchy-Legendre'schen Beweises, welcher die Existenz eines Minimums für eine ganze Function zweier Veränderlicher voraussetzt. St.

H. Kinkelin. Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. Clebsch. Ann. I. 502-506. 1869.

Kann man nachweisen, dass mit $F(x)=0$ auch $F(x)+$ const. $=0$ und $xF(x)=0$ jeden complexen Werth annehmen können, so kann man dasselbe auch für die Gleichungen des nächst höheren Grades annehmen, indem man von $F(x)$ zu $xF(x)+a$ übergeht. Die Schwierigkeit liegt im Uebergange von $F(x)$ zu $xF(x)$. Der Verfasser hat sie nicht zu heben vermocht. Er schliesst: Is $F(x)=R(\cos A+i\sin A)$ und $xF(x)=rR[\cos(A+\alpha)+i\sin(A+\alpha)]$, so beschreibt $xF=0$ für ein constantes r einen vollen Umlauf um den Nullpunkt, weil dieser Ausdruck für $\alpha=0$ und $\alpha=2\pi$ denselben Werth annimmt. No.

A. Cayley. A „Smith's Prize" Paper. 1870. Question I. Messenger V. 182-184. 1870.

Damit eine gegebene Relation $\varphi(a, b, c, \ldots)=0$ zwischen den Wurzeln einer gegebenen Gleichung im Allgemeinen zur rationalen Bestimmung der Wurzeln dienen kann, ist es nothwendig, dass $\varphi(a, b, c, \ldots)$ eine ganze unsymmetrische Function der Wurzeln sei. Glr. (O.)

H. Krey. Bemerkungen über die algebraische Lösbarkeit der Gleichungen. Schlömilch Z. XV. 381-383. 1870.

Der Verfasser versucht die Unmöglichkeit der algebraischen Lösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem 4ten Grade zu beweisen. Da er aber die Aufstellung der Form möglicher Wurzeln darauf gründet, dass dieselben für unendlich grosse Coefficienten nicht unendlich werden, so können die Schlüsse wohl nicht als bindend angesehen werden. No.

E. Schroeder. Ueber unendlich viel Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Clebsch. Ann. II. 317-363. 1870.

Der Verfasser sucht verschiedene Methoden zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte zu betrachten, auf Grund einer Methode, die von einem nach Amerika ausgewanderten Mathematiker, Herrn Eggers aus Meklenburg, herrührt. Er kommt dabei zu dem Satze: Ist $f(z)=0$ die gegebene Gleichung, z ein Wurzelwerth derselben, $F(z)$ eine beliebige innerhalb des z umschliessenden Gebietes einwerthige Function, welche die Eigenschaft hat, dass $F(z)=z$ sich ergibt, so kann man $z'=F(z)$, $z''=F(z')$, $z'''=F(z'')$ u. s. w. setzen, und gelangt dann auf diese Weise zu einem Näherungswerthe der Wurzel z, falls mod. $F'(z)$ kleiner als 1 ist. Hierbei ist die Näherung von der 1ten Ordnung, wenn $F'(z)$ nicht gleich Null, sie ist von der $n$ten Ordnung, wenn

$$F'(z)=F''(z)\cdots=F^{n-1}(z)=0$$

ist. Selbstverständlich muss aber in der ersten Näherungsgleichung $z'=F(z)$ die Grösse z einen Werth haben, der von dem Wurzelwerth z nicht über eine gewisse Grenze abweicht, eine Grenze, deren Bestimmung zur Präcision der Näherungsmethode jedenfalls nothwendig, aber unseres Wissens noch nicht festgestellt ist. Für die Newton'sche Methode ist: $F(z)=z-\frac{f(z)}{f'(z)}$ und ist hier $F'(z)=0$, also die Näherung von der 2ten Ordnung, wenn nicht die Wurzel z eine mehrfache ist. Im Anschluss an diese Betrachtungen findet der Verfasser auch einen Werth für $F(z)$, wenn dasselbe eine Näherung von der $n$ten Ordnung darbieten soll, nämlich:

$$F(z) = z - f\frac{1}{f'} + \frac{f^2}{2!}\partial\left(\frac{1}{f'}\right) - \frac{f^3}{3!}\left(\frac{1}{f'}\partial\right)^2\left(\frac{1}{f'}\right) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\frac{f^{n-1}}{n-1!}\left(\frac{1}{f'}\partial\right)^{n-2}\frac{1}{f'} - f^n\varphi,$$

wo φ eine willkürliche Function ist, und der Algorithmus $\left(\frac{1}{f'}\partial\right)^n u$ anzeigt, dass der Differenzialquotient nach z von u mit $\frac{1}{f'}$ multiplicirt und diese Operation $n$mal wiederholt werden soll; setzt man $n = \infty$, so kommt man zu der bekannten Reihe für die Wurzeln der Gleichungen:

$$F = z + \sum_{a=1}^{a=\infty} (-1)^a \frac{f^a}{a!}\left(\frac{1}{f'}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f'}$$

Auch dieser Entwickelung fehlen die Betrachtungen über die Convergenz der Reihe.

Einige Betrachtungen über dieselbe, sowie die Specialisirung der gewonnenen Resultate machen den Schluss der Abhandlung.

Ni.

C. F. E. Bjoerling. Sur la séparation des racines d'équations algébriques. N. Act. Ups. (3) VII. 1870.

Weitere Ausführung des im ersten Bande der Fortschr. der Math. besprochenen Aufsatzes. Die Trennung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ wird auf die Untersuchung der Wurzeln der Ableitung $f'(x) = 0$ gegründet, so dass die Resultate weniger praktisch verwendbar als von theoretischem Interesse sind.

No.

R. Harley. On the Rev. T. P. Kirkman's method of resolving algebraic equations. Proc. of Manchester VIII. 4-20. 1868-69.

Siehe Fortschr. der Math. I. p. 26. Csy.

Beckendahl. Die Gleichungen höherer Grade. Eine Studie. Nürnberg 1869.

Wir heben einige Stellen aus dieser „Studie“ heraus, die besser als alles Andere dieselbe beurtheilen lassen. Es heisst Seite 1: „Eine Gleichung ist die Gleichstellung zweier Zahlen-

werthe.“ Seite 6: „Die in den einzelnen Termen der Cardanischen Formel enthaltenen Grössen sind imaginär, also auch die Wurzel selbst.“ „Mit Hülfe der Cardanischen Formel kann also höchstens eine Wurzel einer cubischen Gleichung gefunden werden“ u. s. w.

No.

H. Weissenborn. Beiträge zur Lehre von der Transformation der Gleichungen. Pr. Eisenach 1870.

Die Abhandlung beschäftigt sich besonders mit der Tschirnhaus'schen Transformation und giebt zugleich interessante geschichtliche Notizen über diesen und manchen ähnlichen Gegenstand.

No.

G. Yung ed A. Armenante. Sulle trasformazioni birazionali univoze (eindeutigen) e sulle curve normale e subnormale del genere p. Battagl. G. VII. 235-253. 1869.

Anschliessend an das Werk von Clebsch und Gordan: „Theorie der Abel'schen Functionen“ führen die Herren Verfasser einige im dritten Abschnitt desselben („Die eindeutigen Transformationen“) behandelten Probleme eingehender durch. Im ersten Theile wird die Erhaltung der Zahl p unter einer etwas allgemeineren Voraussetzung bewiesen, als bei Clebsch und Gordan, indem sowohl die zu transformirende Curve als die Transformationsgleichungs-Curven mit Doppel- und Rückkehrpunkten vorausgesetzt werden, und ein und derselbe Punkt singulär in beiden Systemen sein darf. Im zweiten Theile wird die transformirte Curve auf möglichst niedrigen Grad gebracht. Hier wird eine Erweiterung des im erwähnten Werke (S. 65) ausgesprochenen Satzes aufgestellt: „Ist $p < n-1$, so kann $f = 0$ auf eine Curve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine Transformation $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt werden (Normalcurve); ist $p > n$, so kann $f = 0$ auf eine Curve $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine Transformation $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt werden (Subnormalcurve).“ Diese letztere soll $\frac{(p-1)(p-6)}{2}$ Doppelpunkte besitzen. Im letzten Theile der Abhandlung werden einige Beispiele, welche Clebsch und Gordan (S. 66) angedeutet hatten, durchgeführt.

No.

A. Brill. Erste und zweite Note bezüglich der Zahl der Moduln einer Classe von algebraischen Gleichungen. Clebsch Ann. I. 401-406. 1869 und II. 471-475. 1870.

Der von Riemann aufgestellte Begriff der durch rationale Substitutionen in einander transformirbaren Gleichungen $F(s^n, z^m) = 0$ führt denselben zu solchen einer gegebenen Classe p angehörigen Gleichungen, für welche m und n den niedrigsten Werth haben, ohne dass die wesentlichen Constanten in ein gegenseitiges Abhängigkeitsverhältniss treten. Die Zahl derselben findet er $3p-3$. Für die der Classe angehörigen Gleichungen niedrigster Dimensionen $(p+1)$ hatte Cayley als Constantenanzahl $4p-6$ gefunden. Der Verfasser zeigt an einem Beispiel ($p=4$), dass die Anzahl der Constanten in beiden Fällen nicht verschieden sein kann. —

Nun hatten Casorati und Cremona für $p = 4, 5, 6$ die Transformation der einen Normalform in die andere behandelt. Die zweite Note enthält eine andere Begründung der von Cremona gegebenen Resultate. Es wird in derselben für $p = 6$ und $p = 7$ auf algebraischem Wege die Existenz solcher Transformations-Ausdrücke nachgewiesen, welche nur für resp. 4 und 5 Punkte der Curve Null und unendlich werden. No.

E. Isè. Nota sulla risultante di due equazioni. Battagl. G. VIII. 1-27. 1870.

Die Resultante R der Form $n$ten Grades

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

und der quadratischen Form

$$\psi(x) = b_0 - b_1 x + x^2$$

wird vom Verfasser nach Potenzen von b_0 entwickelt. Für die Coefficienten dieser Entwickelung lässt sich durch Einführung der „verkürzten" Polynome (polinomi desunti)

$$\varphi^{(m)} = a_m + a_{m+1} x + \cdots + x^{n-m} \quad (m = 1, 2 \cdots n)$$

ein einfaches Gesetz aufstellen. Bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$, so ist

$$(1.) \quad R = \prod_1^n{}_i (b_0 - \alpha_i [b_1 - \alpha_i]).$$

Daraus folgt, dass die Gleichungen $\varphi(x) = 0$ und $R(b_0) = 0$

bei unbestimmten b_1 die gleiche Anzahl verschwindender Wurzeln besitzen. Setzt man nun

$$(2.)\qquad R = P_0 + P_1 b_0 + \cdots + P_{n-1} b_0^{n-1} + b_0^n,$$

so ergeben sich mit Rücksicht auf vorstehende Bemerkung für die Coefficienten P Ausdrücke von folgender Form:

$$P_s = a_0 A_{s,0} + a_1 A_{s,1} + \cdots + a_s A_{s,s} \qquad (s = 0, 1 \cdots n-1),$$

worin die A linear in den a sind. Aus (1) erhält man unmittelbar P_0 oder

$$A_{0,0} = \varphi(b_1),$$

woraus folgt

$$A_{s,s} = \varphi^{(s)}(b_1);$$

ferner mit Hilfe der Identitäten

$$-\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \alpha_i} = \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_i}, \qquad \frac{\partial a_{z-1}}{\partial \alpha_i} = \alpha_i \frac{\partial a_z}{\partial \alpha_i} - a_z,$$

$$P_1 = a_1 \varphi^{(1)}(b_1) - a_0 \varphi^{1(1)}(b_1) \text{ u. s. w.}$$

Es ist allgemein (p. 12)

$$(3.)\qquad A_{s,s-k} = \frac{(-1)^k}{k!} \varphi^{(s-k)\,1\,(k)\,k-1}(b_1).$$

Hier beziehen sich die eingeklammerten Indices auf „Verkürzungen", die freistehenden auf Differentiirungen, welche in der angegebenen Ordnung auszuführen sind; es ist

$$\varphi^m(x) = \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m}.$$

Wir unterdrücken die Bemerkung, ob sich der vorstehende Ausdruck nicht einfacher vermittelst der bekannten Sätze über die Resultante zweier binärer Formen ableiten liesse. — Der Verfasser betrachtet ferner (p. 20 ff.) die Resultante der Form $\varphi(x)$ und einer cubischen Form $\psi(x)$ ebenfalls in der Gestalt (2). In diesem Falle bleiben die Indices in der Formel (3) erhalten; die Operationen sind jedoch andere geworden und an der Resultante $R(\varphi, \psi^{(1)})$ auszuführen.

Aus der Formel für P_s werden durch Vergleichung mit (1) die Ausdrücke in den Coefficienten a gewisser symmetrischen Functionen der Wurzeln α gefunden (p. 15), die auch bei Serret, Algèb. sup. I. p. 387, angegeben sind. — Auf p. 15 wird ein Ausdruck als Invariante der binären Formen 4. Grades behandelt, dem diese Eigenschaft nicht zukommt. St.

T. Vallès. Des formes imaginaires en algèbre. Götting. Anz. 1870. 877-880.

Anzeige des Buches durch Stern. No.

F. Guthric. On $\sqrt{-1}$. Phil. Mag. XXXIX. 1870.

Csy.

W. S. B. Woolhouse. On general numerical solution. Proc. of Lond. M. S. II. 75-84. 1869.

Aus $z = x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$ folgt, wenn man setzt

$$\omega = \frac{\sqrt{1+4c_2 z} - 1}{2c_2}; h_3 = \beta c_4, h_4 = \beta c_5, \cdots, \beta = \frac{1}{\sqrt{1+4c_2 z}}:$$

$$x = \omega - \omega^3 h_3 - \omega^4 h_4 - \omega^5 (h_5 - 3h_3^2) - \omega^6 (h_6 - 7h_3 h_4 + h_2 h_3^2)$$
$$- \omega^7 (h_7 - 8h_3 h_5 - 4h_4^2 + 2h_2 h_3 h_4 + 12h_3^3) - \cdots,$$

und wenn man $\mu = h_3 \omega^3 + h_4 \omega^4 + h_5 \omega^5 + \cdots$ annimmt:

$$x = \omega - \mu - h_2 \mu^2 + 3h_3 \mu \omega^2 + 4h_4 \mu \omega^3 + (5h_5 - 12h_3^2) \mu \omega^4 +$$
$$(6h_6 - 33h_3 h_4 + 9h_2 h_3^2) \mu \omega^5 + \cdots$$

oder für die Praxis hinreichend genau $x = \omega - \mu$. Es wird die Durchführung der Rechnung an einigen Beispielen erläutert; schliesslich folgt eine Bemerkung von A. de Morgan zu diesem Gegenstande. No.

H. Schramm. Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation. Brioschi Ann. (2.) III. 41-55. 1869.

Ueber den ersten Theil der Arbeit ist berichtet „Fortschritte d. Mathematik I. 32-33." In dem vorliegenden Abschlusse derselben werden zuerst Invarianten $J^{(r,s)}$ aufgestellt, welche verschwinden, wenn r Gruppen zu je s gleichen Wurzeln bestehen; dagegen nicht verschwinden, wenn die Zahlen r und s nicht mindestens erreicht sind. Drückt man die $J^{(r,s)}$ als Functionen der Wurzeldifferenzen aus, so sind von vornherein nur besondere Classen derselben zulässig; für diese werden die zwischen den Exponenten nothwendigen Beziehungen angegeben. In ähnlicher Weise wird der Fall behandelt, dass die Gleichung r Reihen von je 4 Wurzeln der Form $\alpha_1 = \alpha_2 = p + qi$; $\alpha_3 = \alpha_4 = p - qi$ habe. Endlich werden Anwendungen der Theorie auf Gleichungen vom fünften und siebenten Grade gegeben. No.

D. Regis. Sul numero delle radici reali che puo'avere l'equazione $x^m - px + q = 0$. Battagl. G. VIII. 226-228. 1870.

Die Gleichung $x^m - px + q = 0$ hat, bei endlichem p und q, 2 reale Wurzeln, wenn m gerade, 3 wenn m ungerade ist, sobald $\left(\frac{p}{m}\right)^m > \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}$; sie hat zwei gleiche Wurzeln, sobald $\left(\frac{p}{m}\right)^m = \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}$; sie hat für gerade m keine, für ungerade m eine reale Wurzel, sobald $\left(\frac{p}{m}\right)^m < \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}$. Der Beweis wird durch Betrachtung der realen Schneidepunkte der Curven $y = x^m + q$ und $y = px$ geliefert. S. Gauss Werke Bd. II.

No.

A. Poeschko. Auflösungsmethoden unbestimmter Gleichungen. Pr. St. Pölten. 1869.

Der Aufsatz giebt eine Zusammenstellung der bekannteren Auflösungs-Methoden. Er soll wahrscheinlich zur Einführung der Schüler in das Gebiet der unbestimmten Analytik dienen. No.

S. Roberts. On the order of certain systems of algebraical equations. Proc. of Lond. M. S. II. 8-20. 1869.

Sind $l+t$ Gleichungen mit l unabhängigen Veränderlichen gegeben, deren Coefficienten Functionen von k anderen Veränderlichen sind, so könnte man durch Elimination jener l Veränderlichen ein System von Gleichungen erhalten, dessen Ordnung leicht zu bestimmen wäre, wenn nicht durch die Elimination fremde Lösungen in dasselbe eingingen. Der Verfasser untersucht einige Systeme binärer Gleichungen und giebt deren reducirte Ordnung an. Sind z. B. $k+1$ lineare Gleichungen $a^{(\lambda)}x + b^{(\lambda)}y = 0$ gegeben, in denen $a^{(\lambda)}$ nach anderen Veränderlichen von der Ordnung p_λ und $b^{(\lambda)}$ von der Ordnung $p_\lambda + \alpha$ geordnet ist, dann ist die Ordnung des Systems gleich $\alpha^k + \alpha^{k-1}\sum_\lambda p_\lambda + \alpha^{k-2}\sum_{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu + \cdots$ Sind die Gleichungen in x und y vom Grade m_1, $m_2 \ldots$, also die λ^{te}:

$$a_0^{(\lambda)} x^{m\lambda} + a_1^{(\lambda)} x^{m\lambda-1} y + a_2^{(\lambda)} x^{m\lambda-2} y^2 + \cdots = 0,$$

ist ferner $a_0^{(\lambda)}$ vom Grade p_λ, und übertrifft der Grad von $a_{k+1}^{(\lambda)}$

den von $a_k^{(\lambda)}$ stets um α, so ist die Ordnung des Systems gleich

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{(\alpha m_1+p_1)(\alpha m_2+p_2)\ldots(\alpha m_{k+1}+p_{k+1})-p_1 p_2\ldots p_{k+1}}{\alpha}\right)$$

In ähnlicher Weise werden Systeme behandelt, welche mehrere gemeinsame Lösungen zulassen, doch würde es zu weit führen, hier auch nur die Resultate anzugeben. No.

A. S. Guldberg. Indledning in Arithmetik og Algebra. Christiania, Stensballe 1869.

H. Grassmann. Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. Grunert Arch. LI. 93-96. 1870.

Die allgemeine Gleichung wird auf die Form

$$(x^2+a)^2-b(x+c)^2 = 0$$

gebracht. No.

G. Janni. Metodo per calcolare con approssimazioni successive certe le radici reali dell' equazioni algebriche. Battaglini G. VIII. 157-160. 1870.

Setzt man in der bekannten, vielfach von Cauchy benutzten Gleichung $F(x) = F(a)+(x-a)\ F'[a+\theta(x-a)]$ für x eine Wurzel x_0 und für a die beiden Grenzen a_1 und b_1, wo $b_1 > x_0 > a_1$, so findet man als Näherungswerthe:

$$a_2 = a_1 - \frac{F(a_1)}{\varphi(b_1)-\psi(a_1)}; \quad b_2 = b_1 + \frac{F(b_1)}{\varphi(b_1)-\psi(a_1)};$$

oder $$a_2 = a_1 - \frac{F(a_1)}{\psi(b_1)-\varphi(a_1)}; \quad b_2 = b_1 + \frac{F(b_1)}{\psi(b_1)-\varphi(a_1)};$$

wobei $\varphi(x)$ sämmtliche positiven, $\psi(x)$ sämmtliche negativen Glieder von $F(x)$ enthält. No.

A. Ehrlenholtz. Ueber die Lösung der binomischen Gleichung. Pr. Celle 1869.

Die bekannten Sätze sind zusammengestellt und Beispiele gegeben. Mangelhaft ist, dass die Arbeit auf kein bestimmtes Publikum berechnet ist: Wer aus ihr etwas lernen kann, weiss nichts vom Sturm'schen Satze; wer etwas vom Sturm'schen Satze weiss, kann nichts aus ihr lernen. No.

W. Baur. Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear. Schlömilch Z. XIV. 130-140. 426-435. 1869.

Die behandelte Aufgabe lautet: Es soll eine Substitution $y_0 = a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n$ gefunden werden, derart dass vermöge derselben und der willkürlich vorgeschriebenen Substitutionen $y_\lambda = a_{\lambda 0}x_0 + \cdots + a_{\lambda n}x$, $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ der Ausdruck

$$F(x_0, x_1, \ldots x_n) = \sum_0^n{}^i x_i \sum_0^n{}^{ki} A_{ik}x_k, \quad (A_{ik} = A_{ki})$$

sich in den y darstellen lässt, ohne y_0 anders als in einem Gliede y_0^2 zu enthalten. Man findet $y_0 = \frac{1}{2}\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_0} a_{11} \ldots a_{nn}$. Im Nenner der x steht $a = \Sigma \pm a_{00} a_{11} \ldots a_{nn}$. Im zweiten Artikel wird der Fall behandelt, dass $a = 0$ ist. No.

Th. Koetteritzsch. Ueber die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen. Schlömilch Z. XIV. 1-15. 1869. XV. 229-268. 1870.

Um auf das System (1) $\sum_0^\infty{}^p f_0(m, p)x_p = \varphi_m, (m = 0, 1, \ldots \infty)$ die Regeln für die Lösung eines Systemes endlich vieler linearer Gleichungen mit endlicher Anzahl von Unbekannten x zu übertragen, wird dasselbe in

$$\begin{array}{r} f_0(0,0)x_0 + f_0(0,1)x_1 + f_0(0,2)x_2 + \cdots = \varphi_0 \\ f_1(1,1)x_1 + f_1(1,2)x_2 + \cdots = \varphi_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

verwandelt, so dass die Determinante $= f_0(0,0) f_1(1,1) \ldots$ ist. Die Lösungen erscheinen in der Form (2) $x_p = \sum_0^\infty{}^n F_0(p, n)\varphi_n$.

Setzt man nun z. B. $f_0(m, p) = \sin mp$, so erkennt man leicht die Anwendung auf Fourier'sche Reihen; ähnlich für Kugelfunctionen u. s. w. Die Systeme (1) und (2) sind invers: eins liefert die Lösungen des andern; ihre Determinanten sind reciprok. Es folgen Anwendungen auf besondere Gleichungsformen.

Bei den grundlegenden Sätzen geht Verf. von endlichen Systemen zu unendlichen über, ohne diesen Uebergang zu rechtfertigen. Daher ist die Gültigkeit der Sätze auch nur beschränkt. Beispielsweise

ändert sich bei endlichem Systeme das Verhältniss der Gleichungsanzahl zu der der Veränderlichen, wenn dem Systeme eine seiner Gleichungen zum zweiten Male hinzugefügt wird; bei einem unendlichen Systeme nicht, trotzdem wird die Determinante 0. — Der Satz. Art. 1. S. 2. „Sind sämmtliche Functionen $f_0(m, p)$ endlich, sämmtliche $\varphi_s = 0$, und die Determinante endlich und von 0 verschieden, so ist auch der Werth einer jeden Unbekannten 0“, ist unrichtig, wie das folgende Beispiel zeigen mag. Da $1 = \sum_1^\infty{}^p \frac{n}{(n+1)^p}$, $(n = 1, 2, \ldots \infty)$, so folgt, dass das System

$$(3.)\quad \begin{cases} 1x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2^2}x_3 - \frac{1}{2^3}x_4 - \cdots = 0 \\ \qquad 1x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3^2}x_4 - \cdots = 0 \\ \qquad\qquad 1x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \cdots = 0 \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots \end{cases}$$

die Lösungen $x_1 = x_2 = \cdots = a$, jeder beliebigen endlichen Zahl, hat, dass die x also nicht $= 0$ sind. Ebenso unrichtig ist es, dass ein solches System (1) eindeutig sei (Art. 2. S. 230). Dies zeigt sich, wenn man die erste Gleichung von (3) durch

$$2x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2^2}x_3 - \cdots = 1$$

ersetzt. Das neue System hat dann die Lösungen

$$x_2 = x_3 = \cdots = a, \quad x_1 = \frac{a+1}{2}.$$

No.

L. Zmurko. Studien im Gebiete mehrerer Gleichungen. Wien. Gerold 1870.

A. Cayley. Note on a System of Algebraical Equations. Quart. J. XI. 132-133. 1870.

Bemerkungen über ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten.

Kln.

K. Weihrauch. Untersuchungen über eine Gleichung ersten Grades. Dorpat. Diss. 1870.

ZIEGLER. Ueber das Zusammentreffen der graphischen mit der goniometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen. Hoffmann Z. I. 212-215. 1870.

Die bisher „nicht erkannte Nützlichkeit, Eleganz und Einfachheit beider Lösungen, besonders aber deren fast vollständige Jdentität“ wird an's Licht gezogen. No.

L. MATTHIESSEN. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung derselben zur directen Auflösung der quadratischen und kubischen litteralen Gleichungen. Schlömilch Z. XV. 41-47. 1870.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. p. 25.

S. GUNDELFINGER. Bemerkung zur Auflösung der kubischen Gleichungen. Clebsch Ann. III. 272-275. 1870.

Die Auflösung der kubischen Gleichungen wird in einer von der Cayley'schen etwas abweichenden Form gegeben, in der noch ein für den Werth der Wurzeln gleichgültiger, willkürlicher Parameter vorkommt. Kln.

B. TORTOLINI. Soluzione di un problema relativo alle equazioni di 3^0 e 4^0 grado. Atti d. Acc. dei Lincei. 1869.

Der Herr Verfasser stellt sich die Aufgabe, eine vollständige Gleichung 3ten Grades zu finden, deren letztes Glied die Discriminante einer allgemeinen Gleichung 4ten Grades darstellt. Ausgehend von der Betrachtung, dass die Discriminante einer Gleichung 4ten Grades nichts anderes ist, als das letzte Glied einer Gleichung, welche die Quadrate der Wurzeldifferenzen liefert, bildet er aus der vorgelegten Gleichung 4ten Grades eine gewisse reducirte Gleichung vom 3ten Grade, deren Wurzeln solche sind, dass die Gleichung aus den Quadraten der Wurzeldifferenzen dieser cubischen Gleichung die Gleichung ist, welche das Problem löst. Jg. (O).

A. Cayley. Note on the solution of the quartic equation $\alpha U + 6\beta H = 0$. Clebsch Ann. I. 54-55. 1869.

Bezeichnet U die Function $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ und H die Hesse'sche Determinante von U; I und J ferner die beiden Invarianten von U, dann sind drei Wurzeln von $\alpha U + 6\beta H = 0$, welche nicht zugleich $U = 0$ machen, in den Formen

$$\sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_1 J}, \quad \sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_2 J}, \quad \sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_3 J}$$

gegeben. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sind hierbei die drei Wurzeln der Gleichung $4J^2\omega^3 - I^3\omega - I^3 = 0$. No.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper 1870. Question 2. Messenger V. 184-186. 1870.

Wenn unter den Wurzeln $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ der Gleichung $(a,b,c,d,e)(u,1)^4 = 0$ nicht zwei gleich sind, und wenn es ungleiche Grössen θ, φ giebt, so dass

$$(\theta+\alpha)^4 : (\theta+\beta)^4 : (\theta+\gamma)^4 : (\theta+\delta)^4 = (\varphi+\alpha)^4 : (\varphi+\beta)^4 : (\varphi+\gamma)^4 : (\varphi+\delta)^4,$$

dann ist, wie bewiesen wird, die kubische Variante

$$ace - ad^2 - b^2e - c^3 + 2bcd = 0.$$

Die Werthe von θ, φ werden gebildet. Glr. (O.)

V. Janni. Decomposizione di un'equazione di 4° grado fra due variabili in due fattori razionali di 2°. Battagl. G. VII. 26. 1869.

Die „Descartes'sche Zerlegung" hätte der Titel einfacher lauten können. Neu nichts. No.

L. Schläfli. La risolvente dell' equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee. Brioschi Ann. (2) III. 171-174. 1869.

Um uns nicht in Formeln zu verlieren, geben wir nur die Resultate an.

Für $x^5 - 10\alpha x^3 - 10\beta x^2 - 5\gamma x - \delta = 0$ ist die Resolvente

$$\begin{vmatrix} A & H & G & \delta t \\ H & B & F & L \\ G & F & C & \beta \\ \delta t & L & \beta & \alpha \end{vmatrix} = 0, \text{ wobei}$$

$$A = 625t^6+25(-20\alpha^2+78)t^4+(100\alpha^4-45\alpha^2\gamma+31\gamma^2-25\,\alpha\beta^2-16\,\beta\delta)t^2$$
$$+(\alpha^2+\gamma)(5\alpha^2+\gamma)^2-\alpha\beta^2(40\alpha^2+28\gamma)+16\beta^4+2\beta\delta(\alpha^2-\gamma)+\alpha\delta^2,$$
$$B = 250\alpha t^2-25\alpha^3-10\alpha\gamma+16\beta^2,\ C = 25t^2+\alpha^2+\gamma,$$
$$F = -\alpha\beta-\delta,\ G = 25\alpha t^3+(-35^5\alpha^2-19\alpha\gamma+25\beta^2)t,$$
$$H = -25\beta t^3+(-15\alpha^2\beta+19\beta\gamma-24\alpha\delta)t,\ L = -25t^2-\gamma.$$

No.

T. N. Thiele. Lösning af Opgave 179. Tychsen Tidsskr. (2) V. 44. 1869.

Lösung einer Gleichung fünften Grades. Hn. (Wn.)

Sylow. Bemarkning om Kjendetegnet paa en algebraisk Lignings Oplóselighed ved Rodtegn, naad den erreduktibel og dens Grad er et Primtal. — Forh. v. d. Naturf. Christiania 257. 1869.

Ableitung zweier verschiedener, von Abel und Galois gefundener Ausdrücke für die Bedingungen, die erfüllt werden müssen, damit eine irreductible algebraische Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, durch Wurzeln lösbar sei. Hn. (Wn.)

C. F. Em. Björling. Om rötterna til algebraiska equationer Öfv. of Forh. Stockh. 1868. 241. Stockholm. 1869.

Siehe Grunert's Archiv 1868. Fortschr. d. Math. I. p. 297. Hn. (Wn.)

J. Petersen. Lösning af Opgave 124. Tychsen. Tidskr. (2) VI. 130. 1870.

A. F. Bing. Lösning af Opgave 124. Tychsen Tidskr. (2) VI. 131. 1870.

Es sollen x, y, z aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$x^2+yz = a,\ y^2+xz = b,\ z^2+xy = c.$$

Beide Autoren gelangen auf verschiedenen Wegen zu folgender Endgleichung für z:

$$8z^8-20cz^6-(2ab-18c^2)z^4-(a^3+b^3-5abc+7c^3)^6z^2+(ab-c^2)^2 = 0.$$

Hn. (Wn.)

A. S. GULDBERG. Om Ligningen af 5te Grad. Forh. af Christ. 1869. Christiania 1870.

Der Verf. giebt das Historische über die Gleichung fünften Grades und erwähnt dann, dass diese Gleichung auf die Form gebracht werden kann

$$x^5 + ax + b = 0.$$

Diese reducirte Form nimmt er zum Ausgangspunkt für die Berechnung der Wurzeln der Gleichung.

Setzt man

$$x = \frac{b}{a}y,\ \frac{a^5}{b^4} = -c,$$

so ist

$$y^5 - cy - c = 0,\ c = \frac{y^5}{1+y};$$

c ist somit eine Function von y, und für die umgekehrte Function $y = f(c)$ beabsichtigt der Verf. ein neues Zeichen einzuführen, für dieselbe eine genaue Tabelle zu berechnen und passende Reductionsformeln zu suchen. Hn. (Wn.)

T. N. THIELE. Nogle kritiske Bemarkninger. Tychsen Tidskr. (2) VI. 90. 1870.

Kritik der Arbeit von A. S. Guldberg über die Gleichung fünften Grades [Forh. af Christ. for 1869]. — Die Antwort von Guldberg findet sich p. 125. Hn. (Wn.)

J. J. WALKER. On the anharmonic-ratio sextic. Quart. J. X. 53-56. 1869.

Es wird die Gleichung 6ten Grades aufgestellt, welche die 6 anharmonischen Verhältnisse der Wurzeln einer Gleichung 4ten Grades bestimmt.

Bezeichnet I die quadratische, J die cubische Invariante und Δ die Discriminante der biquadratischen Gleichung, in der Weise dass

$$-27\Delta \equiv 4I^3 - J^2$$

ist, (so dass also der Factor $\frac{27}{16}$ mit J zusammengezogen ist), so ist die verlangte Gleichung

$$\Delta(A+1)^3 + I^3A^2 = 0,$$

wo $A = \lambda(\lambda - 1)$. Die Discriminante der Gleichung ist $\Delta . J^2 . I^6$.

He.

A. Cayley. Note. Quart. J. X. 56-57. 1869.

Kürzere Herleitung der obigen Gleichung von J. J. Walker. Schreibt man $-\lambda$ für λ und nimmt J in der gewöhnlichen Form, so dass $\Delta \equiv I^3-27J^2$, so heisst jene Gleichung

$$4\Delta(\lambda^2+\lambda+1)^3-27I^3\lambda^2(\lambda+1)^2=0.$$

He.

G. Jung ed A. Armenante. Sopra una equazione dell' 8° grado. Battagl. G. VII. 98-104. 1869.

Brioschi hatte in einer Mittheilung an das Jstituto Lombardo (Sopra le equazioni generali dell' ottavo grado che hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore, corrispondente alla trasformatione di settimo ordine delle funzioni ellittiche 1868), von der wir aus Mangel der betreffenden Litteratur im ersten Bande der Fortschr. nur den Titel hatten angeben können, die allgemeine Form der Gleichungen 8ten Grades aufgestellt, deren Wurzel durch

$$\sqrt{z_\infty}=A_0\sqrt{-7};\ \sqrt{z_s}=A_0+A_1\varrho^s+A_2\varrho^{4s}+A_3\varrho^{2s}, s=0,1,\ldots 6$$

repräsentirt werden, wenn $\varrho^7=1$ ist. Der vorliegende Aufsatz giebt eine einfache Ableitung der von Brioschi gefundenen Resultate.

No.

C. Jordan. Sur une équation du $16^{\text{ème}}$ degré. Borchardt J. LXX. 182-185. 1869.

Herr Kummer hat gezeigt, dass es Flächen 4ten Grades mit 16 singulären Punkten giebt, die je zu 6 auf einer Ebene liegen. Sind $e_{\lambda\mu}(\lambda=1\cdots 4,\ \mu=1\cdots 4)$ diese Ebenen, und bildet man

$$\varphi=\sum_{a,b}\frac{\prod\limits_{\lambda} e_{\lambda b}\ \prod\limits_{\mu} e_{a\mu}}{e_{ab}^2},$$

so enthält die Gruppe der Gleichung, deren Wurzeln die 16 Ebenen $e_{\lambda\mu}$ sind, 16. 15. 8. 6 Substitutionen, welche sämmtlich φ ungeändert lassen.

No.

H. Schwarz. Kritische Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Hoffmann Z. I. 132-156. 177-196. 1870.

Im ersten Theile wird eine Kritik der Werke von T. Müller, W. Gallenkamp, R. Baltzer, K. Koppe, C. A. Bretschneider in

Bezug auf die Grundlagen der algebraischen Zahlen und besonders auf die Einführung der negativen Grössen gegeben. Im zweiten Theile versucht der Verf. selbst eine Theorie aufzustellen. Die Hauptsätze in dieser Beziehung sind die folgenden: Die Einheit, in dem Sinne gedacht, dass sie zu einer Zahl hinzugefügt dieselbe um Eins vergrössert, heisst absolut. Die Vorzeichen + und — zeigen an, dass der Sinn der Einheiten unverändert beibehalten oder in den entgegengesetzten umgewandelt ist. Die positive Einheit ist einerlei mit der absoluten, die negative hat den gerade entgegengesetzten Sinn. Null ist Nichtgesetztsein der zu Grunde liegenden Einheit. Die Reihe der negativen Zahlen entsteht durch wiederholtes Setzen der negativen Einheit. No.

A. Cayley. A Note on his Memoir „On the condition for the existence of three equal roots, or of two pairs of equal roots of a binary quartic or quintic.“ Proc. of Lond. XVII. 314. 1869.

Bemerkung des Verfassers, dass der Titel der obigen Arbeit hätte heissen müssen: „On the conditions for the existence of certain systems of equal roots of a binary quartic or quintic.“

Cly. (M.)

George Biddel Airy. On the factorial resolution of the trinomial $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$. Trans. of Cambridge XI. (II). 426-443. 1869.

John Couch Adams. Note on the resolution of $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$ into factors. Trans. of Cambridge XI. (II). 444-445. 1869.

Der Verfasser kann nicht begreifen, dass eine Gleichung, welche ganz auf der Anwendung imaginärer Symbole basirt ist, den geringsten Anspruch auf den Charakter logischer Evidenz hat, und hält es für wünschenswerth, einen unabhängigen Beweis dafür zu geben. Er verweist in einem Zusatz auf die einfachere Lösung des H. Adams, als auf eine erfolgreiche Erledigung dieser Frage, und setzt seinen eigenen Beweis bei Seite, der in-

dessen doch nicht ohne Interesse sei, da er der erste Schritt in der Lösung des merkwürdigen Problems sei, indem er zeige, wie eine complicirte Lösung häufig einer einfachen vorangehe, und da einige im Laufe der Untersuchung beiläufig gewonnene Punkte nicht ohne Werth seien. Cly. (M.)

A. Vecchio. Sulle equazioni trascendenti. Battagl. G. VII. 42. 1869.

Der Verfasser beweist, dass die transcendente Gleichung

$$(e^z+e^{-z})\cos z - c = 0,$$

(vgl. Poisson, Traité de Mécanique, § 5, Ch. 8), für $c = 2$ keine imaginäre Wurzel hat. M.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

A. Clebsch. Zur Theorie der binären algebraischen Formen. Gött. Nachr. 405-409. 1870.*) Clebsch Ann. III. 265-267. 1870.

Sei $f(x_1 x_2) = f$ eine binäre Form n^{ter} Ordnung, ferner

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1\frac{df}{dx_1}+y_2\frac{df}{dx_2}\right),\quad \eta = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

dann kann man y linear durch ξ, η ausdrücken und erhält

$$f^{n-1}.f(y_1 y_2) = \xi^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi_2\xi^{n-2}\eta^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varphi_3\xi^{n-3}\eta^3 + \cdots$$

Sind nun in symbolischer Darstellung

$$\psi_1 = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2},\quad \psi_2 = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}, \ldots$$

die zu f gehörigen Covarianten, die in den Coefficienten f vom 2ten Grade sind, so kann man die Formen $\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ (und also

*) Grösserer Bequemlichkeit halber behalten wir bei allen hierhergehörigen Abhandlungen Eine Bezeichnungsart (die von Clebsch und Gordan) bei. No.

überhaupt alle Covarianten und Invarianten von f) rational durch f, die ψ und die Functionaldeterminanten der ψ gegen f ausdrücken, und zwar erscheinen dabei in den Nennern immer nur Potenzen von f. — Es folgen einige Bemerkungen über die Form der φ. No.

P. Gordan. Die simultanen Systeme binärer Formen.
Clebsch Ann. II. 227-281. 1870.

Alle simultanen Formen von

(1) $f_\lambda = (f_{\lambda_1} x_1 + f_{\lambda_2} x_2)^{n_\lambda} = f_{\lambda,x}^{n_\lambda}$, $(\lambda = 1, 2, \dots i)$,

sind nach Clebsch (Borchardt J. LIX.) darstellbar als Aggregate symbolischer Producte von der Form

(2) $R = f_{1,x}^{\alpha_1} f_{2,x}^{\alpha_2} \dots (f_1 f_2)(f'_1 f_3) \dots = r_{1,x} \cdot r_{2,x} \dots \Delta(R)$,

wo die $f_{\lambda,x}$ durch die $r_{\lambda,x}$ und das Product der Klammerfactoren $(f_\lambda f_\mu) = f_{\lambda_1} f_{\mu_2} - f_{\mu_1} f_{\lambda_2}$ durch $\Delta(R)$ vertreten wird. — Jede simultane Covariante (3) $\varphi = \varphi_x^\mu = s_{1x} s_{2x} \dots \Delta(\varphi)$ giebt, als neue Form angesehen, zur Einführung neuer Symbole Anlass. Enthält ein symbolisches Product R die Covariante φ und ist T das Product der Symbole, welche φ nicht enthalten, so wird $R = T\varphi_x^{p-\nu}(\varphi r_1)\dots(\varphi r_\nu)$. Durch νmaliges Differenziren von (3) entsteht, wenn $h = \frac{p!}{(p-\nu)!}$ ist,

(4) $R = \frac{1}{h} \Sigma T \Delta(\varphi)(s_{\alpha_1} r_1) \dots (s_{\alpha_\nu} r_\nu) s_{\alpha_{\nu+1} x} \dots s_{\alpha_p x} = \frac{1}{h} \sum_1^h {}_i Z_i$.

So ist R als Aggregat einfacherer Symbole Z_i dargestellt. Umgekehrt kann jedes symbolische Product als Aggregat von anderen mit weniger, aber verwickelteren Symbolen ausgedrückt werden. Aehnliches gilt für die Uebereinanderschiebungen

$$R = \varphi_x^{p-\nu} \psi^{q-\nu} (\varphi\psi)^\nu = \frac{(p-\nu)!(q-\nu)!}{p!q!} \cdot \Sigma Z_{ih},$$

d. h. für symbolische Producte, in denen nur die Covariante φ und ψ vorkommen.

Eine Anzahl Formen $A_1, A_2, \dots A_\varrho$ heisse Formensystem; es sei $S(A) = A_1^{\alpha_1} \dots A_\varrho^{\alpha_\varrho}$. Ein symbolisches Product R ist das wirkliche Product zweier anderer, wenn es sich so in zwei Factoren zerlegen lässt, dass die Klammerfactoren des einen kein Symbol des anderen enthalten. Giebt es in $[S(A)S(B)]^\nu$ ein so in Factoren

zerlegbares Glied, so heisst die Uebereinanderschiebung von der ersten Art; wenn nicht, von der zweiten. Die Kriterien hierfür werden gegeben. Die Uebereinanderschiebungen der ersten Art sind also in gewissem Sinne reducirbar, die der zweiten primitiv. Letztere bilden ein abgeschlossenes endliches combinirtes Formensystem. Wendet man die Combination von Systemen auf vollständige Systeme an, d. h. auf solche, bei denen alle durch Uebereinanderschiebung entstehende Formen sich als ganze Functionen der ursprünglichen ausdrücken lassen, so findet sich, dass neue vollständige Systeme entstehen. Damit ein System vollständig sei, genügt es, dass die Uebereinanderschiebungen je zweier Formen $(A^{(\lambda)} A^{(\mu)})^{\nu}$ in der Form $\Sigma c S(A)$ darstellbar sind. Die Frage nach der Ausscheidung der überflüssigen Formen bleibt in ihrer Allgemeinheit hier noch unbeantwortet. — Mit Hülfe dieser Entwickelungen werden für eine einzelne Form wie für mehrere Formen Systeme von Covarianten und Invarianten aufgestellt, durch die sich alle simultanen Covarianten und Invarianten der Form als ganze Functionen ausdrücken lassen. Setzt man nämlich die Formen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $f' = a_x'^{n-1} = \cdots$ als bekannt voraus, lässt die oberen Indices fort und multiplicirt mit $a_x b_x c_x \ldots$, so erhält man eine Reihe specieller Formen $A_1, A_2, \ldots$ von f; definirt man nun (der Einfachheit wegen sei n durch 4 theilbar)

$$K = (f_1 f)^{\frac{n}{2}}; \; \chi_1 = (f_1 f)^{\frac{n}{2}+2}, \chi_2 = (f_1 f)^{\frac{n}{2}+4}, \ldots,$$

endlich (abweichend von der Definition in Borchardt LXIX. Siehe Fortschritte d. M. I. 60) W als die symbolischen Producte, bei welchen ein jedes der darin enthaltenen Symbole $a, b, c, \ldots$ mindestens durch einen Factor $a_x, b_x, \ldots$ vertreten ist, welche ferner so beschaffen sind, dass mindestens einer der erwähnten Factoren $a_x, b_x, \ldots$, z. B. a_x in einer höheren als der $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt, so lassen sich alle Covarianten und Invarianten auf die Formen $\Sigma c S(A) + P(K, \chi)$ bringen. K selbst ist vom Grade n, besitzt also ein ähnliches System B, L, ψ entsprechend den A, K, χ.

Es folgen als Beispiele die Systeme der Formen vom

1ten, 2ten, ... 6ten Grade und die simultanen Systeme der Formen vom 2ten, 3ten und 4ten Grade, für welche die Systeme auf ihre reducirte Form gebracht sind. No.

Beltrami. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. Mem. di Bologna X. 1870.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3.

P. Gordan. Ueber ternäre Formen dritten Grades. Clebsch Ann. I. 90–128. 1869.

Sämmtliche zu

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x^n = b_x^n = \cdots = \alpha_x^n$$

„gehörigen Formen" (Covar., Invar., zugehörige Formen, Zwischenformen) sind als symbolische Producte

$$P = a_x b_x c_x \ldots (abu)(acu)(bcu) \ldots (abc)(abd)(acd) \ldots$$

darstellbar. (pqr) ist hier $= \Sigma \pm p_1 q_2 r_3$, und u_1, u_2, u_3 sind zu x_1, x_2, x_3 contragredient. Die Anzahl der a_x, b_x, ... heisse Grad, die Anzahl der (abu), (acu) ... Classe, die der a, b, c ... Ordnung, die Summe von Grad und Classe der Rang von P. — Ersetzt man in solchem symbolischen Producte F von der Ordnung $m-1$, λ Factoren a_x, b_x, c_x ... durch $(a\alpha u)$, $(b\alpha u)$ ..., ferner $\varkappa$ Factoren (abu), (acu) ... durch $(ab\alpha)$, $(ac\alpha)$ ... und multiplicirt die neue Form mit $\alpha_x^{n-\varkappa-\lambda}$, so erhält man „mittels einer Combination, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzt," eine Form P der Ordnung m. Umgekehrt kann man alle Producte P aus Producten F ableiten und weiter rückwärts zu denen der $m-2^{ten}$, $m-3^{ten}$, ... Ordnung gehen. Die Modularsysteme $(\varkappa, \lambda)$, bei denen $\varkappa + \lambda \leqq n$ sein muss, seien so geordnet, dass $(\varkappa', \lambda')$ dem $(\varkappa'', \lambda'')$ als niedriger voransteht, wenn $\varkappa' + \lambda' < \varkappa'' + \lambda''$ oder $\varkappa' + \lambda' = \varkappa'' + \lambda''$; $\varkappa' < \varkappa''$ ist. Die Formen m^{ter} Ordnung werden so geordnet, dass zuerst die Formen niederen Ranges, unter denen gleichen Ranges zuerst die niederen Modularsystems stehen, durch welche die P aus den F abgeleitet sind. Die in dieser Anordnung früher auftretenden Formen heissen frühere, die von gleichem Rang und gleichen $(\varkappa, \lambda)$ gleichzeitige. Da aber die Differenz zweier Formen φ_1 und φ_2, welche aus F mittels der Combinationen A_1 und A_2 von

gleichen Moduln entstehen, eine lineare Function $\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_i L_i \psi_i$ früherer Formen ψ derselben Ordnung ist, deren Coefficienten L die Variabeln u und x nur in der Verbindung u_x enthalten, so folgt, dass von gleichzeitigen Formen nur Eine beibehalten zu werden braucht, wenn man ihr Aggregate früherer Formen hinzufügen kann. Bezeichnet man also den Uebergang von $F = \varrho_x^p u_\sigma^q$ (Grad p, Classe q) in $\psi = \varrho_x^{p-\lambda} u_\sigma^{q-\varkappa} (\varrho a u)^\lambda a_\sigma^\varkappa a_x^{n-\varkappa-\lambda}$ als „Uebereinanderschiebung, welche die Moduln $\varkappa, \lambda$ besitzt," so ergiebt sich, dass alle Formen φ von der m^{ten} Ordnung als Aggregate

$$\psi + \Sigma L \psi' + \Sigma L M \psi''$$

darstellbar sind, wenn ψ', ψ'' frühere durch Uebereinanderschiebung entstandene Formen bedeuten. Nennen wir volles System von Formen der Ordnung m ein solches, durch welches alle Formen φ sich linear ausdrücken lassen, so bilden die ψ ein volles. Es brauchen die Uebereinanderschiebungen hierbei nicht auf alle Formen F der $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung angewendet zu werden, sondern nur auf volle Systeme $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung; ja man kann auf ein volles System $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung sogar beliebige Combinationen anwenden, um auf ein volles System m^{ter} Ordnung zu kommen, wenn nur jedem Modularsysteme Eine und nur Eine Combination entspricht. —

Ein System $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots$ heisst ein vollständiges, wenn alle Formen von f ganze Functionen der ϑ mit numerischen Coefficienten sind. Bildet man nun mit Hülfe eines der eben characterisirten Combinationssysteme die zu ϑ und den Producten und Potenzen der ϑ gehörigen Formen, und sind alle diese ganze Functionen der ϑ, so ist dies ein hinreichendes Zeichen, dass die ϑ ein vollständiges System bilden. Die Anzahl der Producte und Potenzen ist zwar unendlich gross, es lässt sich aber leicht ein endliches System derselben absondern, auf welches allein jener Nachweis der Darstellbarkeit angewendet zu werden braucht. Für ternäre cubische Formen wird dann ein System von 34 Formen ϑ aufgestellt, und der Nachweis der Vollständigkeit geliefert. No.

A. Clebsch und P. Gordan. Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. Clebsch Ann. I. 359-400. 1869.

Seien x_1, x_2, x_3 Punkt-, u_1, u_2, u_3 Linien-Coordinaten; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

symbolische Coefficienten, welche den ersten, a_1, a_2, a_3 solche, welche den zweiten cogredient sind; setzt man ferner

$$p_q = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3,$$

so ist der allgemeinste Ausdruck der zu behandelnden Formen $f = a_x^m u_\alpha^n$. Jede dem Formenkreise von f angehörige Gestalt kann als symbolisches Produkt folgender 8 Typen dargestellt werden (abu), (abc), $(\alpha\beta x)$, $(\alpha\beta\gamma)$, u_x, u_α, a_x, a_α.

Der erste Theil der Abhandlung ist dem der eben besprochenen durchaus parallel laufend, nur dass die Beweise durch die vermehrte Zahl der Typen eine etwas andere Gestalt annehmen. Für $m = 1$, $n = 1$ also $f = a_x u_\alpha$ enthält das vollständige System 7 Formen; diese sind $i = a_\alpha$, $f = a_x u_\alpha$, $i_1 = a_\beta b_\alpha$, $f_1 = a_x u_\beta b_\alpha$, $i_2 = a_\beta b_\gamma c_\alpha$, $\varphi = a_x c_x b_\alpha (\beta\gamma x)$, $\psi = u_\beta u_\gamma b_\alpha (acu)$. An Stelle der Invarianten i_1, i_2 und der Zwischenform f_1 werden andere Ausdrücke eingeführt

$$i' = \frac{i^2 - i_1}{2},\ i'' = \frac{i^3 - 3ii_1 + 2i_2}{6},\ g = f_1 - if + \frac{i^2 - i_1}{2} u_x$$

und mit Hülfe derselben das entsprechende Formensystem für die zusammengesetzte Function $F = \varkappa u_x + \lambda f + \mu g$ aufgestellt. Zwischen den 7 obigen Formen und u_x besteht eine einzige höhere Relation, enthalten in dem Satze, dass $\varphi . \psi$ die Determinante, in Bezug auf $\varkappa$, λ, μ gebildet, einer quadratischen Form ist. Setzt man

$$\Omega = \Sigma \frac{\partial^2 \varphi . \psi}{\partial x_h\, \partial u_h},\ \Omega' = \Sigma \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_h\, \partial u_h},\ \Omega'' = \Sigma \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x_h\, \partial u_h},$$

so ist ähnlich $\varphi . \psi + \frac{\varepsilon}{1} \Omega + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \Omega' + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} \Omega''$ die Hesse'sche Determinante, nach $\varkappa$, λ, μ gebildet, der quadratischen Form

$$2[p(f + i\varepsilon) + q(g + i'\varepsilon) + r(u_x + 3\varepsilon)].$$

Ω'' ist $= -6\, R$, wo R die Determinante einer cubischen Gleichung $\varDelta = 0$ ist; Ω' ist $= -2 R u_x$. Nach Betrachtung des Formensystems der cubischen Formen φ, ψ beschäftigt sich die Abhandlung mit der geometrischen Deutung der Form $f (m = 1, n = 1)$. Wird u als Veränderliche betrachtet, so stellt $f = 0$ einen Punkt y dar, der mit dem Punkte x_1, x_2, x_3 collinear verwandt ist. Man kann im allgemeinen f durch lineare Transformation in die Form $f = e_1 X_1 U_1 + e_2 X_2 U_2 + e_3 X_3 U_3$ bringen, während u_x im U_X übergeht. Die Gleichung $F = 0$ stellt die Gesammtheit aller colline-

aren Systeme mit gemeinsamem Fundamentaldreieck dar. Geht man nun von einem Punkte x zu y, betrachtet dann y als dem ersten Systeme angehörig und bestimmt den entsprechenden z, u. s. w., so liegen $x, y, z, \ldots$ auf einer transcendenten Curve. Es wird nun untersucht, unter welcher Bedingung $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ dieser Punkte auf einer algebraischen Curve liegen; dieselbe ergiebt sich als eine gewisse Invariantenbeziehung. Umgekehrt werden dann auch solche Invarianten-Relationen geometrisch in der angegebenen Weise gedeutet. — Zum Schluss werden die Ausnahmsfälle angegeben, welche dadurch entstehen, dass von den Wurzeln der cubischen Gleichung $\Delta = 0$, 2 oder 3 einander gleich werden.

No.

A. Clebsch und P. Gordan. Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen. Clebsch Ann. I. 57-89. 1869.

Brioschi hat in den C. R. 1863 eine typische Darstellung der ternären cubischen Formen gegeben. Hier wird eine ähnliche typische Darstellung entwickelt, indem Methoden auseinandergesetzt werden, alle zu jener Function gehörigen algebraischen Formen durch vier Covarianten und drei in Bezug auf die Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 lineare Zwischenformen auszudrücken. Um aber auch zugehörige Formen bequem und naturgemäss durch einfache zugehörige Formen darzustellen, wird ein zweites System gegeben, bei dem die Grundformen aus vier zugehörigen Formen und drei in Beziehung auf x linearen Zwischenformen bestehen. — Der Formelreichthum der Arbeit macht es uns unmöglich, diese Abhandlung ins Einzelne zu verfolgen, ohne bis zum Einzelnsten zu kommen. No.

A. Bessel. Ueber die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen. Clebsch Ann. I. 173-194. 1869.

Es werden für 2 quadratische Formen (§ 2), ebenso für 3 (§ 3), für eine quadratische und eine cubische (§ 4), für eine quadratische und eine biquadratische (§ 5—7) Invariantensysteme aufgestellt, durch die sich jede simultane Invariante in Form einer ganzen Function darstellen lässt. Die Methode ist die, dass

mittels einer Substitution mit dem Modul 1, $f = a_x^2$ in $2\,\alpha X_1 X_2$ umgewandelt wird und die Coefficienten der betreffenden anderen umgewandelten Formen $f' = a_x'^2$; $f'' = a_x''^3$; ... durch die einfachsten Invarianten ausgedrückt werden. Die beliebige Invariante $\varphi = \alpha^\nu \psi$ giebt dann durch Betrachtung der Ordnung und des Gewichts die Verbindungen, in denen allein die neuen Coefficienten in den ψ vorkommen, und dadurch den Ausdruck von ψ als Function jener Fundamentalinvarianten. No.

F. Harbordt. Das simultane System einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form. Clebsch Ann. I. 210-224. 1869.

Wie schon der Titel zeigt, ist der Gegenstand dem in den letzten Paragraphen der eben besprochenen Arbeit nahe verwandt. Die Resultate sind zum Theil dieselben. Ist $f = a_x^2$, $f' = a_x'^4$ und bildet man $\varphi = (a\,a')^2 a_x'^2$, $\varphi' = (\varphi\,a')^2 a_x'^2$, $\varphi'' = ..,..$ so wird gezeigt (wie auch bei Bessel), dass jede dieser quadratischen Covarianten durch 2 vorhergehende, die von ihr durch eine zwischenliegende getrennt sind, linear sich ausdrücken lässt. Dann folgen 2 typische Darstellungen von f; ferner nach der Behandlung der Ausnahmefälle die Aufstellung der Formen für $\varkappa f + \lambda \Delta$; endlich in kurzen Zügen eine Erweiterung auf ternäre Formen. No.

S. Gundelfinger. Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. Stuttgart. 1869.

Nach Vorausschickung einiger Definitionen werden die Formen durch 7 directe und 3 windschiefe Invarianten rational ausgedrückt, von denen die Quadrate und Producte von je zweien der letzteren sich als ganze Functionen der 7 ersteren darstellen lassen. Darauf werden die Invarianten und Covarianten behandelt, welche entstehen, wenn die cubische Grundform durch eine lineare Combination derselben mit ihrer cubischen Covariante ersetzt wird; ebenso wenn an die Stelle der biquadratischen Grundform eine lineare Combination derselben mit ihrer Hesse'schen

Determinante tritt. Es folgt eine Digression über die ternären Formen dritten Grades, in welcher die analogen Formeln aus diesem Gebiete abgeleitet werden, wie sie zuerst von Aronhold (Borchardt J. LV. S. 191) aufgestellt sind. Schliesslich wird ein von Clebsch für dieses System aufgestelltes volles Formensystem mitgetheilt, welches aus 1 Cov. 6ten, 2 Cov. 5ten, 5 Cov. 4ten, 8 Cov. 3ten, 12 Cov. 2ten, 16 Cov. 1ten Grades und aus 20 Inv. besteht, und es werden volle Systeme angegeben, bei denen die cubische, bezüglich die biquadratische Grundform in der oben erwähnten Art durch eine lineare Combination u. s. w. ersetzt ist.

No.

A. Clebsch. Zur Theorie der binären Formen 6ten Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. Göttingen. Dieterich. 1869. Clebsch Ann. II. 193-197. 1870.

Die Gleichung, von welcher die Lösung der Aufgabe $f = u^3 - v^2$ abhängt, ist vom 40ten Grade, und stimmt mit derjenigen überein, welche C. Jordan bezüglich der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) gefunden hatte. Geht man von einer Lösung $u^3 - v^2$ aus, so theilen sich die übrigen $u'^3 - v'^2 = u^3 - v^2$ in zwei Klassen; die der ersten sind derart, dass

$$v + v' = (\xi - \varepsilon\eta)(u - \varepsilon u'), \quad v - v' = (\xi - \varepsilon^2\eta)(u - \varepsilon^2 u')$$

ist, während bei der zweiten kein Factor von $v^2 - v'^2$ einen von $u^3 - u'^3$ ganz enthält. Die Lösungen der ersten Klasse führen auf das Hülfsproblem $2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^2$, welches durch lineare Ausdrücke ξ, η identisch zu erfüllen ist. Man gelangt hierbei zu einer Hesse'schen Gleichung 9ten Grades. Jeder Lösung ξ, η entsprechen drei Lösungen des Problems, so dass alle Lösungen erster Klasse in 9 Tripel zerfallen. Es werden die Gleichung 9ten Grades, die 12ten Grades, von welcher die Lösung der ersteren abhängt, und die 3ten und 4ten Grades, durch welche die Lösung erfolgt, aufgestellt. Drei Lösungen des Problems, deren 2 aus der dritten mittels derselben Wurzel der biquadratischen Gleichung gefunden werden, heissen conjugirt. Sie bleiben conjugirt, von welcher der drei man auch ausgeht. Die Wurzeln eines Tripels vorausgesetzt, ordnen sich die jedes der 8 übrigen Tripel den-

selben eindeutig zu. Die Lösung der Hesse'schen Gleichung kann mit den Vorstellungen in Beziehung gesetzt werden, welche das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung giebt. Es entsprechen conjugirten Lösungen Wendepunkte einer Geraden, der biquadratischen Gleichung die 4 Wendepunktdreiecke, der cubischen Gleichung die Seiten eines der Wendepunktdreiecke. Der Lösungen zweiter Klasse sind 12; sie entsprechen den 12 Ecken der Wendepunktsdreiecke. — Legt man statt u, v eine andere Lösung u', v' zu Grunde, so ergiebt sich eine Reihe von Sätzen, wie z. B. dass u, v erster Klasse in Bezug auf u', v' ist, wenn es u', v' in Bezug auf u, v war, u. s. w. Geht man nun von u, v aus, so kommt man zu drei entsprechenden $u'v'$, $u'_1 v'_1$, $u'_2 v'_2$ und erhält ein Quadrupel, welches dadurch charakterisirt ist, dass, wenn man irgend eine zum Ausgangspunkt wählt, die 3 andern ein zugehöriges Tripel erster Klasse bilden. Es giebt 90 solche Quadrupel; und zugleich für jedes 4 Lösungen, welche bei allen Anordnungen 2[ter] Klasse bleiben. Solcher Quadrupelpaare giebt es also 45, und es ist auf 27 Arten möglich, die 40 Wurzeln in 5 Quadrupelpaare zu ordnen. No.

A. Clebsch. Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren. Clebsch Ann. II. 373-382. 1870.

„Für Formen ungerader Ordnung folgt die Möglichkeit der linearen Ueberführung aus der Gleichheit der absoluten Invarianten immer, sobald für die beiden verglichenen Formen zwei Paare entsprechender von Null verschiedener linearer Covarianten existiren, welche nicht nur um einen constanten Factor verschieden sind.“

„Für Formen gerader Ordnung folgt jene Möglichkeit aus der Geichheit der absoluten Invarianten immer, sobald für die beiden verglichenen Formen zwei Paare entsprechender, von Null verschiedener quadratischer Covarianten bestehen, welche keinen gemeinschaftlichen linearen Factor besitzen.“

In beiden Fällen werden die Transformationsformeln sogleich gegeben.

Sind bei Formen fünfter Ordnung (siehe Fortschr. I. 58)

$$A = \frac{1}{2}(ii')^2,\ B = \frac{1}{2}(i\tau)^2,\ C = \frac{1}{2}(\tau\tau')^2,\ R = \frac{1}{2}(i\alpha)(i\gamma)$$

die 4 Invarianten, so folgt:

„Formen fünfter Ordnung mit identischen absoluten Invarianten sind stets linear in einander überführbar, sobald nicht gleichzeitig B und C oder $B - \frac{A^2}{3}$ und $C - \frac{A^3}{9}$ verschwinden."

Für Formen sechster Ordnung sei $f = a_x^6 = b_x^6 = \cdots$; $k = 3(ab)^4 a_x^2 b_x^2 = k_x^4$; $l = (ka)^4 a_x^2$, $m = (kl)^2 k_x^2$, $n = (km)^2 k_x^2$; $A_{ll} = \frac{1}{2}(ll')$, $A_{mm} = \frac{1}{2}(mm')^2$, $A_{lm} = \frac{1}{2}(lm)^2$; $R = -\frac{1}{2}(lm)(mn)(nl)$. Dann ist das Nichtverschwinden von R, und von $A_{ll} A_{mm} - A_{lm}^2$ die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Transformation.

No.

G. Battaglini. Sulle forme ternarie quadratiche. Battaglini G. VIII. 38-59. 129-156. 1870.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der geometrischen Darstellung ternärer quadratischer Formen. Seien (s_1, s_2, s_3) und (S_1, S_2, S_3) zwei Systeme von Veränderlichen; jedes Verhältniss $s_1 : s_2 : s_3$ oder $S_1 : S_2 : S_3$ heisse Element s oder S mit den Coordinaten (s_1, s_2, s_3) oder (S_1, S_2, S_3); endlich gelte die Gleichung $s_1 S_1 + s_2 S_2 + s_3 S_3 = 0$. Zwei quadratische Formen U und u heissen conjugirt, wenn

$U = \Sigma A_{ij} s_i s_j$, $u = \Sigma a_{ij} S_i S_j$ $(i, j = 1, 2, 3;\ A_{ij} = A_{ji};\ a_{ij} = a_{ji})$.

Die s und S können nun entweder als Gerade und Ebenen betrachtet werden, welche durch einen Punkt gehen, oder als Gerade und Punkte, die auf einer Ebene liegen. Die Systeme U und u bilden im ersteren Falle einen Kegel zweiter Ordnung, im letzteren einen Kegelschnitt: im ersteren Falle der Ort der Geraden oder die Eingehüllte der Ebenen, im zweiten der Ort der Punkte oder die Eingehüllte der Geraden. Betrachten wir den ersten Fall, so sind zwei Gerade, bezüglich zwei Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen, harmonische Elemente. Es wird nun die Bedeutung der in der Theorie der ternären quadratischen Formen her-

vortretenden arithmetischen Grössenverbindungen untersucht, und in dieser Art werden die Invarianten, die Covarianten und Contravarianten vom zweiten und von höheren Graden behandelt. Ebenso werden die Curvenbüschel (serie di quadriche, semplice et di primo grado) $U = \sigma' U' + \sigma'' U''$ und $u = \Sigma' u' + \Sigma'' u''$ einer näheren Betrachtung unterzogen, und ihre harmonischen und äquiharmonischen Eigenschaften untersucht. No.

P. GORDAN. Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. Borchardt J. LXXI. 164-194. 1870.

Um die homogene Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ durch

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{m}{l} = -\frac{m_1 x_1^{n_1} + m_2 x_1^{n_1-1}.x_2 + \cdots}{l_1 x_1^{n_1} + l_2 x_1^{n_1-1}.x_2 + \cdots}$$

zu transformiren, bildet man die Resultante $R_{f\varphi}$ aus $f = 0$ und $\varphi = \varphi_x^n = \varphi_1 x_1^{n_1} + \varphi_2 x_1^{n_1-1}.x_2 + \cdots = lz_1 + mz_2$. Es soll nun untersucht werden, wie die Invarianten der Form f, (J_f) sich zu denen der transformirten Form R (J_R) verhalten; insbesondere sollen die J_R durch die einfachsten simultanen Invarianten von f und φ dargestellt werden. Setzt man $l(x)m(y) - m(x)l(y) = \theta(xy)$, so sind die J_R simultane Invarianten von f und $\theta(xy)$.

Setzt man ferner $\vartheta_\nu = \vartheta_{x,\nu}^{2\mu} = (lm)^{2\nu+1}.lx^\mu mx^\mu$, so kann die Covariante $\theta(xy)$ auf die Form gebracht werden

$$\theta(xy) = \Sigma_\nu C_\nu (xy)^{2\nu+1} \vartheta_{x,\nu}^\mu \vartheta_{y,\nu}^\mu,$$

wobei die C_ν numerische Constanten bedeuten und $\mu = n_1 - (2\nu + 1)$ ist; es sind also die J_R simultane Invarianten von f und den ϑ_ν. Der Ausdruck $R_{f\varphi} - n_1^{\frac{n\nu}{2}} R_{f\vartheta}^{\frac{\nu}{2}} J_f$ ist eine lineare Function solcher Combinationen der Substitutionscoefficienten, welche verschwinden, wenn l und m einen Factor $n_1 - 1^{\text{ter}}$ Ordnung gemein haben.

Die Discriminante hat die Form $\Delta_R = C\Delta_f \Phi^2$ wobei

$$\Phi = \Pi_{ik} \theta'(x_i x_k).$$

Das Product Φ zerfällt, wenn man in demselben die Coefficienten von l und m als Veränderliche betrachtet, in $\frac{n(n-1)}{2}$ Factoren $\theta'(x_i x_k)$, deren jeder einem Wurzelpaare $x_i x_k$ der Gleichung $f = 0$

entspricht. Es giebt eine (unendlich grosse) Schaar von Formen l, m, für welche ein bestimmter Factor $\theta'(x_i x_k)$, verschwindet. Jst nun ein Formenpaar $l = L$, $m = M$ der betreffenden Schaar gegeben, so kann x_i, x_k durch eine quadratische Gleichung bestimmt werden. Nimmt man also ein Formenpaar $l = L_1$, $m = M_1$, welches zu x_i, x_l gehört, so kann man x_i rational durch L, M; L_1, M_1 ausdrücken und in ähnlicher Weise alle Wurzeln der Gleichung erhalten. — Wird φ quadratisch, so vereinfachen sich die erhaltenen Resultate. Es wird die Methode von Clebsch (Borchardt J. LVIII. 273) reproducirt, welcher $R_{f\varphi}$ durch die symbolischen Coefficienten von f und φ ausgedrückt hat. Die Invarianten J_R sind simultane Invarianten der beiden Formen f und $(lm)\, l_x m_x = \vartheta$ (Functionaldeterminanten von l und m). Bezeichnet man $(lm)^2 = A_{lm}$, so wird hier $J_K = 2^{\frac{n\nu}{2}} R_{f\vartheta}^{\frac{\nu}{2}} J_f + A A_{\vartheta\vartheta}$, ferner wird $\Phi = \Pi_{ik} 2 \vartheta x_i \vartheta x_k$. In der dritten Abtheilung werden die Ergebnisse der beiden ersten auf specielle Formen, die Discriminanten der quadratischen und cubischen, die einfachsten Covarianten und Invarianten der biquadratischen Formen angewendet. Schliesslich werden quadratische Substitutionen angegeben, durch welche die eine oder die andere der transformirten biquadratischen Invarianten J_R oder I_R den Werth Null annimmt. No.

A. Clebsch. Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. Clebsch Ann. III. 263-264. 1870.

Damit eine gegebene binäre biquadratische Form sich als ganze Function einer gegebenen quadratischen Form und einer anderen quadratischen darstellen lasse, muss die alternirende simultane Invariante der gegebenen beiden Formen verschwinden, und ist dies auch umgekehrt die hinreichende Bedingung.

Kln.

A. Cayley. Note on the theory of Invariants. Clebsch Ann. III. 268-271. 1870.

Damit zwei algebraische Formen durch lineare Transformation in einander übergeführt werden können, ist die Gleichheit

ihrer absoluten Invarianten nothwendig, aber noch nicht in allen Fällen hinreichend. Man weiss nur aus einem Aufsatze von Clebsch (Clebsch Ann. II. siehe p. 67), dass, für binäre Formen, die Gleichheit der absoluten Invarianten die hinreichende Bedingung für die Transformirbarkeit ist, sobald es für die beiden binären Formen Paare entsprechender linearer oder quadratischer Covarianten mit nicht verschwindender Resultante giebt. Der Verfasser erläutert nun an einem Beispiele (einer binären Form 6ten Grades mit einem dreifachen Elemente), dass es in der That Fälle geben kann, wo die Gleichheit der absoluten Invarianten nicht ausreicht, und bemerkt sodann, dass die Abweichung seiner Zählung der Moduln einer Classe ternärer algebraischer Formen von der Riemann'schen auf einen Umstand dieser Art zurückzuführen ist. [Cayley hatte für die Zahl der Moduln nicht $3p-3$, sondern $4p-6$ gefunden. (Proc. Lond. Math. Soc. I, 3. Oct.) Die Richtigkeit der Riemann'schen Zahl ist in besonderen Fällen bereits von Brill (Clebsch Ann. I, 401, II, 417 siehe p. 43) und von Casorati und Cremona (Rend. d. Ist. Lomb. (2) II, 1869) nachgewiesen worden.] Kln.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper 1869. Question 9. Messenger V. 53-55. 1869.

Wenn in einer Covariante einer binären Form $(a, b, c, \dots k)(x, y)^n$ die Coefficienten $a, b, \dots k$ ersetzt werden durch $ax+by$, $bx+cy, \dots kx+ly$ respective, dann ist das Resultat eine Covariante der nächst höheren Form $(a, b, c, \dots l)(x, y)^{n+1}$. Die Covariante, welche durch dies Verfahren aus der Discriminante der cubischen Form $(a, b, c, d)(x, y)^3$ erhalten wird, ist $=$
$(ae-4bd+3c)\ [(ac-b^2)x^4+\text{etc.}]$

$$-(ace-ad^2-b^2e-c^3+2bcd)(a, b, c, d, e)(x, y)^4,$$

wo $(ac-b^2)x^4+\text{etc.}$ die Hessische Determinante der Function $(a, b, c, d, e)(x, y)^4$. Glr. (O.)

W. Snow Burnside. On the Invariants and Covariants α, a of a Binary Quartic considered Geometrically as a system of Two Ternary Quadrics. Quart. J. X. 211 bis 219. 1869.

Setzt man $y^2 = X, \quad x^2 = Y, \quad 2xy = Z$

so tritt an Stelle der binären Form 4ter Ordnung $f=(a, b, c, d, e)(x, y)^4$ das System der beiden ternären quadratischen Formen

$$U = eX^2 + aY^2 + cZ^2 + 2bYZ + 2dZX + 2cXY$$
$$V = Z^2 - 4XY \equiv 0.$$

Dadurch ergiebt sich für die Theorie der binären Formen 4ter Ordnung folgende geometrische Interpretation. — Die Diskriminante von $U-\lambda V$ ist die cubische Resolvente von f: $4\lambda^3 - I\lambda + J$. — Der harmonische Kegelschnitt zu $U=0$ und $V=0$ d. i. die Covariante F der Formen U, V (cf. Salmon. Algebra, p. 223) entspricht der Hesse'schen Form von f. — Die Tangenten an $V=0$ in den Schnittpunkten mit $U=0$ führen auf die Cayley'sche Darstellung der Quadrate der Linear-Factoren von f. — Die kanonischen Formen von f werden durch simultane lineare Transformationen von U, V abgeleitet. — Indem die Jacobi'sche Determinante von U, V, F die Gleichung der Seiten des gemeinsamen Polar-Dreieckes von $U=0$, $V=0$ darstellt, ergiebt sich für das Quadrat der derselben entsprechenden Covariante 6ter Ordnung T von f der bekannte Ausdruck in i, j, H, f. — Einer gewöhnlichen, doppelten, dreipunktigen Berührung von $U=0$, $V=0$ entsprechen beziehentlich ein doppelter, zwei doppelte, ein dreifacher Factor von f. — Das Doppelverhältniss der 4 Berührungspunkte an $V=0$, der gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte $U=0$, $V=0$ ist gleich dem Doppelverhältniss der 4 Punkte $H=0$. —

In derselben Art kann die Theorie eines Systemes zweier binären Formen von 2ter und 4ter Ordnung an die Betrachtung von zwei Kegelschnitten und einer Geraden geknüpft werden. So findet man aus der Gleichung der Schnittpunkte von $U=0$, $V=0$ in Liniencoordinaten (Salmon a. a. O.) einen bekannten Ausdruck für die Resultante der genannten binären Formen u. s. f.

St.

P. Gordan. Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante R einer Form n^{ten} Grades und einer Form m^{ten} Grades genügt. Gött. Nachr. 1870. 427.

Seien f_1 und f_2 die beiden Formen bez. vom n^{ten} und m^{ten} Grade, $n \geqq m$, und R ihre Resultante. Bezeichnet man dann mit

$E o R$ die Evectante von R (vgl. Salmon: Introduction L. XII), und mit ϱ eine simultane Covariante von f_1 und f_2, deren Grad μ nicht grösser als n ist und welche die gemeinsamen Factoren von f_1 und f_2 ebenfalls besitzt, so ist die Uebereinanderschiebung $(E o R, \varrho)^\mu$ eine durch R theilbare Covariante. Hieraus folgen $n-\mu+1$ partielle Differentialgleichungen für R. Für gewisse Covarianten ϱ ist es möglich, Differentialgleichungen abzuleiten, mit deren Hülfe R als ganze Function des Systems der simultanen Invarianten von f_1 und f_2 ausgedrückt wird. Geht f_2 in die Ableitung von f_1 über, so erhält man gleiche Resultate für die Discriminante von f_1. No.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, Invarianten, Covarianten, symmetrische Functionen.

Rosanes und Pasch. Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. Borchardt J. LXX. 169-175. 1869.

Die geometrischen Probleme gehören zu der sogenannten „Schliessungsaufgabe;" die algebraische Aufgabe ist folgende. Es sei

$$f(t_0 t_1) = a t_0^2 t_1^2 + 2b t_0 t_1 (t_0 + t_1) + c(t_0 + t_1)^2 + 2d t_0 t_1 + 2e(t_0 + t_1) + f = 0.$$

Durch diese Gleichung bestimmt man t_1 aus t_0, dann durch $f(t_1 t_2) = 0$ weiter t_2 (verschieden von t_0) aus t_1, u. s. w. $t_3, t_4, \dots t_n$. Es soll nun diese Reihe derart geschlossen sein, dass $t_{n+\lambda} = t_\lambda$. Man findet, dass eine Bedingung dazu ausreicht $q_n = 0$. Da q von t_0 unabhängig ist, so ist die Reihe entweder bei beliebigem Werthe t_0 oder überhaupt nicht geschlossen. Man hat für gerade n die Gleichungen

$$q_{n-2} q_{n+2} + q_{n-1} q_{n+1} = \sigma q_n^2; \; q_{n-1} q_{n+2}^2 + q_{n+2} q_{n-1}^2 = q_n(\lambda q_n^2 + 2\delta q_{n-1} q_{n+1})$$

und für ungerade n die folgenden

$q_{n-2}q_{n+2}+\lambda q_{n-1}q_{n+1}=\sigma q_n^2$; $q_{n-2}q_{n+1}^2+q_{n+2}q_{n-1}^2=q_n(q_n^2+2\delta q_{n-1}q_{n+1})$;

hierbei ist $\lambda = 4\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$; $\sigma=\delta^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial d}+\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial c}$; $\delta = d-c$;

$q_0=0$, $q_1=q_2=1$, $q_3=\sigma$. No.

F. Brioschi. Des substitutions de la forme $\theta(r)\equiv\varepsilon(r^{n-2}+ar^{\frac{n-3}{2}})$ pour un nombre premier de lettres. Gött. Nachr. 1869. Clebsch Ann. II. 467-470. 1870.

Bildet man $\theta^m\equiv\varepsilon^m[L_m r^{2\mu-m}+aM_m r^{\mu-m}]$, wobei $\mu=\frac{n-1}{2}$, und setzt $M_\mu=0$, $L_\mu=\varepsilon^\mu$, so ist $\theta(\theta)\equiv r$ und $\theta_\mu=r^\mu$. Substitutionen von der Form θ können nur dann conjugirte Substitutionen sein, wenn $n=7$ oder $n=11$ ist. Im ersteren Falle hat man ein System von 4. 6. 7 Substitutionen, und die für dieses System unveränderlichen Functionen können nur 30 Werthe annehmen; für $n=11$ erhält man ein System von 6. 10. 11 conjugirten Substitutionen, und eine Function von 11 Buchstaben, die für dieses System unveränderlich bleibt, kann also nur 60480 Werthe haben. No.

A. Cayley. On a Problem of Elimination. Quart. J. XI. 99-102. 1870.

Soll in dem Büschel von Curven k^{ter} Ordnung

$$\text{(a)}\qquad \lambda P+\mu Q=0$$

eine vorhanden sein, welche durch zwei Durchschnittspunkte der Curven $U=0$, $V=0$ hindurchgeht, so muss offenbar die Discriminante der Resultante $(\lambda P+\mu Q,\ U,\ V)$ genommen nach λ, μ verschwinden. Dieselbe ist eine Combinante der Formen P, Q (d. h. ändert sich nicht, wenn P, Q durch lineare Functionen derselben ersetzt werden) und zerfällt in zwei Factoren, deren einer $=0$ gesetzt die Bedingung ausdrückt, dass die Curven $U=0$, $V=0$ sich berühren. Hr. Cayley ist der Ansicht, dass der andere Factor ein Quadrat Ω^2 sei, so dass Ω in Beziehung auf die Coefficienten von U, V bez. von den Graden

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)k(2m-1)+\tfrac{1}{2}(k-1)n(n+2m-3),$$
$$\tfrac{1}{2}m(m-1)k(2n-1)+\tfrac{1}{2}(k-1)m(m+2n-3),$$

in Beziehung auf die aus den Coefficienten von P, Q gebildeten zweigliedrigen Determinanten vom Grade $\frac{1}{2}mn(mn-1)$ sein müsste. $\Omega = 0$ ist dann die genaue Bedingung dafür, dass auf einer Curve des Büschels (a) zwei Durchschnittspunkte $U = 0$, $V = 0$ liegen. Für $k = 1$ erhält man hieraus die Bedingung dafür, dass der Punkt $P = 0$, $Q = 0$ mit zweien dieser Durchschnittspunkte in gerader Linie liege.

St.

A. Cayley. Note on the Discriminant of a binary Quartic. Quart. J. X. 23. 1869.

Die Discriminante ϑ von $(a, b, c, d \dots)(t, 1)^n$ ist wie bekannt von der Form $Ma + Nb^2$. Wenn jedoch $b = 0$, so hat man $a(Ma + Nc^3)$, wenn $b = 0$, $c = 0$, $a^2(Ma + Nd^4)$ u. s. w. bis nur die beiden letzten Coefficienten nicht $= 0$ gesetzt sind.

He.

S. Roberts. On the Degree of the Discriminant with respect to a Parameter in certain cases. Quart. J. X. 204-210. 1869.

Der Verfasser bestimmt den Grad der Discriminante der Form $U + kV$ für den Fall, dass U oder V, oder beide, in Factoren aufbrechen. U und V bedeuten hier homogene Functionen von 2, 3 oder 4 Veränderlichen und vom Grade n.

Brechen U und V auf in den Formen

$$U = \varphi_1^{a'}, \; \psi_1^{b'}, \; \chi_1^{c'}, \dots; \quad V = \varphi^a \varrho \psi^b \chi^c \dots,$$

und sind A, B, $C \dots$ die Ordnungen von φ, ψ, $\chi \dots$, A_1, B_1, C_1, ... die von φ_1, ψ_1, χ_1, ..., wo

$$\Sigma a A = \Sigma a' A_1 = n,$$

so hat man für zwei Veränderliche den Grad der Discriminante

$$= \Sigma A + \Sigma A_1 - 2,$$

für drei Veränderliche

$$= (\Sigma A + \Sigma A_1 - 2)^2 - (\Sigma A - 1)(\Sigma A_1 - 1) - \Sigma AB - \Sigma A_1 B_1.$$

Hierbei sind die vielfachen Wurzeln $k = 0$ und $k = \infty$ ausgeworfen.

Die Formeln für 4 Veränderliche werden complicirter. Zum Schluss werden einige Erweiterungen angedeutet, die sich theils

auf eine grössere Anzahl von Veränderlichen, theils auf die Form

$$k^m U_0 + k^{m-1} U_1 + \cdots + U_m$$

beziehen. He.

G. Bauer. Von der Zerlegung der Discriminante der kubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche 2ter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten. Borchardt J. LXXI. 40-45. 1870.

Die Zerlegungen dieser Discriminante, welche von Kummer (Crelle J. XXX. p. 46.) und von Borchardt (Liouville J. XII. p. 66) angegeben worden sind, werden direct aus der Determinanten-Form derselben abgeleitet. — Auch ist gezeigt, in welcher Art die einzelnen Quadrate dieser Umformungen für eine Rotations-Fläche verschwinden. St.

Henrici. On certain formulae concerning the theory of discriminants; with applications to discriminants of discriminants, and to the theory of polar curves. Proc. Lond. M. S. II. 104-116. 1869.

Wir bezeichnen $f(y) = a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0$. Ξ sei die Discriminante von f; die a sind Functionen von x. Ferner sei

$$\Xi' = \frac{\partial \Xi}{\partial x}; \quad \Xi_k = \frac{\partial \Xi}{\partial a_k}, \quad \Xi_{ki} = \frac{\partial^2 \Xi}{\partial a_k \partial a_i} \cdots; \quad (s_i t_k \ldots) = \sum_{i,k\ldots} s_i t_k \ldots$$

Wenn $x = \xi$ eine Wurzel von $\Xi = 0$, und $y = \eta$ die entsprechende Doppelwurzel von $f(y) = 0$ ist, gilt die Formel

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial a_k} \Xi'(\xi) = \Xi_k \frac{\partial f(\eta)}{\partial \xi}.$$

Man kann $\frac{\partial f(\eta)}{\partial a_k}$ stets von 0 verschieden annehmen. Verschwindet also Ξ von höherem, als dem ersten Grade, so ist entweder $\Xi_k = 0$ oder $\frac{\partial f(\eta)}{\partial \xi} = 0$. Sei 1) $\Xi_k = 0$, $\frac{\partial f(\eta)}{\partial \xi}$ nicht $= 0$. Verschwindet Ξ von der Ordnung μ für $x = \xi$, so hat f μ Paare Doppelwurzeln $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_\mu$, wobei das Zusammenfallen von 2 Paaren Doppelwurzeln η_1, η_2 eine dreifache Wurzel anzeigt, Hierfür hat man die Formel

$$\left(\frac{\partial f(\eta_1)}{\partial a_{i_1}}\,\frac{\partial f(\eta_2)}{\partial a_{i_2}}\cdots\right) = \mu!\ \Xi_{i_1 i_2}\cdots\frac{\partial f(\eta_1)}{\partial \xi}\cdots\frac{\partial f(\eta_\mu)}{\partial \xi}.$$

Jst 2) $\frac{\partial f(\eta)}{\partial \xi} = 0$, Ξ_k nicht $= 0$, so erhält man ähnliche Resultate

$$\text{z. B. } \frac{\partial f(\eta)}{\partial a_k}\,\Xi''(\xi) = \Xi_k\,\frac{d^2 f(\eta)}{\partial \xi^2}.$$

Bildet man die Discriminante D von Ξ, so tritt diese unter der Form auf $D = \Delta B^2 . C^3$, wobei (vorausgesetzt dass $a_k = a_n^{(k)} x^n + \cdots + a_0^{(k)}$) $B = 0$ von der Ordnung $4n(m-2)(m-3)$ in den $a_i^{(k)}$ ist und die Bedingung anzeigt, dass $f(y)$ für einen bestimmten Werth von x 2 Doppelwurzeln hat; wobei $C = 0$ von der Ordnung $6n(m-2)$ die Bedingung für eine dreifache Wurzel; und $\Delta = 0$ von der Ordnung $6mn - 4(m+n) + 4$ die Bedingung ist, dass für eine Doppelwurzel η von $f(y)$ der Differenzialcoefficient $\frac{\partial f(\eta)}{\partial \xi}$ verschwindet. Der Satz bleibt auch dann bestehen, wenn f eine Function mehrerer Veränderlichen ist.

Ist für homogene Coordinaten $v = \Sigma a_{k\lambda\mu} x_1^k x_2^\lambda x_3^\mu$; $k + \lambda + \mu = r$ gegeben, und die a sind Functionen m^{ter} Ordnung von y_1, y_2, y_3, so möge der Punkt $y_1 y_2 y_3$ in erweiterter Bedeutung der Pol der entsprechenden Curve v heissen. Die Pole (y) der Curven v mit Doppelpunkten bilden eine Curve Δ (Discriminante von v) der Ordnung $3m(r-1)^2$. Der Ort der Doppelpunkte von v ist eine Curve k der $3m^2(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Pole (y), für welche v 2 Doppelpunkte oder eine Spitze hat, sind Doppelpunkte bez. Spitzen von Δ. Es ist Δ von der Classe $3m(r-1)(2mr-m-r+1)$.

Betrachtet man nun eine Curve u von der Ordnung $n = m + r$, so bilden die ersten, zweiten u. s. w. Polarcurven aller Punkte der Ebene Systeme von Curven v. Die Curve Δ für die m^{ten} Polarcurven ist gleich der Curve k für die $(n-m-1)^{\text{ten}}$ Polarcurven und umgekehrt. Steiner nennt diese Curven, „conjugirte Kerncurven." Sie mögen $s^{(\lambda)}$ bezeichent werden, wo λ den Grad der Polarcurven angiebt, für die $s^{(\lambda)}$ die Curve Δ ist. $S^{(m)}$ und $S^{(n-m-1)}$ entsprechen sich also punktweise. Die Tangenten von $S^{(m)}$ sind die Linearpolaren der Punkte von $S^{(n-m-1)}$ in Bezug auf die $(m-1)^{\text{ten}}$ Polaren der entsprechenden Punkte von $S^{(m)}$. Die $(n-m)^{\text{ten}}$ Polaren der Punkte von $S^{(n-m-1)}$ berühren $S^{(m)}$ in

den entsprechenden Punkten. Die $(m+1)^{ten}$ Polaren der Punkte von $S^{(m)}$ berühren $S^{(n-m-1)}$. No.

J. Cockle. Third Chapter on Coresolvents. Quart. J. X. 35-52. (Fortsetzung v. VI. 229). 1869.

Erläuterungen und Zusätze zu einer Reihe von Aufsätzen des Verfassers, welche theils im Cambridge and Dublin J. (V. VI-VIII) theils im Quart. J. V. VI. veröffentlicht sind. Dieselben beziehen sich auf folgende Probleme:

1) „Integralization“ einer gegebenen rationalen Function von einer algebraischen Function x $n$ter Ordnung d. h. die Darstellung derselben als ganze Function $(n-1)^{ten}$ Grades von x mit Coefficienten, welche aus den Coefficienten der Gleichung $f(x, u)=0$ rational zusammengesetzt sind. Jnsbesondere werden die Differentialquotienten $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$ etc. in dieser Form gegeben.

2) Die Ermittelung von Werthsystemen, welche ein unbestimmtes Gleichungs-System erfüllen (multilinear solution). Ausser einigen Bemerkungen über die Auflösung von solchen cubischen Gleichungen ist folgender Satz über ein System von n homogenen quadratischen Gleichungen angeführt: Wenn die Zahl der darin auftretenden Unbekannten nicht unter $E\left(\frac{n^2+3}{2}\right)$ herabsinkt, — dieses Symbol bezeichnet die grösste in $\frac{n^2+3}{2}$ enthaltene ganze Zahl — so kann ein den gegebenen Gleichungen genügendes Werthsystem durch Auflösung von nur quadratischen und biquadratischen Gleichungen gefunden werden. — Den Beweis dieses Satzes hat Hr. Cockle in Cambr. D. J. VIII. p. 55 gegeben.

3) Bildung von Differential-Gleichungen für eine gegebene algebraische Function z von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, welche vom Verfasser als „partial differential resolvents“ bezeichnet werden. „Coresolvents“ heissen jede solche Differentialgleichung und die Gleichung $f(z, x, y)=0$, zusammen aufgefasst. — Solche Differentialgleichungen ergeben sich aber nach dem unter 1) auseinandergesetzten Principe. St.

S. Roberts. Note on a binary evectant form. Quart. J. XI. 42-47. 1870.

Erweiterung einiger Sätze der Invariantentheorie. Mz.

C. Neumann. Zur Theorie der Functionaldeterminanten. Clebsch Ann. I. 208-209. 1869.

u_1, u_2, u_3 sind gegebene Functionen von x_1, x_2, x_3; ferner

$$\varDelta = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \frac{\partial x_3}{\partial u_3};$$

V eine unbestimmte Function der x, F eine gegebene Function von x_1, x_2, x_3; V, $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V}{\partial x_3}$; dann ist (Jacobi II. p. 40)

$$\varDelta\left(\frac{\partial F}{\partial V} - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial V}{\partial x_i}}\right) = \varDelta\left(\frac{DF}{DV} - \Sigma \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\varDelta . DF}{D\frac{\partial V}{\partial u_i}}\right)$$

wo ∂ bez. D sich auf die partielle Differentiation nach den x, V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, bez. den u, V, $\frac{\partial V}{\partial u}$ bezieht. Setzt man $F = \Sigma c_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$, so ergiebt sich

$$0 = \Sigma \frac{\partial \varDelta \frac{\partial u}{\partial x_k}}{\partial u_i} \text{ oder } 0 = \Sigma \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial u_i}}.$$

No.

A. Clebsch. Note zu dem Aufsatze: „Ueber eine Eigenschaft von Functional-Determinanten.“ (Borchardt J. LXIX. p. 355). — Borchardt J. LXX. 175-181. 1869.

Vergleiche „Fortsch. d. M.“ I. p. 45. Der dort erwähnte gemeinsame Faktor der Funktional-Determinanten wird hier — nach einer Mittheilung von Hrn. Gordan — in entwickelter Form dargestellt. Die Aufstellung desselben erfolgt unter der Voraussetzung dass die ursprünglichen Funktionen von zweiter Ordnung seien; man hat, um das allgemeine Resultat zu erhalten, die Coefficienten dieser Functionen zweiter Ordnung durch die partiellen zweiten Differentialquotienten der allgemeinen Funktionen zu ersetzen. St.

R. Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. verb. Auflage. Leipzig. Hirzel. 1870.

Von den Verbesserungen dieser neuen Auflage sind besonders folgende hervorzuheben. § 5 (Producte von Determinanten) enthält ein Lemma von Hrn. Kronecker, welches für die allgemeine Theorie der linearen Gleichungen von Wichtigkeit ist, und eine Originalmittheilung des Hrn. Weierstrass über successive lineare Substitutionen. — Der Abschnitt über Funktional-Determinanten (§ 12) hat eine wesentliche Umgestaltung erfahren. Der Fundamental-Satz: „Wenn die Determinante von n Funktionen von n Veränderlichen verschwindet, so sind dieselben nicht von einander unabhängig" ist nach der erweiterten und genaueren Fassung des Hrn. Kroneker gegeben. Man findet hier ferner die Ausdrücke, die Gauss als Krümmungsmaasse der Flächen aufgestellt hat, entwickelt. — §. 13 (Homogene Functionen) ist bereichert durch Sätze über quadratische Formen, die von Hrn. Kronecker Berl. Monatsber. 1868 (Fortschr. I. 57) mitgetheilt worden sind. — § 16 (Producte von Strecken etc.) liegt ebenfalls vielfach umgearbeitet vor. Namentlich sind einige Fundamental-Formeln der analytischen Geometrie auf (algebraische) Identitäten zurückgeführt — § 17 (polygonometrische Relationen) bringt zum Schlusse einen von Hrn. Borchardt selbst verfassten Auszug einer Abhandlung über die Aufgabe vom grössten Tetraeder bei gegebenen Inhalten der Seitenflächen. (Berl. Abh. 1865, 1866). St.

L. Kronecker. Bemerkungen zur Determinanten-Theorie. Borchardt J. LXXII. 152-175. 1870.

Diese Bemerkungen zerfallen in 4 Abschnitte, deren erster ein so eben erwähntes Lemma behandelt. Im zweiten wird der Fundamental-Satz über Functional-Determinanten, dessen formale Erweiterung bereits oben berührt worden ist, in einer Form entwickelt, die vollständige Einsicht gewährt in die Natur des Zusammenhanges, der zwischen n Functionen von n Veränderlichen im Falle des Verschwindens ihrer Determinanten besteht. Derselbe lässt sich dadurch völlig characterisiren, dass er unverändert bestehen bleibt, wenn zwischen den Veränderlichen eine beliebige Gleichung festgesetzt wird.

Der Abschnitt III enthält geometrische Anwendungen. Wenn die 4 Eckpunkte eines Tetraeders mit 1, 2, 3, 4, die gegenüberliegenden Seitenflächen resp. mit I, II, III, IV bezeichnet werden — wenn ferner (1V), (2V), (3V), (4V) die kürzesten Abstände irgend einer Ebene V von den Tetraederecken, und (I5), (II5), (III5) (IV5) die kürzesten Abstände irgend eines Punktes 5 von den Tetraeder-Flächen bedeuten, so lässt sich durch die Bemerkung, dass der kürzeste Abstand des Punktes 5 von der Ebene V eine lineare homogene Function der tetraedrischen Punkt-Coordinaten $\frac{(I5)}{(I1)}; \cdots \frac{(IV5)}{(IV4)}$ sein muss, die Relation ableiten:

$$(a) \qquad (V5) = \frac{(I5)}{(I1)}(V1) + \cdots + \frac{(IV5)}{(IV4)}(V4).$$

Werden die Verhältnisse $\frac{(V1)}{(I1)} \cdots \frac{(V5)}{(IV4)}$ als Ebenen-Coordinaten definirt, so folgen aus (a) sowohl die Gleichung der Ebene (V) in Punkt-, ... als die des Punktes 5 in Ebenen-Coordinaten; ferner die lineare nicht homogene Relation zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes und die quadratische nicht homogene Relation zwischen den Coordinaten einer beliebigen Ebene. — Die Gleichung (a) führt in eleganter Weise zum Ausdrucke des Tetraeder-Volums sowohl durch die Coordinaten seiner Eckpuncte, als durch die seiner Seitenflächen. — Die im Vorstehenden erwähnten Gleichungen: (a) und die daraus folgenden lassen sich als Determinanten-Formel auffassen und als solche verallgemeinern. Auf diese Weise ergeben sich für eine n-fache Mannigfaltigkeit die diesen Gleichungen entsprechenden Formeln.

IV. „Sowohl die Sätze über Producte von Dreiecks-Flächen und Tetraeder-Volumen, als die polygonometrischen Relationen, die in den § 16 und 17 Jhres (d. i. des vorstehenden) Lehrbuches aufgestellt sind, lassen sich grösstentheils aus gemeinschaftlicher Quelle systematisch herleiten, wenn man zuvörderst allgemeine Determinanten $n$ter Ordnung behandelt und erst nachher zu denjenigen speciellen Determinanten übergeht, welche die Fläche des Dreiecks und das Volum des Tetraeders ausdrücken."

St.

v. Zelewski. Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten. Breslau. Storch. 1870.

Eine ziemlich weitschweifige Darstellung der bekannten Fundamental-Sätze dieser Theorie bis zum Multiplications-Theorem exclusive. St.

J. Versluys. Application nouvelle des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. Grunert Arch. L. 157-176. 210-213. 1869; LI. 49-72. 1870.

Es wird zunächst eine Discussion der Gleichung zweiten Grades in den üblichen homogenen Punktcoordinaten (sowohl für die Ebene als den Raum) und den homogenen Liniencoordinaten (für die Ebene) gegeben. Die verschiedenen Arten der Curven, resp. Flächen, welche durch solche Gleichungen dargestellt werden, sind vollständig aufgeführt und die bekannten analytischen Kriterien für jede derselben genau und auf elegante Weise entwickelt. — Hierauf folgt eine Untersuchung der ebenen Schnitte der Flächen 2ter Ordnung, welche für jede Art besonders geführt wird. Dies ist nicht gerade nothwendig, vielmehr kann man durch gehörige Berücksichtigung einer Bemerkung, die vom Verfasser zwar angeführt (a. a. O. p. 168), aber nicht benutzt wird, in ganz einfacher Weise von den Invarianten einer ternären quadratischen Form zu den simultanen Invarianten von zwei quaternären Formen, einer quadratischen und einer linearen, gelangen. — Am Schlusse werden einige bekannte Sätze über Flächen zweiter, und ebene Curven dritter Ordnung recht einfach abgeleitet. St.

Unterhuber. Einleitung in die Theorie der Determinanten. Pr. Leoben. 1870.

Der Zweck der Arbeit ist: „einen Schüler der 4. Klasse nicht ohne Nutzen mit diesen ihm unentgeltlich verabreichten Zeilen während der Ferien zu beschäftigen.“ No.

Ph. Gilbert. Sur une propriété des déterminants fonctionels et son application en développement des

fonctions implicites. Rapport de Steichen. Bull. de Belg. (3) XXVIII. 528-529. 1869.

Die Akademie beschloss den Druck der Arbeit, so dass wir auf den sehr gedrängten Bericht nicht einzugehen brauchen.

No.

V. EUGENIO. Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari. Battaglini G. VIII. 285-290. 1870.

I. II. Bezeichnet s_m die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

so hat man für die folgenden Werthe der Coefficienten

$$A_r = \frac{a^{r+1} - b^{r+1}}{a-b}, \quad A_r = \frac{c(c+1)\dots(c+r-1)}{1.2\dots r},$$

$$A_r = \frac{1}{r!}, \quad (r=0, 1\dots n),$$

nach den Newton'schen Formeln beziehentlich

$$s_m = -(a^m + b^m), \quad s_m = -c, \quad s_m = 0.$$

In den beiden ersten Fällen geht m von 1, 2 bis n, im dritten von 2, 3 bis n. Aus den letzteren Formeln werden über die Realität der Wurzeln der bezüglichen Gleichungen Schlüsse gezogen, die kaum berechtigt sein dürften.

III. Eine völlig selbstverständliche Bemerkung über Systeme von linearen Gleichungen. St.

H. G. DAY. Theorem in Algebra. Messenger V. 13-14. 1869.

Gegeben

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= S_1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 &= S_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_n^n &= S_n; \end{aligned}$$

es wird verlangt, das Product

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = X$$

durch die $S_1 S_2 \cdots S_n$ auszudrücken. Das Resultat ist

$$(-1)^n X = \Sigma\, (-1)^{a_1 + a_2 + \dots + a_r} \frac{\left(\frac{S_1}{1}\right)^{a_1} \left(\frac{S_2}{2}\right)^{a_2} \left(\frac{S_3}{3}\right)^{a_3} \cdots \left(\frac{S_r}{r}\right)^{a_r}}{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \cdots a_r},$$

auszudehnen über alle Werthe von a, für welche

$$\Sigma(r a_r) = n.$$

6*

Dieser Ausdruck $= o$ gesetzt, giebt die Resultante des Systems

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = S_1,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = S_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{n-1}^n = S_n,$$

welches aus dem obigen entsteht, wenn man $x_n = 0$ setzt. He.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper 1869. Question 4. Messenger V. 44-45. 1869.

Wenn $X : Y : Z = \eta\zeta' - \eta'\zeta : \zeta\xi' - \zeta'\xi : \xi\eta' - \xi'\eta$,
wo $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0$,
so wird bewiesen, dass $\xi\xi' : \eta\eta' : \zeta\zeta' : \eta\zeta' + \eta'\zeta : \zeta\xi' + \zeta'\xi : \xi\eta' + \xi'\eta = Y^2 + Z^2 : Z^2 + X^2 : X^2 + Y^2 : -2YZ : -2ZX : -2XY$ und dass die Grössen der linken Seite dieser Gleichungen also proportional den „quadric" Functionen von X, Y, Z sind. Glr. (O.)

Metzler. Die symmetrische Function
$$fx'^{\alpha}x''^{\beta}x'''^{\gamma}\cdots x^{n} - ([\alpha-1]+[\beta-1]+[\gamma-1]+\cdots).$$
Darmstadt 1870.

E. Hess. Ueber die Darstellung der einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischen Gleichungen. Schlömilch Z. XV. 326. 1870.

Sind $x_1, y_1, \cdots x_w, y_w$ die Simultanwurzeln der Gleichungen $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$, so werden die Ausdrücke $\sum_{\lambda=1\ldots w} x_\lambda^\varrho y_\lambda^\sigma$ als Summen von Producten gewisser Determinanten dargestellt, deren Elemente aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen gebildet sind; oder auch recurrirend als Summen von Producten solcher Determinanten in gleiche symmetrische Functionen niederer Ordnung. No.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines. (Primzahlen, Complexe Zahlen, Congruenzen, Kreistheilung.)

G. Cantor. Ueber die einfachen Zahlensysteme. Schlömilch Z. XIV. 121-128. 1869.

Sind 2 Systeme ganzer Zahlen gegeben $a, b, c, ..$ und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ..,$ und kann man jede ganze Zahl n auf eine und auch nur auf eine Art in der Form $\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots = n (\alpha \leqq \bar{a}, \beta \leqq \bar{b}, ..)$ darstellen, so heisst dies System ein „einfaches Zahlensystem." Für ein solches ist es nothwendig und hinreichend, dass jede der Zahlen $a, b, c, ..$ in der folgenden ohne Rest aufgeht und höchstens so oft vorkommen kann, als der um 1 verminderte Quotient beträgt, also a, $\frac{b}{a} - 1$ mal; b, $\frac{c}{b} - 1$ mal u. s. w. Führt man noch die Brüche $\frac{1}{b'}, \frac{1}{bb'}, \frac{1}{bb'b''}, ..$ ein und zwar entsprechend in den Anzahlen $b - 1$, $b' - 1, ..,$ so ist auch jeder Bruch auf eine und nur eine Weise in der Form $\frac{p}{q} = A_0 = \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda}{bb'}, ..$ darstellbar. Ist das System der b so beschaffen, dass jedes beliebige q Theiler eines der Nenner und also auch jedes folgenden wird, so sind bei rationalen Grössen die λ entweder 0, oder sie haben die höchsten ihnen zustehenden Werthe. Umgekehrt: Ist jede Zahl in einem Nenner als Theiler enthalten, so ist die obige Bedingung für die Rationalität von $A_0 = \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda'}{bb_{\prime}}, ..$ nothwendig. **Anwendung auf** e. Ist die Reihe der b von $b^{(\varrho)}$ an periodisch,

so ist die Periodicität der λ nothwendige und hinreichende Bedingung für die Rationalität der dargestellten Grösse. No.

G. CANTOR. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Producte. Schlömilch Z. XIV. 152-158. 1869.

Die Sätze lauten:

1. Man kann eine jede Zahlengrösse $A > 1$ auf eine und nur eine Weise darstellen als Product $A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots$, wo $a, b, c,\ldots$ ganze Zahlen sind, so beschaffen, dass $b \geqq a^2$, $c \geqq b^2, \ldots$

2. Ist A eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, so hat die unter 1. nachgewiesene Entwickelung von A nothwendig die specielle Form

$$A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{t^{2\lambda}}\right)\cdots$$

Aus 2. folgt z. B., dass $\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1+\frac{1}{a^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{a^4-1}\right)\cdots$ irrational ist. No.

C. SARDI. Teoremi di aritmetica. Battagl. G. VII. 24-27. 1869.

Zwei Sätze bezüglich der Verwandlung von Brüchen $\frac{1}{p}$ in Decimalbrüche, wenn p eine Primzahl ist. No.

T. N. THIELE. Lösning af Opgave 225. Tychsen Tidsskr. (2) V. 4. 1869.

Lösung folgender Frage: Wie viel Zahlen giebt es, deren Quersumme kleiner ist als die Basis des Zahlensystems?

Hn. (Wn.)

A. STEEN. Lösning af Opgave 45. Tychsen. Tidsskr. (2) V. 12. 1869.

Lösung folgenden Problems: Die Primzahlen x zu finden, die der Gleichung

$$(x-a)^x - (x-a) = A$$

genügen, wenn a und A positive ganze Zahlen sind?

Hn. (Wn.)

MEISSEL. Ueber die Bestimmung der Primzahlmenge innerhalb gegebener Grenzen. Clebsch Ann. II. 636—642. 1870.

Es sei, wenn m und n beliebige ganze Zahlen, p_λ die λ^{te} Primzahl bedeuten, $\Phi\,(m,\,n) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$; ist ferner $\varphi\,(m)$ die Menge der Primzahlen $\leqq m$; dann werden die Gleichungen abgeleitet $\varphi\,(m) = \Phi\,(m,\,n) + n\,(\mu+1) + \mu\,\frac{(\mu-1)}{2}$ $-\,1 - \sum_1^\mu \varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right)$ und $\Phi\;(m,\,n) = g\;\;(p_1-1)(p_2-1)\cdot\cdot(p_n-1)'$ $+\;\Phi\;(r,\,n)$, wenn $m = g.p_1\,..\,p_n + r$. Mit Hülfe einer Tafel für $\Phi\;(r,\,n)$ kann also $\varphi\;(m)$ leicht berechnet werden.

Die Resultate der vom Verf. begonnenen Berechnungen der Primzahlen weisen in Gauss II. S. 436—437 neunzehn Fehler nach; die Burckhardt'schen Tafeln sind in der ersten Million hinsichtlich der vorhandenen Primzahlen richtig. No.

V. SCHEMMEL. Ueber relative Primzahlen. Borchardt J. LXX. 191—192. 1869.

Ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma\,..$, dann bezeichnet $\varphi_n(m) = a^{\alpha-1}(a-n)\,b^{\beta-1}$ $(b-n)\,..$ die Anzahl der aus äquidistanten Gliedern gebildeten Gruppen zu m relativer Primzahlen $< m$. So ist z. B. $\varphi_2(9) = 3$, d. h. es giebt 3 Gruppen 1, 2; 4, 5; 7, 8. — 1, 5; 4, 8; 7, 2. — 2, 4; 5, 7; 8, 1. — $\varphi_1(m)$ ist die bekannte Function $\varphi(m)$. Ueber $\varphi_n(m)$ werden einige Sätze mitgetheilt, deren entsprechende für $\varphi_1(m) = \varphi(m)$ bekannt sind. No.

GÖTTING. Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl von der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$. Borchardt J. LXX. 363—364. 1869.

Ist $p = 8n+3$, so sind im Intervalle 1 bis $\frac{p}{4}$ gleich viele Reste und Nichtreste von p enthalten. Ist $p = 8n+7$, so sind im Intervalle $\frac{p}{4}$ bis $\frac{p}{2}$, ebenso von $\frac{p}{2}$ bis $\frac{3p}{4}$, ebenso von $\frac{p}{6}$ bis $\frac{p}{2}$ gleich

viel Reste und Nichtreste enthalten; die Summe der von 1 bis $\frac{p}{2}$ vorkommenden Reste ist gleich derjenigen der Nichtreste. No.

W. B. Davis. Queries. Messenger V. 164—165. 1870.

2 Fragen, die einen Beweis fordern, dass gewisse Zahlen Primzahlen sind. Glr. (O.)

W. A. Wh. Queries. Messenger V. 164. 1870.

4 Fragen über reine Primzahlen in verschiedenem Stufengange der Bezeichnung. Glr. (O.)

M. A. Stern. Ueber einen Satz von Gauss. Gött. Nachr. 1869. 330—334.

Stern theilt einen in den nachgelassenen Papieren des Hrn. Reiss aufgefundenen Satz von Gauss mit, dessen Beweis er nach den vorhandenen Andeutungen vervollständigt. Der Satz lautet: Es bezeichne a eine ganze (pos. oder neg.) Zahl von der Form $4k+1$; n eine beliebige ganze positive ungerade Zahl, welche zu a relativ prim ist; f bezeichne die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, .. $n-2$; q den ganzen Theil des Quotienten $\frac{af}{n}$; dann finden sich unter allen q eben so viele von der Form $4k+2$ als von der Form $4k+3$. No.

M. A. Stern. Ueber quadratische, trigonale und bitrigonale Reste. Borchardt J. XXI. 137—163. 1870.

Die Arbeit ist in gewissem Sinne eine Fortsetzung der aus dem Jahre 1868 (Fortschr. d. M. I. p. 51). Es wird besonders das gegenseitige Verhalten jener drei Arten von Resten zu einander untersucht, ebenso die Vertheilung derselben in gewissen Intervallen. Einige der Resultate mögen dies näher erklären: Je nachdem $p=4n+1$ oder $=4n+3$, ist die Summe der bitrigonalen Reste kleiner oder grösser als die Summe der quadratischen Reste, und mithin die Summe der bitrigonalen Nichtreste grösser oder kleiner als die Summe der quadratischen Nichtreste. — Die Anzahl der bitrigonalen Reste und Nichtreste

zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ ist bezüglich doppelt so gross als die Anzahl der quadratischen Reste und Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$. — Es giebt eben so viele bitrigonale Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ als zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, und dasselbe gilt von den bitrigonalen Nichtresten, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind. No.

Bouniakowsky. Sur les congruences binômes exponentielles à base 3 et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives. Bull. de St. Pétersb. XIV. 356–381. 1869.

Auf die Behandlung der Aufgabe $A\cdot 3^x \equiv b \pmod{P}$ folgt die Bestimmung einiger Werthe $\left(\frac{q}{p}\right)$, wie $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{E\left(\frac{p+1}{4}\right)}$, $\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{E\left(\frac{p+1}{6}\right)}$, sowie eine Reihe von Sätzen, deren Charakter dem der hier folgenden durchaus gleich ist. Sind $p=24n+5$ und $\frac{p-1}{4}$ Primzahlen, so ist 3 eine primitive Wurzel von p. — Sind $p=12n+11$ und $\frac{p-1}{2}$ Primzahlen, so ist $p-3$ eine primitive Wurzel von p. — Sind $p=8an+2a-1$ und $\frac{p-1}{4}$ Primzahlen und a^2+1 durch p nicht theilbar, so ist a eine primitive Wurzel von p. — Sind $p=8an+a-2$ und $\frac{p-1}{4}$ Primzahlen, und a^2+1 durch p nicht theilbar, so ist a eine primitive Wurzel von p. No.

Bouniakowsky. Sur quelques formules, qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non quadratiques des nombres premiers. Bull. de St. Pétersb. XIII. 25-32. 1869.

Aus den einfachsten Sätzen über quadratische Reste und Nichtreste werden mancherlei Formeln hergeleitet, wie z. B. dass für 13, wo die Reste 1, 3, 4, 9, 10, 12, die Nichtreste 2, 5, 6,

7, 8, 11 sind, die Gleichungen statthaben $2^2+3^2=13$; $8^2+12^2=1^2+3^2+4^2+5^2+6^2+11^2$. Allgemeine Formeln in dieser Beziehung werden nicht gegeben. Dann folgt eine Reihe von Formeln, die sich auf die Summirung der grössten ganzen Zahlen irrationaler Ausdrücke beziehen, z. B. $\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-5}{4}} E\sqrt{\mu p}=\frac{(p-1)(p-5)}{12}$; $\sum_{\frac{p-1}{4}}^{p-1} E\sqrt{\mu p}=\frac{(p-1)(7p+1)}{12}$; $\sum_{1}^{p-1} E\sqrt{\mu p}=\frac{(p-1)(2p-1)}{9}$.

No.

W. A. Wh. Book Notices. Messenger V. 176-181. 1870.

Notizen über: „Notes on Roulettes and Glissettes by. W. H. Besant", einige mathematische Journale und Vol. XII. der Educational Times Reprint. Der Artikel schliesst mit der Aufgabe: „Den wahren Rest zu finden, wenn der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist und die Division durch die verschiedenen Factoren nach einander erfolgt". Glr. (O.)

Ladrasch. Von den cubischen Resten und Nichtresten. Pr. Dortmund 1870.

Die einfachsten Sätze über diesen Gegenstand nebst Beweisen zusammengestellt. No.

F. Unferdinger. Ueber die Kriterien der Theilbarkeit der Zahlen. Wien. Ber. LIX. 465-466. 1869.

Bekannte Sätze in bekannter Weise abgeleitet. No.

P. Tardy. Sopra alcuni teoremi aritmetici. Brioschi Ann. (2) III. 331-338. 1870.

Eisenstein hat (Crelle XXVII. S. 281) fünf Theoreme aufgestellt, von denen *H. T.* in dieser Arbeit einfache Beweise giebt. — Da die Summe der p^{ten} Potenzen der n^{ten} Einheitswurzeln $=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2kp\pi}{n}$ ist, so folgt, dass (1) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2kp\pi}{n}$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem p durch n theilbar ist oder nicht. Daher ist

(2) $E\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-m}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2kp\pi}{n}$, und wenn man die Summation nach p ausführt $=\frac{m}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2mk\pi}{n}\operatorname{cotg}\frac{km\pi}{n}$ (3). Dies ist das erste Eisenstein'sche Theorem. — Setzt man in (1) hm an Stelle von p, so erhält man für den grössten gemeinsamen Theiler λ von m und n: $\lambda=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin 2km\pi \operatorname{cotg}\frac{km\pi}{n}$. — Bildet man $n\left(\frac{m}{n}-E\left(\frac{m}{n}\right)\right)$ gemäss (3), so erhält man den Rest von m (mod n); das 2[te] Theorem Eisensteins. — Setzt man in (3) hm für m, und nimmt m und n relativ prim, so erhält man durch Summation nach h das 3[te] Theorem:

$$(4)\ \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{hm}{n}\right)=\frac{n^2-1}{8}\frac{m}{n}-\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2n}\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{tg\,\frac{qm\pi}{n}}{tg\,\frac{2q\pi}{n}}$$

Die letzte Summe in (4) sei mit $F(n,m)$ bezeichnet; dann ist $mF(m,n)+nF(n,m)=-\frac{1}{4}(m-n)^2$. Das 4[te] und 5[te] Theorem beweist *H. T.* mit Hülfe Gauss'scher Sätze. No.

C. Sardi. Sulle somme de' divisori de' numeri. Battagl. G. VII. 112-116. 1869.

Nach Euler ist

$$\varphi=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}.$$

Der Verf. findet $\log\varphi=-3\sum_{1}^{\infty}\frac{S_r x^r}{r}$; wobei

$$\Sigma(-1)^p(2p+1)\ S_{n-\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}}\cdot\frac{n}{3}\sqrt{1+8n},$$

wenn n eine Dreieckszahl ist, anderenfalls ist der Ausdruck der linken Seite $=0$. Es werden dann mehrere Eigenschaften einer aus den S gebildeten Determinante abgeleitet. —

Darauf wird das Theorem zum Beweise gestellt, dass jede Zahl von der Form $40m+63$ als Summe von 7 Quadraten darstellbar sei, die sämmtlich mit einer 9 endigen.

Endlich wird eine bereits bekannte Lösung der Congruenzen ersten Grades gegeben (siehe Jordan, Algèbre § 2). No.

G. B. Marsano. Sopra una questione di posizione di numeri. Genova 1870. Jg.

F. W. A. Heime. Untersuchungen besonders in Bezug auf relative Primzahlen, primitive und secundäre Wurzeln, quadratische Reste und Nichtreste, nebst Berechnung der kleinsten primitiven Wurzeln von allen Primzahlen zwischen 1 und 1000. Berlin, Thiele. 1869.

In gedrängter Uebersicht werden die grundlegenden Sätze der Zahlentheorie abgeleitet. Die Arbeit ist zur Einführung in diese Wissenschaft, zumal wenn sie an der Hand eines Lehrers geschehen soll, wohlgeeignet. Neues enthält sie — abgesehen von einigen Eigenthümlichkeiten des Verfassers — nicht.
No.

M. Jenkins, Proof of an Arithmetical Theorem leading, by means of Gauss's Fourth Demonstration of Legendre's Law of Reciprocity, to the extension of that Law. Proc. of L. M. S. II. 29-32. 1869.

Multiplicirt man alle ungeraden Zahlen unterhalb der ungeraden Zahl N mit einer zu N theilerfremden Zahl K, bildet dann die Reste (mod. N), so ist die Anzahl der geraden Reste gerade oder ungerade, je nachdem $\left(\frac{K}{N}\right) = +1$ oder -1 ist, wobei $\left(\frac{K}{N}\right)$ die von Jacobi gegebene erweiterte Bedeutung hat. No.

Bouniakowsky. Sur un théorème rélatif à la théorie des résidus et son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers. Bull. de St. Pét. XIV. 432-447. 1869.

Sind a und r ungerade ganze relative Primzahlen; a beliebig gegeben, r innerhalb $1..2a-1$ eingeschlossen, p eine ungerade

Primzahl $=2an+r$, so ist $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}n+m}$; also wenn $q = 2an'+r$, so wird $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}(n+n')}$ Setzt man $p = q+2^{\nu}\cdot a$, wo 2^{ν} die höchste in $p-q$ enthaltene Potenz von 2 ist, so lässt sich die obige Gleichung auch in die Form

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}+\nu\left[E\left(\frac{p+1}{4}\right)+E\left(\frac{q+1}{4}\right)\right]+\frac{a-1}{2}(n+n')}$$

bringen. Hieraus wird dann ein Beweis des Reciprocitätsgesetzes hergeleitet. No.

BOUNIAKOWSKY. Sur le symbole de Legendre $\left(\frac{q}{p}\right)$. Bull. de St. Pét. XIV. 432-447. 1869.

Diese Abhandlung vervollständigt die vorhergehende, in so fern sie den Werth der Zahl

$$m=\sum_{s=1}^{k}\left[E\left(\frac{(s-1)a+\frac{r-1}{2}}{2k}\right)-E\left(\frac{(s-1)a+1}{2k}\right)\right]$$

liefert. — Dann giebt der Verf. noch den Satz, dass wenn $p = 4an+4a-1$ und $\frac{p-1}{2}$ Primzahlen sind, $p-3$ eine primitive Wurzel von p ist. No.

M. A. STERN. Ueber einen einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und einige damit zusammenhängende Sätze. Gött. Nachr. 237-253. 1870.

Nennt man die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $1, 2, .. \frac{p-1}{2}$: u, das unter dem kleinsten positiven Restsystem $\frac{xq}{p}$, $\left(x=1, .. \frac{p-1}{2}\right)$: u_1; ähnlich bei $1, 2, .. \frac{q-1}{2}$ und $\frac{yp}{q}$: v und v_1, so folgt leicht $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{u_1-u}$ oder $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{u_1+v_1-u-v} \pmod{p}$. Diese Bedingung des Recipr.-Ges. lässt sich nun umsetzen in folgende andere: Ist die Anzahl der geraden Reste in $\frac{xq}{p}$

und $\frac{yp}{q}$ gleich G, die der **ungeraden** gleich U, so ist $U-G\equiv 0$, (mod. 2), wenn p und q beide von der Form $4n+1$ oder $4n+3$ sind, dagegen $\equiv 1$ (mod. 2), wenn p und q von verschiedenen Formen $4n+1$, $4n+3$ sind. Dies wird nachgewiesen. Ferner wird gezeigt, dass in $\frac{xq}{p}$ eben so viel gerade als ungerade Zahlen vorkommen, wenn p und q gleichförmig, dass dagegen die der ungeraden um 1 grösser ist, als die der geraden, wenn p und q ungleichförmig sind. No.

E. Schering. Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Göttingen, Dieterich. 1869.

Gauss hat bei den Untersuchungen über die Composition der Klassen reguläre Determinanten von irregulären unterschieden, d. h. solche, bei denen alle Klassen durch eine Periode umfasst werden von solchen, bei denen dies nicht der Fall ist. Für die letzteren müsste nun ein System von Fundamentalklassen bestimmt werden. Gauss hat dies (Disq. ar. 306. IX.) nicht näher durchgeführt; die vorliegende Arbeit ist bestimmt, ein solches Fundamentalsystem naturgemäss aufzustellen. Die Klassen A, B, C,..F,..J, L, M werden so gegeben, dass jede, z. B. F sowohl selbst, sowie jede Klasse in ihrer Periode mit Ausnahme der Hauptklasse von den durch Zusammensetzung aus den vorangehenden Klassen entstehenden Klassen verschieden ist, und dass sie zugleich unter den Klassen mit dieser selben Eigenschaft die grösste oder eine der etwa gleichen grössten Periodenzahl besitzt. Dann kann keine Klasse auf zwei verschiedene Arten durch Zusammensetzung aus A, B, C,..J, L, M entstehen. Es wird nun eine Reihe von Sätzen über die Periodenzahlen u. s. w. abgeleitet, deren Kernpunkt, in der Arbeit Kronecker's: „Ueber einige Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen" aufgedeckt ist. No.

Kummer. Ueber die einfachste Darstellung der aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen, welche durch Multiplikation mit Einheiten bewirkt werden kann. Berl. Monats-Ber. 1870. 409-420.

Unter den complexen Primfactoren, welche Hr. Reuschle be-

rechnet und der Akademie übergeben hat, befindet sich ein idealer Primfactor, dessen neunte Potenz wirklich ist, und zwar ist dies ein idealer Primfactor der Zahl 2 für die aus 31ten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen. Die neunte Potenz stellt sich als wirklich complexe Zahl dar, welche nur die fünfgliedrigen Perioden der 31ten Wurzeln der Einheit enthält. Hr. Kummer hat nun einen der idealen Primfactoren ausgerechnet, deren neunte Potenz wirklich ist, welche aber nicht aus Perioden, sondern aus den 31ten Einheitswurzeln selbst gebildet sind, welche also 30 conjugirte ideale Primfactoren haben. Durch Multiplikation mit passend gewählten Einheiten wurde diese neunte Potenz möglichst vereinfacht; da jedoch die Definition: diejenige complexe Zahl sei die einfachere, deren Coefficienten kleinere Zahlen sind, ihrer Unbestimmtheit wegen nicht ausreicht, so wird definirt: „Unter allen complexen Zahlen $f(\alpha)$, welche nur durch hinzugefügte Einheiten sich unterscheiden, ist diejenige die einfachste, für welche die Summe M der mit $f(\alpha)f(\alpha^{-1})$ conjugirten μ complexen Zahlen den kleinsten Werth bekommt," $\left(\alpha^{\lambda}=1, \frac{\lambda-1}{2}=\mu\right)$ oder „diejenige, für welche die Summe der Quadrate der Unterschiede je zweier ihrer λ Coefficienten den kleinsten Werth hat". Diese Summe kann man nun direct $=0$ setzen, erhält dann aber freilich keine ganzen Zahlen für die Exponenten der Fundamentaleinheiten; doch kann man dann diejenigen ganzen Zahlen annehmen, die den gefundenen am nächsten liegen. Mit Hülfe dieser Methode wird die oben erwähnte Potenz auf eine sehr einfache Form gebracht. No.

Kummer. Ueber die aus 31ten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. Berl. Monatsber. 1870. 755-766.

Für die aus 31ten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen ist der erste Factor der Klassenzahl 9. Da diese Zahl ein Quadrat ist, so könnten schon die dritten Potenzen aller hierher gehörenden idealen Zahlen wirklich sein. Die Frage, ob dies der Fall sei, wird darauf reducirt, ob drei Gleichungen mit 6 unbestimmten Grössen in ganzen Zahlen lösbar seien. Das Endresultat ist, dass diese Lösung unmöglich sei; es giebt also

keine niedere Potenz des idealen Primfactors der 2, als die neunte, welche wirklich ist. No.

Kummer. Ueber eine Eigenschaft der Einheiten der aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten complexen Zahlen und über den zweiten Factor der Klassenzahl. Berl. Monatsber. 1870. 856-880.

Die Einheiten der complexen Zahlen sind, wenn man von einfachen Einheitswurzeln absieht, welche als Factoren heraustreten können, stets reelle Grössen. Ist die Einheit das Quadrat einer andern, so bildet dieselbe mit allen ihren conjugirten Werthen eine Reihe positiver Grössen. Dieser Satz ist umkehrbar für alle diejenigen Werthe der Primzahl λ, für welche die vollständige über alle der Gleichung $\omega^\mu = 1$ genügenden μ Werthe des ω sich erstreckende Norm $N\psi(\omega)$ einer gewissen Function $\psi(\omega)$ nicht durch 2 theilbar ist. Diese Bedingung ist identisch mit der, dass der erste Factor der aus λ^{ten} Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen nicht durch 2 theilbar sei. Es kann daher der zweite Factor der Klassenzahl nie durch 2 theilbar sein, wenn es nicht zugleich auch der erste ist. Ist der zweite Factor der Klassenzahl durch 2 theilbar, so enthält die complexe Zahl $\psi(\omega^{-1})$ nothwendig denselben complexen Primfactor von 2, den $\psi(\omega)$ enthält. Wenn die Einheit $E(\alpha) = e(\alpha)^\lambda e(\alpha\gamma)^{x_1} \dots e(\alpha\gamma^{\mu-1})^{\lambda_{\mu-1}}$ die q^{te} Potenz einer fundamentaleren Einheit ist, so dass die Exponenten $x, x_1 ..$ der Kreistheilungs-Einheit nicht alle $\equiv 0 \pmod{p}$ sind, sobald einer derselben $= 0$ angenommen wird, so muss die complexe Zahl $\psi(\omega)$ einen complexen (idealen) Primfactor von q enthalten, also muss die vollständige Norm von $\psi(\omega)$ durch q theilbar sein. Wenn $\psi(\omega)$ nicht für die primitiven Wurzeln ω der Gleichung $\omega^\mu = 1$, sondern für die von $\omega^m = 1$, wo $\mu = m \cdot m'$ ist, einen idealen Primfactor von q enthält, so kann die fundamentalere Einheit, deren q^{te} Potenz sich als Product von Potenzen der Kreistheilungseinheiten ausdrücken lässt, nur die m Perioden von je $2m'$ Gliedern der Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ enthalten.

No.

Kronecker. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen. Berl. Monatsber. 1870. 881-889.

Eine endliche Zahl von Elementen $\Theta', \Theta'', \Theta''', ..$ soll so beschaffen sein, dass mittels einer bestimmten Operation, welche symbolisch durch das Multiplicationszeichen angedeutet werden mag, aus zweien ein drittes abgeleitet wird. Diese Operation soll folgende Eigenschaften haben: 1) $\Theta'\Theta'' = \Theta''\Theta'$, 2) $\Theta'(\Theta''\Theta''') = (\Theta'\Theta'')\Theta'''$, 3) $\Theta'\Theta''$ ist von $\Theta'\Theta'''$ verschieden, wenn Θ'' von Θ''' verschieden ist. Es gelten dann die Sätze: Unter den verschiedenen Potenzen von Θ giebt es solche, die der Einheit äquivalent sind. Die Exponenten dieser sind ganze Vielfache des kleinsten, zu dem das betreffende Θ „gehört". Gehört ein Θ zu ν, so gehört auch stets ein Θ' zu jedem Theiler von ν. Ist n_1 die kleinste Zahl, welche sämmtliche ν als Theiler enthält, so giebt es Elemente Θ, die zu n_1 gehören. — Eins derselben sei Θ_1; Θ' und Θ'' heissen „relativ äquivalent", wenn $\Theta'\Theta_1^k \sim \Theta''$. Sondert man aus dem System der Θ ein solches ab, in dem keine 2 einander äquivalent sind, so gelten von ihm die obigen Sätze; es giebt also eine Zahl n_2, so dass jedes Θ des neuen Systems $\Theta^{n_2} \sim \Theta_1^k$ liefert. Dieses n_2 ist ein Theiler von n_1; zu ihm gehöre Θ_2. Ebenso bilde man ein neues System, in dem für keine zwei Θ die Gleichung $\Theta_\lambda \Theta_1^k \Theta_2^l \sim \Theta_\mu$ gilt u. s. w., so kommt man zu einem Systeme von Fundamentalelementen Θ_1, $\Theta_2, \Theta_3, ..$ die bezüglich zu $n_1, n_2, n_3 ..$ gehören, und mittels deren sich jedes in der Form $\Theta_1^{m_1}\Theta_2^{m_2}\Theta_3^{m_3}..(m_1 < n_1, m_2 < n_2 ..)$ darstellen lässt. Dieses System ist mit dem von Schering aufgestellten identisch. — Diese Theorie wird auf beliebige complexe Zahlen angewendet. Es sei ω Wurzel einer irreductibelen Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten ganze complexe Zahlen $\varphi(\varrho)$ sind, wobei der Ausdruck „irreductibel" im Sinne eben dieser complexen Zahlen zu verstehen ist. Alsdann ist die Klassenzahl für die complexen Zahlen $f(\omega)$, welche die Zahlen $\varphi(\varrho)$ mit in sich begreifen, ein Product zweier Factoren, von denen der eine die Klassenzahl für die Zahlen $\varphi(\varrho)$ bedeutet. Jeder in diesem Factor enthaltene Primtheiler von m ist auch in dem an-

deren Factor enthalten. Wenn es ferner ideale, (nicht wirkliche) Zahlen $\varphi(\varrho)$ giebt, deren m^{te} Potenz wirklich ist, so giebt es auch unter denjenigen idealen Zahlen $f(\omega)$, welche keiner Zahl $\varphi(\varrho)$ äquivalent sind, solche, deren m^{te} Potenz einer Klasse der Zahlen $\varphi(\varrho)$ angehört. Ist endlich d irgend ein Divisor von m_1, für den eine ideale Zahl $\varphi(\varrho)$, zur d^{ten} Potenz erhoben, wirklich wird, ohne dass dies schon für eine niedrigere geschieht, so giebt es auch ideale Zahlen $f(\omega)$, die so beschaffen sind, dass die d^{te} Potenz derselben, aber keine niedrigere, einer der idealen Zahlen $\varphi(\varrho)$ äquivalent wird. No.

HILL. Note sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes. Borchardt J. LXX. 282-288. 1869.

Es wird eine Tafel beschrieben, mittels der man, wenn die Zahlen r_0 und r_1 als Reste einer unbekannten Zahl x, nach den Moduln p_0 und p_1, gegeben sind, die Zahl x selbst oder wenigstens ihren Rest nach $p_0 p_1$ findet. Nimmt man für die p Potenzen von 2 und 5, so erhält man die letzten Ziffern von x für das Decimalsystem. No.

W. A. WH. A new symbol. Messenger V. 121. 1869.

Neue Symbole werden vorgeschlagen für die nächste ganze Zahl, kleiner als $\frac{n}{d}$, die nächste grösser als $\frac{n}{d}$, und für die nächste ganze Zahl zu $\frac{n}{d}$, die entweder grösser oder kleiner. Glr. (O.)

W. ŠIMERKA. Die rationalen Dreiecke. Grunert Archiv. LI. 196-224. 1870.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Berechnung schiefwinkliger Dreiecke aus rechtwinkligen, mit einigen Eigenschaften der Seiten rationaler Dreiecke, giebt Relationen zwischen den Zählern und Nennern in dem Ausdruck für die Tangenten der halben Winkel, und zwischen diesen Tangenten und den grössten gemeinschaftlichen Factoren („Kürzer") jener Zähler und Nenner. Diese grössten gemeinschaftlichen Factoren lassen sich als Summen von 2 Quadraten darstellen, deren Wurzeln der Verf. „Vermittler"

nennt. Dann folgt die Bestimmung der Vermittler aus den Tangenten der halben Winkel und die Berechnung der Coordinaten der Scheitel rationaler Dreiecke. Theoretisch enthält die Arbeit nichts Neues; wir finden eine Reihe von praktischen Rechnungsvortheilen, von Aufgaben für Schüler und am Schluss ein Verzeichniss aller rationalen Dreiecke, deren Seiten 100 nicht übersteigen, mit Angabe ihrer Fläche, der Tangenten halber Winkel, der Vermittler und der Coordinaten der Scheitel. M.

W. Adam. Methodische Anweisung zum Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln mit Anwendung zu geometrischen Berechnungen nebst zahlreichen Uebungsaufgaben. Wittstock. 1869.

Breiteste Ausführung des Titels auf 140 Seiten. Es wird z. B. der Reihe nach gezeigt, wie Quadratwurzeln aus drei-, aus vier-, aus fünf-, aus sechs-, aus sieben- und achtstelligen Zahlen gezogen werden. No.

E. Meissel. Notiz über die Anzahl aller Zerlegungen sehr grosser ganzer positiver Zahlen in Summen ganzer positiver Zahlen. Pr. Iserlohn. Bädecker. 1870.

Bezeichnet $f(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der Zahl n, so ist $F(q) = \prod_{1}^{\infty} (1-q^{\lambda})^{-1} = \sum_{0}^{\infty} f(n) q^{n}$. Der Verf. giebt mit Hülfe der Θ-Functionen eine Umwandlung von $F(q)$ und entwickelt daraus eine Näherungsformel. No.

W. H. Thompson. On Magic Squares. Quart. J. X. 186-202. 1869.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe: „Gegeben ein Zauberquadrat mit n^2 Zellen; es wird verlangt daraus ein anderes abzuleiten mit $p^2 n^2$ Zellen". Er giebt verschiedene Methoden zur Lösung. He.

Horner. On the Algebra of magic squares. Quart. J. XI. 57 und 123. 1870.

In diesen beiden Abhandlungen wird eine allgemeine Bildung magischer Quadrate auseinander gesetzt. Wir geben für eine

Primzahl n die Lösung, deren Beweis unmittelbar ersichtlich ist. — Sei $ax+by=q\cdot n+R$, wo q eine ganze Zahl und $+\frac{n}{2}\geqq R>-\frac{n}{2}$ ist. Setzt man $(x=0;\ y=0,1,..n-1);(x=1;\ y=0,1,..n-1);$ ... und schreibt die R in Form eines Quadrates unter einander, so wird dasselbe ein magisches Quadrat mit der Seitensumme 0 sein; die negativen Zahlen $-1,-2,..$ bezeichnen wir durch $\overline{1}$, $\overline{2}$.. Bildet man in ähnlicher Weise ein zweites solches Quadrat und schiebt die beiden so in einander, dass in jeder Zelle eine 2ziffrige Zahl steht, so ist dieses im System von n Ziffern ebenfalls ein magisches, also auch wenn man in's Decimalsystem übergeht; alle Ziffern sind verschieden; die Quersumme ist Null. Dies letztere kann durch Vermehrung jeder Ziffer um eine hinreichend grosse Zahl beseitigt werden. No.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

L. Calzolari. Nuova soluzione generale in numeri razionali dell' equazione: $w^2=a+bv+cv^2$. Battaglini G. VII. 177-192. 1869.

L. Calzolari. Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio $a+bv+cv^2+dv^3+ev^4$. Battaglini G. VII. 317-350. 1869.

Die obige quadratische Gleichung, auf die Form gebracht

$$u^2=Ax^2+By^2,$$

wo x, y, u, A, B ganze Zahlen sind, zerlegt der Verfasser nach Einführung der neuen ganzen Zahlen X, Y, U, welche der Bedingung

$$U^2=AX^2+BY^2-AB$$

zu genügen haben, in

$$u=Yx+Xy;\ Ax=Yu\pm Uy;\ By=Xu\mp Ux.$$

Es ergiebt sich:

$$\frac{x}{y}=\frac{XY-U}{A-Y^2}\,;\, u=AX-YU.$$

Hat man nun ein specielles Werthsystem $x_0, y_0, u_0, X_0, Y_0, U_0$, so entspricht die allgemeine Lösung den Werthen

$$X=X_0-x_0t\,;\; Y=Y_0+y_0t\,;\; U=U_0-u_0t \tag{9}$$

für die willkürliche Zahl t.

Bezeichnet man in der zweiten Aufgabe das Polynom vierten Grades durch w^2, so lässt sich die gegebene Gleichung in folgender, die willkürliche Zahl k enthaltender Form darstellen:

$$c'e(2w)^2=a'c'-b'^2+(c'v+b')^2+c'(2ev^2+dv+k)^2,$$

wo

$$a'=4ae-k^2\,;\; b'=2be-dk\,;\; c'=4ce-4ek-d^2$$

gesetzt ist, und nimmt die Form an

$$u^2=Ax^2+By^2+Cz^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{1}$$

nach deren Auflösung v den Bedingungen

$$c'v+b'=\frac{u}{x},\; 2ev^2+dv+k=\frac{y}{x}$$

zu genügen hat. Setzt man jetzt

$$z=qx-py\,;\; u=Yx+Xy$$

und löst die Gleichung nach x auf, so kommt:

$$\frac{x}{y}=\frac{Cpq+XY\pm U}{Cq^2+A-Y^2}$$

mit der Bestimmung, dass die Quadratwurzel U rational sei. Hier bietet sich zunächst die specielle Lösung

$$x=p\,;\; y=q\,;\; z=0,$$

welche dem Falle $C=0$ entsprechend nach der Methode der vorigen Aufgabe zu berechnen ist. Sind dann p_0, q_0, s_0 die speciellen Werthe von x, y, u, und p, q, s die mittelst Gleichung (9) abgeleiteten allgemeineren Resultate, so wird auch Gleichung (1) gelöst durch die Formeln

$$\frac{x}{y}=\frac{p_0+Cq_0p}{q_0+Cq_0q}\,;\, z=p_0q-q_0p\,;\, u=s_0+Cq_0s,$$

wo in p, q, s die willkürliche Variable t steckt. Zu bemerken ist, dass von den zwei Resultaten entsprechend dem Doppelzeichen von U immer nur eins zu allgemeineren Ausdrücken, das andere auf das specielle Werthsystem zurückführt.

An die genannten Lösungen werden noch viele Betrachtungen geknüpft, die jedoch keine neue Aufgabe in Angriff nehmen.

H.

L. Calzolari. Soluzione generale dell' equazione $y^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2$.
Battaglini G. VII. 313-316. 1869.

Die gegebene Gleichung reducirt sich durch die Substitution

$$y = k + \Sigma a_i;\ x_i = k + a_i$$

auf folgende:

$$(\Sigma a_i)^2 - \Sigma a_i^2 = (n-1)k^2,$$

welche linear in Bezug auf alle einzelnen a_i ist, daher immer rational durch ein beliebiges a_i erfüllt werden kann. H.

L. Calzolari. Nota sull' equazione $u^2 = Ax^2 \pm By^2$.
Battaglini G. VIII. 28-34. 1870.

Der Verfasser zerlegt die Coefficienten in Summen von Quadraten

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots;\ B = b_1^2 + b_2^2 + \cdots,$$

deren Anzahl 4 nie zu übersteigen braucht, und bestimmt dann die Grössen $x_i = a_i x$, $y_i = b_i y$. Da er auf die feststehenden Verhältnisse der neuen Unbekannten keine Rücksicht nimmt, so ergiebt sich eine unabsehbare Menge von Lösungen, unter denen die richtigen enthalten sind. Mit Uebergehung der Frage nach ihrer Auffindung leitet er daraus ein Kriterium für die Existenz von Lösungen ab, welches jedoch in dem gleichen Falle ist, dass es ein Ausprobiren vieler Systeme der a_i, b_i verlangt, deren Anzahl bei grossen Zahlen A, B sehr gross sein kann. H.

P. Bachmann. Ueber ternäre quadratische Formen.
Burchardt J. LXX. 365-371. 1869.

P. Bachmann. Zur Transformation ternärer quadratischer Formen. Borchardt. J. LXXI. 296-306. 1870.

Dem Problem, eine ganze Zahl durch eine binäre quadratische Form darzustellen, entspricht das Problem eine binäre quadratische Form als ternäre auszudrücken. Der Verfasser behandelt die zweite Aufgabe nach ähnlichen Prinzipien, nach

denen Dirichlet die erstere löste, und gelangt so zu den von Hermite (Crelle XLVII.) aufgestellten Formeln. — Im zweiten Aufsatze wird unter Beschränkung der allgemeinen ternären Formen die Bedingung angegeben, wann die Formeln nur diejenigen Transformationen liefern, deren Coefficienten ganze Zahlen sind.

No.

A. Clebsch. Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. Gött. Abh. XV. 1870.

Unter einer „höheren" Transformation einer binären Form $f(x_1 x_2)$ hat man das Folgende zu verstehen. Es mögen φ, ψ binäre Formen gleich hohen Grades in den x_1, x_2 sein und man setze:

(1)
$$\varrho y_1 = \varphi(x_1 x_2)$$
$$\varrho y_2 = \psi(x_1 x_2).$$

Sodann eliminire man die x_1, x_2 aus diesen beiden Gleichungen und der gleich Null gesetzten gegebenen binären Form:

$$f(x_1 x_2) = 0.$$

Das Eliminationsresultat hat die Gestalt

$$f'(y_1, y_2) = 0,$$

wo f' eine binäre Form in den y_1, y_2 ist, von gleichem Grade, wie f in den x_1, x_2 war. Man bezeichnet dann f' als die aus f vermöge der höheren Transformation (1) hervorgegangene, transformirte Form.

In dieser Art sind die höheren Transformationen zuerst von Gordan betrachtet worden (Borchardt J. LXXI. 164 siehe p. 69). Aber bereits früher hat man sich vielfach mit einer besonderen Art dieser Transformationen, der sogenannten Tschirnhausen'schen Transformation, beschäftigt. Dieselbe kommt darauf hinaus, aus einer nicht homogenen algebraischen Gleichung:

$$f(x) = 0$$

eine neue, nicht homogene:

$$f'(y) = 0$$

abzuleiten, indem man x aus $f = 0$ und einer Gleichung der Form

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$

eliminirt. Hermite hat zuerst darauf aufmerksam gemacht (C. R. XLVI. 961), dass man durch passende Wahl der Coefficienten in der Tschirnhausen'schen Transformation der transformirten Gleichung beliebige Invarianteneigenschaften ertheilen kann. Andererseits hat Brioschi (Atti d. Ist. Lomb. I. 231. 1858) diejenigen partiellen Differentialgleichungen aufgestellt, denen die Coefficienten der transformirten Gleichung zu genügen haben. Gordan hat sodann (*l. c.*) in der vorstehend auseinandergesetzten Form den Begriff der höheren Transformation entwickelt und gezeigt, dass die Invarianten der Form f' simultane Invarianten der gegebenen Form f und der Transformations-Formen φ, ψ sind.

Aber nicht umgekehrt ist jede simultane Invariante von f, φ, ψ eine Invariante von f'. Sie muss zu dem Zwecke noch gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen, welche der Verfasser in der vorliegenden Arbeit aufstellt. Diese Differentialgleichungen bilden ein vollständiges System, in dem Sinne, wie dies von dem Verfasser (Borchardt J. LXV. 257) definirt worden ist. Für solche Systeme ist hier also ein neues Beispiel gegeben. Die Integration des Systems wird dann für den Fall der quadratischen Transformationen durchgeführt.

Es ergiebt sich dabei noch allgemein das Resultat, dass es bei binären Formen keine Ausdrücke in den Coefficienten giebt, die bei einer höheren Transformation ungeändert bleiben, dass also binäre Formen, im Gegensatze zu den ternären, keine „absoluten Invarianten in höherem Sinne", oder, wie man sich bei den ternären Formen gewöhnlich ausdrückt, keine „Moduln" besitzen. Kln.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

MINDING. Loi de la formation des dénominateurs et des numérateurs pour la réduction des fractions continues en fractions ordinaires. Bull. de St. Pét. XIII. 1869.

Euler hat das Gesetz der Bildung des Bruches

$$Q = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots + \cfrac{1}{i}}}$$

angegeben. Sei $Q = \frac{(abc..i)}{(bc...i)}$, so bildet er $(abc..i) = a \cdot b \cdot c..i.$ $\left(1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \cdots + \frac{1}{ef} + \cdots + \frac{1}{ab \cdot cd} + \cdots\right)$. Die Nenner der Brüche innerhalb der Klammer sind zuerst alle Producte je zweier aufeinanderfolgender Grössen $a, b, ..i$; dann alle möglichen Producte der angegebenen Producte, welche keinen gemeinsamen Factor haben u. s. w. Minding theilt ein anderes Gesetz mit. Um $(u_0 \cdot t_1 u_1 \cdot t_2 u_2 \cdot\cdot t_s u_s)$ zu bilden, formt man die Summe der Producte der u zu je $1, 2, 3, ..$ und multiplicirt jedes $u_\lambda u_\mu$ mit der Summe der zwischen u_λ und u_μ befindlichen t, z. B. $u_0 u_3 u_4 u_7$ mit $(t_1 + t_2) t_4 (t_5 + t_6 + t_7)$. Ist die Zahl der Elemente gerade, ist also $(t_1 u_1 \cdot\cdot t_s u_s)$ gegeben, so ist dies das Aggregat der mit u_1 multiplicirten Glieder der vorigen Summe. No.

THIELE. Bemarkning om Kjaedebroker. Tychsen Tidsskr. (2) V. 144. 1869.

Der Verfasser zeigt, dass jeder endliche Kettenbruch dargestellt werden kann als das Verhältniss zweier Determinanten; hinzugefügt ist eine Bemerkung über eine neue Transformation des Kettenbruchs:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Hn. (Wn.)

T. N. Thiele. Den endelige Kjaedebröks-Funktions Theori. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 145. 1870.

Der Verfasser zeigt zuerst, dass jeder endliche Kettenbruch sich als das Verhältniss zweier Determinanten von besonderer Form darstellen lässt. Er leitet dann mehrere Eigenschaften der erwähnten Determinanten ab und stellt einige Beziehungen zwischen der Theorie endlicher Kettenbrüche und der Theorie der anharmonischen Verhältnisse auf. Die Arbeit enthält ausführliche Entwickelungen aus der Theorie endlicher Kettenbrüche.

Hn. (Wn.)

Falk. Et konvergents kriterium för kedjebräk med omvexlande positiva og negativa leder. 1870.

Bemerkung über die Convergenz einer gewissen Klasse von Kettenbrüchen. Hn. (Wn.)

Seeling. Verschiedene Aufsätze zur Zahlenlehre. Grunert Arch. L. 232-238. 1869.

Quadratische Gleichungen, deren Wurzeln sechsstellig-periodische Kettenbrüche liefern. — $\sqrt{4n^2+16}$ in einen Kettenbruch verwandelt. Siehe „Fortschritte d. M." I. 64-65. No.

E. Weyr. Erweiterung der Giltigkeit der Entwickelung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch. Prag. Ber. 1869. 18-22.

Auf den Satz, dass „durch fortgesetzte Construction von aufeinander folgenden, sich der Reihe nach entsprechenden Elementen man sich einerseits immer mehr dem einen, andererseits dem andern Doppelelemente nähert", — stützt H. W. den Beweis, dass die Formel $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pm b} = \frac{a}{2} \pm \cfrac{b}{a \pm \cfrac{b}{a \pm \cdots}}$ $(b>0)$ giltig bleibt, so lange $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqq b$, wenn die unteren Zeichen gelten; allgemein dagegen für die oberen Zeichen. No.

V. Eugenio. Dimostrazione di un teorema nella teoria dei numeri. Battagl. G. VIII. 162-165. 1870.

Mit einer unwesentlichen Aenderung weniger Zeilen eine

Uebersetzung von Serret's Cours d'algèbre 3[me] éd. I. p. 29-34. In den Schlussworten erwähnt der Verfasser nicht dieses, sondern eines früheren Beweises von Serret, der mit dem seinigen „auf gleichen Grundlagen ruhe". Es möge hier erwähnt werden, dass der Serret'sche Beweis nicht ganz scharf ist; dass aber H. E. da keine Verbesserung angebracht hat, wo sie nöthig war.

No.

E. Sang. On the extension of Brouncker's Method to the Comparison of Several magnitudes. Trans. of Edinburgh. XXVI. (I.) 59-67. 1869-1870.

Die Arbeit enthält ein kettenbruchähnliches Verfahren, näherungsweise in ganzen Zahlen das Verhältniss von drei oder mehreren incommensurablen Grössen zu finden. So ergeben sich die Werthe von log 5, log 3, log 2 successive gleich

1, 1, 1 .... 9, 28 etc.
: 0, 1, 1 .... 6, 19
: 0, 0, 1 .... 4, 12

Cly. (M.)

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

H. Fahland. Die Combinationslehre und der binomische Lehrsatz. Pr. Mühlhausen i. Th. 1869.

Herleitung des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten mit Hülfe der Combinationslehre, wie sich dieselbe bereits in mehreren Lehrbüchern findet. O.

A. Dronke. Binomial-Coefficienten. Pr. Coblenz. 1870.

Die bekannten Gesetze der Binomial-Coefficienten elementar hergeleitet. M.

Th. Gessner. Die Bedeutsamkeit der Binomialcoefficienten für den mathematischen Unterricht. Pr. Quakenbrück 1870.

Ernst Schröder. 4 combinatorische Probleme. Schlömilch Z. XV. 361-376. 1870.

Die beiden ersten Probleme betreffen die Frage, auf wie viel Arten sich eine Summe von n Gliedern, ohne die Reihenfolge derselben zu ändern, mit einander verbinden lasse, die Art wie z. B. bei B Gliedern, abc, wo man zuerst $a+b$ mit c oder a mit $b+c$ verbinden kann. Das Problem zerlegt sich in 2 andere, je nachdem man fordert, dass immer nur 2 Glieder gleichzeitig verbunden werden, oder auch Summen von mehreren Gliedern als selbständige Elemente zugelassen werden.

In den letzten beiden Problemen wird folgende Aufgabe behandelt:

A. Es sind n Elemente gegeben, von denselben werden zwei

beliebige durch Einschliessen in einen Kreis vereinigt und diese Verbindung also nun als neues den übrigen $n-2$ ursprünglichen aequales Element betrachtet, von diesen $n-1$ werden wieder 2 Elemente in derselben Weise vereinigt u. s. f., bis schliesslich ein 2-gliedriger Complex entsteht. Es fragt sich, wie viel Complexionen auf diese Weise erhalten werden und auf wie viel Arten dies geschehen kann.

B. Die n Elemente werden in Gruppen, jede von einer beliebigen Anzahl Elemente getheilt, jede einzelne Gruppe dann als selbständiges Element betrachtet und so fortgefahren. Die Frage stellt sich dann wie oben. Ni.

C. de Polignac. On a problem in combinations. Proc. of L. M. S. II. 69-74. 1869.

Es werden die Combinationen behandelt, welche gebildet werden, wenn man je n Zeichen aus den m Zeichen $a, b, c, \ldots$ $a', b', c', \ldots h, k, l, \ldots$ herausgreift, aber so, dass in einer Combination nicht 2 entsprechende, wie a und a' oder b und b'.. zugleich erscheinen. Nach einer Bemerkung von Jenkins ist die Anzahl gleich dem Coefficienten von x^n in der Entwickelung des Productes $[1+(a+a'+a''+\ldots)x]\,[1+(b+b'+b''+\ldots)x]\ldots$ $(1+hx)(1+kx)\ldots$ No.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869, Question 8. Messenger V. 51-53. 1869.

Die Anzahl der Arten, auf welche n Dinge so geordnet werden können, dass keins seine ursprüngliche Lage wieder einnimmt, ist von der Form $(n-1)A_n$, wo $A_1=0$, $A_2=1$, $A_n=(n-2)$ $A_{n-1}+(n-3)A_{n-2}$, oder

$$A_n=(n-1)A_{n-1}-\frac{1}{n-1}\left\{A_{n-1}+(-1)^{n-1}\right\}.$$

Glr. (O.)

William Walton. A Demonstration of the Expression for the Number of Homogeneous Products of n things of r dimensions. Quart. J. X. 219-220. 1869. He.

S. Hertzsprung. Forsóg paa in Fremstilling of Laren om Permutationen og Kombinationen. Tychsen Tisskr. (2) V. 97. 1869.

Eine elementare Darstellung zum Gebrauch beim Unterricht. Hn. (Wn.)

Ad. Steen. Bestemmelse af et Kort efler Omlagning i. Bunker und et Korts Bestemmelse ved Henforelse til en given Plads. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 1-14. 1870.

Zwei verschiedene Erweiterungen eines in Crelle's Journal Band 44. (1852) p. 317 aufgestellten Problems. In der ersten Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit folgender Frage: $n.p$ Karten sind in n Päckchen, jedes zu p Karten zusammengelegt. Jemand wählt eine bestimmte Karte und bezeichnet das Päckchen, in dem sie liegt. Dann lege man alle Päckchen so zusammen, dass das Päckchen mit der gewählten Karte einen bestimmten Platz erhält. Dann vertheile man die Karten von Neuem und lasse sich wieder das Päckchen bezeichnen, in dem die gewählte Karte liegt, lege dann wieder die Päckchen zusammen und wiederhole diese Operation eine bestimmte Anzahl von Malen, so kann man schliesslich jene Karte finden. — In einigen Fällen ist der Platz der Karte nicht völlig bestimmt, aber man hat höchstens unter zwei Karten zu wählen. Die Lösung beruht auf sehr einfachen elementaren Betrachtungen.

In der zweiten Erweiterung zeigt der Verfasser, wie man verfahren muss, um die Karte auf einen gegebenen Platz zu bringen. Hn. (Wn.)

Ad. Steen. Optaelling af hvert andet Kort i en Stamme i-en bestemt Orden. Tychsen T. (2) VI. 181-189. 1870.

Eine Aufgabe über die Anordnung einer gegebenen Zahl von Karten wird auf elementarem Wege gelöst. Hn. (Wn.)

F. J. Wrede. Om kombinerade lif räntors beräknande. Öfv. af Forh. Stockholm 1869.

Der Verfasser giebt eine neue Näherungsmethode zur Berechnung der combinirten Renten; dabei wird die Simpson'sche Formel angewandt. Hn. (Wn.)

A. Dorna. Sulla media aritmetica nel calcolo di compensazione. Atti di Torino IV. 1869. Jg.

A. Frost. General solution and extension of the problem of the 15 school girls. Quart. J. XI. 26-37. 1870.

Eine Aufgabe aus der combinatorischen Analysis. Mz.

C. Seidelin. Beviser for A Par Saetninger i Permutationer Kombinationer. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 20-22. 1870.
Hn.

Mansion. Sur le problème des partis. Mém. cour. de Belg. 8°. XXI. 1870.

Nach Ableitung einiger Formeln über Combinationen beweist der Verfasser folgende von Laplace herrührende Formel:

$$\varphi(m+1,0)+u\cdot\varphi(m,1)+u^2\cdot\varphi(m-1,2)+\dots+u^n\cdot\varphi(m+1-n,n)$$
$$=(1+u)^n\cdot\left[\varphi(m-n,0)+\frac{u}{1+u}\cdot\varphi(m-n,1)+\frac{u^2}{(1+u)^2}\cdot\varphi(m-n,2)+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{u^n}{(1+u)^n}\cdot\varphi(m-n,n)\right],$$

wo

$$\varphi(a,b)=\frac{1.2.3\dots(a+b)}{1.2.3\dots a.\,1.2.3\dots b}\text{ ist.}$$

Er benutzt die Formeln, um nachzuweisen, dass die von Poisson (Probabilité des jugements § 15 und 16) und Laplace (Théorie anal. des probabilités livr. II. § 7) aufgestellten Lösungen zu demselben Werthe der gesuchten Wahrscheinlichkeit führen.
O.

G. Zeuner. Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig. Felix. 1869.

Die erste Abhandlung: „Mathematische Untersuchungen über Sterblichkeit" behandelt die Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Menschen vom Alter x nach einem Jahre noch zu leben. Die Art der Behandlung ist auf geometrische Darstellung gestützt. In einem Raum-Coordinaten-Systeme seien die x auf der X-Axe, die Zeiten t (von Chr. Geb. ab gerechnet) auf der Y-Achse dargestellt. Die zum Punkte (x, t) ge-

hörige Z-Coordinate drücke „die verhältnissmässige Dichtigkeit" der zur Zeit t vom Alter x Lebenden aus. Die Kenntniss der Fläche $z = f(x, t)$ liefert die Lösung aller hierher gehörigen Aufgaben. Sie schneidet 1) die YZ-Ebene in einer Curve $f(c, t)$, welche die verhältnissmässige Dichtigkeit der Geburten anzeigt; 2) die XY-Ebene in $f(x, t) = o$, welche die Zeit des Absterbens angiebt; eine Ebene $t = t_0$ in einer Curve, welche das Absterben der zur Zeit t_0 Geborenen darstellt; 3) eine der Z-Axe parallele und die X- und Y-Achse unter 45° schneidende Ebene in einer Curve, deren Projection auf die YZ-Ebene die Gesammtheit der zur Zählungszeit τ lebenden Personen repräsentirt. Wir übergehen die Einzelheiten, die expliciten Formeln, die verschiedenen „Gesammtheiten der Lebenden oder Gestorbenen" u. s. w. Wird an Stelle von $f(x, t)$ eine Tangentenebene betrachtet, so ergiebt sich eine Reihe von Näherungsformeln. Verwandelt man den Theil des von der Fläche begrenzten Volums, der zwischen x_1, x_2; t_1, t_2 liegt, in einen Cylinder über der Begrenzungsebene als Basis, welche näher der XZ-Ebene und paralell der Z-Achse liegt, so drückt die Höhe desselben die mittlere Lebensdauer eines x_1-Jährigen für die Zeit t_1 aus. Dieser Begriff könnte mit grösserer Berechtigung als die Geburtenmenge zum Masse der Lebenskraft einer Generation dienen.

Die folgenden Untersuchungen behandeln die Fragen über Invalidität bei Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern. Hierüber galten bisher folgende Hypothesen:

Erstens die von Heym, welche auf eintretende Personen keine Rücksicht nimmt und die austretenden und sterbenden gleichmässig über das ganze Jahr vertheilt; zweitens die von Wittstein, nach der die Ein- und Austretrenden sich gleichmässig über die Zeit vertheilen. Zeuner stellt folgende neue Hypothese auf: da die Vertheilung der Lebenden nach ihrem Alter in einer Gesellschaft ungefähr dieselbe sein wird, wie ausserhalb derselben, so kann man die Ordinaten der den Eintritt und Austritt bezeichnenden Curven der Mortalitätscurve proportional annehmen. Hieraus ergiebt sich $a_1 = p\left[a + \frac{2(b-c)}{1+p}\right]$; a Anzahl der anfangs vorhandenen m-jährigen, b der Ein-, c der Austre-

tenden; a_1 Anzahl der nach der Zeit t in der Gesellschaft befindlichen, p Wahrscheinlichkeit eines m-jährigen nach t Jahren zu leben. Ist die Gesellschaft geschlossen ($b=0$), so erfolgt das Ausscheiden durch Invalidität oder durch Tod. Sei $\frac{c}{a}=q$ die Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahre invalid zu werden, $\frac{a_1}{a}=w$ die Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahre zu leben und nicht invalid zu sein ($t=1$), so ist eine Invaliditätstabelle mit 8 Eingängen für das Alter m aufgestellt: 1) Wahrscheinlichkeit am Ende des Jahres zu leben p, 2) invalid zu werden q, 3) zu leben und nicht invalid zu sein $w=p-\frac{2pq}{1+p}$, 4) zu leben und invalid zu sein $p-w$; 5) im Laufe des nächsten Jahres zu sterben $1-p$, 6) invalid zu werden und zu sterben $w+q-p$, 7) zu sterben ohne vorher invalid gewesen zu sein $1-w-q$; 8) überhaupt in Zukunft noch invalid zu werden. — Genau in ähnlicher Weise können Heirathstabellen entworfen werden, indem der Austritt aus der Zahl der Unverheiratheten entweder durch Heirath oder durch Tod geschieht.

Die dritte Abhandlung „Mathematische Grundlagen der Unfallsversicherung" bietet hauptsächlich eine Kritik der bestehenden Prinzipien sowie neue Vorschläge. Besonders würde der Abschnitt über Versicherung gegen Eisenbahnunfälle und Kriegsgefahr eingehende Betrachtung verdienen. No.

M. Kanner. Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik. Annalen des gesammten Versicherungswesens. 1870. I. No. 20—24.

Die eben besprochene Arbeit hatte einen unerquicklichen Streit hervorgerufen, auf dessen Boden der Aufsatz von Kanner steht. Wir können hier natürlich nur die wissenschaftliche Seite desselben berücksichtigen. — In der 2. Abhandlung hatte Zeuner für das Eintreten und für das Austreten in Gesellschaften 2 verschiedene Functionen eingeführt. Kanner vereinfacht und verallgemeinert die Untersuchung in folgender Weise: $F(t)$ gebe den Bestand der Gesellschaft zur Zeit t an, wobei aber die Ge-

storbenen mitzuzählen sind, so dass man also $F(t)$ erhält, wenn man zu $F(0)$ die Hinzugekommenen zu- und die Abgegangenen abrechnet; $f(t)$ die Wahrscheinlichkeit einer zur Zeit $t=0$ vorhandenen Person, den Zeitpunkt t zu erleben; $\varphi(t)$ den Bestand an Lebenden zur Zeit (t), dann ist

$$\varphi(t)=f(t)\left(F(o)+\int_0^t \frac{F'(t)}{f(t)}dt\right);$$

$$\log f(t)=\log\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}-\int_0^t \frac{F'(t)}{\varphi(t)}dt;$$

$$F(t)=\varphi(0)-\int_0^t \frac{f'(t)}{f(t)}\varphi(t)\,dt.$$

Wir übergehen noch ein anderes, ähnlich behandeltes Problem, welches ebenso wie das besprochene ein Specialfall des folgenden ist, in dem die gegenseitigen Störungen unabhängiger Sterblichkeitsursachen behandelt werden. Man denke sich n von einander unabhängige Ereignisse $f_1, f_2, .. f_n$ und die resp. Wahrscheinlichkeiten ihres Eintreffens im Laufe der Zeit t durch $f_1(t), .. f_n(t)$ ausgedrückt. Seien ferner $F_1(t), .. F_n(t)$ die Funktionen, welche die resp. Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, dass das Ereigniss $f_1, .. f_n$ vor allen übrigen innerhalb der Zeit t eintreffen werde und es bedeute $F(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass keins von allen Ereignissen während der Zeit t eintreffen werde, so dass $F(t)=(1-f_1(t))..(1-f_n(t))$, so ist auch $F(t)=1-(F_1(t)+\cdots+F_n(t))$. Man hat ferner $\frac{f'_\lambda(t)}{1-f_\lambda(t)}=\frac{F'_\lambda(t)}{F(t)}$, $(\lambda=1,2,..n)$, welches System von Differentialgleichungen die Lösung des Problems enthält: aus dem beobachteten Zusammenwirken von Ursachen auf die unabhängigen Ursachen zu schliessen. Schliesslich wird noch die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer bestimmten Reihenfolge von Ereignissen untersucht. No.

M. Kanner. Grundlage zu einer Theorie des mittleren Risiko bei Lebensversicherungen. J. d. Coll. f. Lebensversicherungswiss. 1870.

Die vorliegende Arbeit ist eine Erweiterung der in der deutschen Versicherungs-Zeitung vom Jahre 1867 von demselben Verfasser veröffentlichten Arbeit über das mittlere Risiko. Letz-

tere war dem Referenten leider nicht zugänglich, daher er des Nähern den Fortschritt in der neuen Arbeit nicht zu beurtheilen wagt. O.

D. Regis. Tavole grafiche atte a risolvere ogni quesito relativo agl' interessi composti ed alle annuitá. Torino. Joa. 1869.

Diese graphischen Tafeln geben die Werthe von $(1+r)^n \cdot 100$, $\frac{(1+r)^n-1}{r} \cdot 100$, $\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n-1} \cdot 100$ für die Werthe von r zwischen 0 und 10% und die Werthe von n zwischen 0 und 100.

Jg. (O.)

M. W. Crofton. On the proof of the law of errors of observation. Trans. of London CLIX. 175-187. 1869.

Zweck der Arbeit ist, einen mathematischen Beweis in allgemeinster Form für das Gesetz der einzelnen Beobachtungsfehler zu geben, unter der Voraussetzung, dass gewöhnlich ein Fehler durch das Zusammenwirken einer grossen Reihe unabhängiger Fehlerquellen entsteht, die, wenn sie nur vereinzelt wirkten, Fehler von ausserordentlicher Kleinheit verursachen würden im Vergleich zu denen, welche durch das Mitwirken aller übrigen Quellen entstehen. Cly. (M.)

Isaac Todhunter. On the method of least squares. Trans. of Cambridge. XI. (II.) 219-230. 1869.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, für eine beliebige Anzahl von Elementen einen Satz zu beweisen, der von Laplace (Théorie des Probabilités, p. 324 der ersten Ausgabe, p. 355 der édition du gouvernement) aufgestellt, aber nur für resp. 1 Element und 2 Elemente bewiesen ist. Es handelt sich dabei um folgendes Problem: „Ist eine Reihe von s Beobachtungen gemacht und jede mit einem unbekannten Fehler behaftet, nennen wir der Reihe nach diese Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_s$ und bilden, nachdem wir sie resp. mit den bestimmten Constanten $p_1, p_2, p_3, \dots p_s$ multiplicirt haben, die Summe

$$E_p = p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2 + p_3 \varepsilon_3 + \cdots + p_s \varepsilon_s,$$

und ebenso eine andere Summe

$$E_q = q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 + q_3 \varepsilon_3 + \cdots + q_s \varepsilon_s$$

u. s. w., überhaupt eine bestimmte Anzahl solcher Summen: so soll die Wahrscheinlichkeit gesucht werden, dass E_p, E_q etc. gleichzeitig vorgeschriebene Werthe annehmen". Cly. (M.)

M. W. CROFTON. On the theory of local probability. Proc. of Lond. M. S. II. 54-57. 1869.

Ein Auszug aus der in den Trans. of London CLVIII. 181 bis 199 enthaltenen Arbeit. Siehe Fortschr. d. M. I. 75-78.

M.

J. LÜROTH. Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. Astr. Nachr. LXXIII. 187-189. 1869.

Siehe Abschnitt XII. Cap. 2.

P. TCHÉBYCHEF. Formule d'interpolation par la méthode des moindres carrés. Mém. cour. de Belg. 8°. XXI. 1870.

Appendice au: „N. Majewski, Mém. sur les expériences faites à l'établissement de M. Krupp à Essen au mois de novembre 1867, pour déterminer les pressions des gaz de la poudre dans l'ame des bouches à feu". Die Note enthält die Formeln, die der Verfasser angewandt hat, um die Glieder der Reihe

$$u = F(x)[K_0 \psi_0(x) + K_1 \psi_1(x) + \cdots]$$

zu berechnen, als es sich darum handelte, die Coefficienten a, b, c... von $u = F(x)[a + bx + cx^2 + \cdots]$ aus den Werthen $u_1, u_2, \cdots u_n$ für $x_1, x_2, \cdots x_n$ zu bestimmen. O.

WILLIAM WALTON. On the expression of a certain function in the form of a series. Quart. J. X. 87-93. 1869.

Der durch die Gleichung

$$2\int_0^P e^{-\frac{z^2}{h^2}} dz = \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{h^2}} dz = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} h$$

bestimmte Werth von P, welcher in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielt, wird in eine Reihe entwickelt.

He.

G. Santini. Compendiato esposizione del modo più vantaggiosa di risolvere una serie di equazioni lineari, risultanti da operazioni tutti ugualmente probabili, per la determinazione degli elementi di una proposta teorica. Mem. d. Ist. Venet. XIV. 1870. Jg.

F. Minding. Ueber eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bull. de St. Pét. XIII. 203-208. 1869.

Lösung der Aufgabe: Wie viele von sämmtlichen in einer gewissen Zeit zur Erde gefallenen Sternschnuppen werden im Gesichtsfelde eines beliebig aufgestellten Fernrohrs erscheinen? Vorausgesetzt ist dabei, dass alle Anfangspunkte und Richtungen, sowie alle zwischen zwei gegebenen Grenzen liegenden Längen der Flugbahnen gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

B.

V. Neovius. Särobok i minsta quadrat-methoden. Åbo 1870

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

Fr. W. Barfuss. Lehrbuch der mathematischen Analysis besonders in Hinsicht ihrer Entwickelungsmethoden. Zweite unveränderte Ausgabe. Berlin 1869.

Ein unveränderter Abdruck der im Jahre 1852 erschienenen ersten Auflage. M.

K. Koppe. Anfangsgründe der algebraischen Analysis. Essen. Bädecker. 1870.

Das Buch ist für den Schulunterricht bestimmt, und bei dem täglich wachsenden Umfange der mathematischen Wissenschaften ist der Zweck sicher anerkennenswerth, in den Schulen bereits die Grundzüge der sogenannten höheren Mathematik zu geben. — Der erste Abschnitt des Buches enthält Ergänzungen zur Arithmetik und giebt eine elementare Methode zur Berechnung der Maximal- und Minimalwerthe. — Im zweiten Abschnitte, der eine Einführung in die Theorie der Gleichungen giebt, wäre eine genauere Behandlung der complexen Grössen — leider noch immer die Achillesferse der Schüler! — vielleicht am Orte gewesen. No.

A. Winckler. Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. Wien. Ber. LXII. 356-394. 1870.

Siehe Abschnitt VII. Cap. 1.

C. Sardi. Su talune serie, ed applicazione all' aritmetica.
Battaglini. G. VII. 257-312. 1869.

Die Arbeit lässt sich kurz kennzeichnen als Ausnutzung mehrerer sehr geschmeidiger Zeichen, behufs Vereinfachung von Summen- und Product-Formeln. Die 139 Formeln — ungerechnet mannigfache Theoreme — wagen wir nicht aufzuzählen, zumal man häufig trotz der hübschen Beziehungen sich fragen möchte: wozu das? — Um aber wenigstens einen Begriff von der Abhandlung zu geben, Folgendes:

Die Divisoren von n, welche in der Reihe (a) $a_1, a_2, a_3, ..$ enthalten sind, seien a_{11}, $a_{12}, ..$; σ_n sei $= a_{11} + a_{12} + ..$; $\sigma_n^p = a_{11}^p + a_{12}^p + \cdot\cdot$; ν sei die Anzahl der $a_{1\nu}$; $\frac{n}{a_\lambda}$ der Complementarfactor zu a_λ; $\sigma_{1,2,n}$ sei die Differenz der Summe aller $a_{1,\nu}$ mit ungeradem, und der Summe aller $a_{1,\nu}$ mit geradem Complementarfactor; $\nu_{1,2,n}$ die Differenz der entsprechenden Anzahlen. Man erhält dann
$\Sigma \frac{a x^a}{1-x^a} = \Sigma \sigma_n x^n$; $\Sigma \frac{a x^a}{1+x^a} = \sigma_{1,2,n} x^n$; $\Sigma \frac{x^a}{1-x^a} = \Sigma \nu_n x^n$; $\Sigma \frac{x^n}{1+x^n} = \Sigma \nu_{1,2,n} x^n$. — Es seien dann $P_n^{(a)}$ die Zahl der Zusammensetzungen von n aus verschiedenen Gliedern der Reihe (a); $P_{1,n}^{(a)}$ die Anzahl der Zusammensetzungen, welche eine ungerade, $P_{2,n}^{(a)}$ der, welche eine gerade Anzahl von Gliedern enthalten; $P_{2,1,n}^{(a)} = P_{2,n}^{(a)} - P_{1,n}^{(a)}$; ähnlich $p_n^{(a)}$, $p_{1,n}^{(a)}$ u. s. w., wenn auch gleiche Glieder gestattet werden. Daraus folgt z. B. $\Pi(1-x^{a_\lambda}) = \Sigma P_{2,1,n}^{(a)} x^n$ u. s. w., eine Reihe von Sätzen betreffend die Zerlegung von Zahlen; Darstellungen der $P, \sigma, \nu ..$ als Determinanten. — Dann werden die Functionen ${}^pF(x^n) = x^n + 2^p x^{2n} + 3^p x^{3n} + \cdot\cdot$ und ${}^pf(x) = x^n - 2^p x^{2n} + 3^p x^{3n} - \cdot\cdot$ in ähnlicher Weise angewendet. Man findet z. B.

$$\Sigma \nu_n \cdot {}^{p+1} F(x^n) = \Sigma \left(\Sigma \left[\frac{n}{a_{1\nu}} \right]^{p+1} \right) \frac{x_n}{1-x^n}$$

und entsprechend

$$\Sigma \nu_{1,2,n} {}^{p+1} f(x^n) = \Sigma \left(\Sigma (-1)^{\frac{n}{a_r}+1} \left[\frac{n}{a_{1r}} \right]^{p+1} \right) \frac{x^n}{1+x^n}.$$

No.

A. Cayley. On the binomial theorem, factorials and derivations. Messenger V. 102-114. 1870.

Die Arbeit enthält einen Beweis des Binomialtheorems, der von den Einwänden, die Euler's Beweis anhaften, frei ist. Das Gesetz der Coefficienten wird zuerst durch wiederholte Multiplication bewiesen, und daraus dann der Binomialsatz selbst hergeleitet. Die Methode der wiederholten Multiplication wird auch gebraucht, um ein Product wie $(h-a)(h-b)(h-c)(h-d)(h-e)$, nach einer Reihe von Producten $(h-\alpha)(h-\beta)(h-\gamma)(h-\delta)(h-\varepsilon)$, $(h-\alpha)(h-\beta)(h-\gamma)(h-\delta)$, $(h-\alpha)(h-\beta)(h-\gamma)$, $(h-\alpha)(h-\beta)$, $(h-\alpha)$, 1 zu entwickeln; 2 specielle Fälle des Satzes werden bezeichnet. Die Coefficienten in dieser Entwickelung werden durch ein Verfahren erhalten, das sich in Arbogast's „Calculus of Derivations" findet und welches man als den Inductionschluss von n auf $n+1$ (rule of the last and last but one) bezeichnen kann. Das Verfahren und sein Zusammenhang mit Argobast's Derivationen wird erklärt. Ein Theil der Arbeit ist der Erläuterung gewidmet, weshalb die Gleichung $[m]^{r+s}=[m]^r[m-r]^s$, wo $[m]^r=m(m-1)\cdots(m-r+1)$, nicht in bestimmter Weise zu einer Ausdehnung der factoriellen Bezeichnung auf Bruchwerthe des Index dienen kann.

Glr. (O.)

Tröger. Ueber Summirung unendlicher Reihen. Pr. Danzig 1870.

Die Arbeit reproducirt Stirling's und Euler's Summirungsmethoden.

Ni.

R. Most. Ueber die Summirung gesetzmässig ausgewählter Reihenglieder. Grunert Arch. L. 239-240. 1869.

N. Jadanza. Sulle progressioni a due e a tre differenze. Battaglini G. VII. 17-23. 1869.

N. Jadanza. Sulle progressioni. Battaglini G. VII. 117-130. 1869.

Ist δ_k die Differenz des k^{ten} und $k+1^{\text{ten}}$ Gliedes einer Reihe, so nennt Jadanza dieselbe „eine Reihe mit n Differenzen", wenn $\delta_{kn+\lambda}=\delta_{(k+1)n+\lambda}$ (bei beliebig gegebenen $\delta_1, \delta_2, .. \delta_n$) ist. Löst

man diese Reihe in n arithmetische Reihen erster Ordnung auf, so ergeben sich unmittelbar die in der ersten und dem Anfange der zweiten Arbeit hergeleiteten Sätze. Zu Ende der zweiten Arbeit werden die Reihen höherer Ordnung behandelt, ebenso wie die figurirten und die Polygonalzahlen. No.

A. Vecchio. Sulle proporzioni e progressioni. Battaglini G. VII. 43-49. 1869.

Der Verfasser untersucht, unter welchen Bedingungen man die einzelnen Glieder einer arithmetischen Proportion mit einer ganzen Zahl durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzirung, Radicirung und Logarithmirung verbinden kann, und wann zwei arithmetische Proportionen durch die 4 ersten Operationen vereinigt werden können. Dasselbe wird für geometrische Proportionen gemacht. Ferner wird untersucht, wann eine arithmetische Progression eine solche bleibt, nachdem ihre Glieder durch die sieben genannten Operationen mit einer Zahl verbunden sind, und wann zwei solche Progressionen, addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt, wieder eine arithmetische Progression geben. Dieselbe Untersuchung wird für geometrische Progressionen durchgeführt. M.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

W. Walton. On an equation of mixed differences. Quart. J. X. 248-253. 1869.

Formale Ableitung der Reihen von Lagrange und Bürmann. Aus der letzteren wird noch eine Formel gewonnen, die mehrere Relationen zwischen den Binomialcoefficienten derselben Potenz liefert. St.

A. Winckler. Auszug aus der Abhandlung: „Der Rest der Taylor'schen Reihe". Wien. Ber. LIX. 533-548. 1869.

Siehe Fortschr. d. M. I. 84-85.

J. Thomae. Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe:

$$1+\frac{a_0\,a_1\,a_2}{1\cdot b_1\,b_2}x+\frac{a_0(a_0+1)a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{1\cdot 2\cdot b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)}x^2+\cdots$$

Clebsch Ann. II. 427-444. 1870.

Nach einigen einleitenden Betrachtungen über die hypergeometrischen Functionen h^{ter} Ordnung und deren Differentialgleichung geht der Verfasser auf die Functionen dritter Ordnung über und entwickelt Relationen zwischen den letzteren.

Wy.

L. Schläfli. Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe. Clebsch Ann. III. 286-295. 1870.

Ableitung der Fundamentalrelationen aus dem Integral

$$S=\int(x-A)^{a-1}(x-B)^{b-1}\cdots(x-F)^{f-1}dx.$$

Wy.

J. Thomae. Die Recursionsformel $(B+An)\varphi(n)+(B'-A'n)\varphi(n+1)+(B''+A''n)\varphi(n+2)=0$. Schlömilch Z. XIV. 349-367. 1869.

Die Differenzengleichung wird einmal integrirt, wodurch das wichtige Resultat hervorgeht, dass die Lösungen durch Integrale ausdrückbar sind, die zur Darstellung der hypergeometrischen Reihe benutzt zu werden pflegen. Wy.

J. Thomae. Beiträge zur Theorie der durch die Heine'sche Reihe

$$1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}x^2+\cdots$$

darstellbaren Functionen. Borchardt J. LXX. 258-281. 1869.

Wy.

F. Unferdinger. Die verschiedenen Darstellungen des Products $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\cdots(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$ als Summe von vier Quadraten. Wien. Ber. LIX. 455-464. 1869.

Ein Product von n Factoren, von welchen jeder die Summe

von vier Quadraten ist, kann im Allgemeinen auf 48^{n-1} verschiedene Arten in eine Summe von vier Quadraten transformirt werden.

Das ist das durch rein algebraische (nicht zahlentheoretische) Betrachtungen geförderte Resultat.

Zu dem Fermat'schen Satze, dass jede ganze Zahl als Summe von vier Quadraten dargestellt werden kann (die Null als ganze Zahl eingerechnet), fehlt mithin der Beweis, dass jede Primzahl einer solchen Zusammensetzung fähig ist.

Literatur für den letzteren:

Fermat: in den Anmerkungen zu Bachet's Ausgabe des Diophantus (Toulouse, 1670),
Euler: Nov. Comm. Petrop. T. V.,
Lagrange: Mém. de Berlin 1770,
Euler: Act. Petrop. T. I. 1777,
Jacobi: Fundamenta nova theoriae funct. ellipt., §. 40.
Le Besgue: Exercices d'analyse numérique. Paris 1859 p. 104.

Wy.

F. Unferdinger. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Wien. Ber. LX. 591-604. 1869.

Im Wesentlichen eine Fortsetzung der Arbeit, über welche im vorigen Jahrgang p. 90 berichtet ist, indem die Resultate derselben combinirt werden. Wy.

O. Schlömilch. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Schlömilch Z. XV. 134. 1870.

Bericht über die letztgenannte Arbeit Unferdinger's unter Hinweis auf die folgende. Wy.

O. Schlömilch. Ueber die harmonische Reihe. Schlömilch Z. XIV. 250-253. 1869.

In diesem Aufsatze wird mit Hülfe der Identität

$$\frac{1}{k^\mu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 x^{k-1}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\mu-1}dx$$

folgender Satz bewiesen:

„Wenn man aus der Reihe

$$\frac{1}{a^\mu}-\frac{1}{(a+1)^\mu}+\frac{1}{(a+2)^\mu}-\frac{1}{(a+3)^\mu}+\cdots,\ (\mu>0)$$

eine neue bildet, in welcher immer p positive und q negative Glieder auf einander folgen, so ist der Unterschied zwischen beiden Reihen gleich dem Grenzwerth von

$$\frac{1}{2\Gamma(\mu)}\cdot\frac{1}{(2n)^{\mu-1}}\int_0^1 \frac{y^{q+\frac{1}{2n}}-y^q}{n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)}y^{\frac{a}{2n}-1}\cdot\left[l\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{\mu-1}dy$$

für ein unendlich grosses n". Wy.

A. Enneper. Relationen zwischen einigen unendlichen Reihen. Schlömilch Z. XV. 47-55. 1870.

Eine grössere Anzahl von Relationen, die aus den Gleichungen

$$\pi\cdot\frac{e^{a\pi z}+e^{-a\pi z}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\pi\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{e^{-(2n-1-z)a\pi}+e^{-(2n-1+z)a\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{a}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2+n^2}\cos n\pi z,\ -1\leqq z\leqq 1,$$

$$\pi\cdot\frac{e^{a\pi z}-e^{-a\pi z}}{a^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\pi\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{e^{-(2n-1-z)a\pi}-e^{-(2n-1+z)a\pi}\right\}$$

$$=2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin n\pi z,\ 0<z<1,$$

durch Substitution verschiedener Werthe und durch Integration hervorgehen. Wy.

Ch. Lindmann. De seriebus quibusdam annotationes. Grunert Arch. L. 219-222. 1869. Wy.

B. Imchénietzky. Sur les fonctions de J. Bernoulli et l'expression de la différence entre l'intégrale aux dif férences finies et l'intégrale ordinaire dont les limites sont les mêmes. Mém. de Kasan. 1870.

Der Verfasser giebt einen elementaren Beweis der bekannten Euler'schen Reihe, indem er den Rest durch ein bestimmtes Integral ausdrückt. Es folgen einige Entwickelungen über die Summen ganzer Functionen. Ke. (O.)

J. Chió. Nota sulla formola sommatoria applicata al calcolo di $S\frac{1}{x}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}$. Atti di Torino V. 1870.

Nach Ableitung des Ausdrucks von $S\frac{1}{x}$ aus der Summen-

formel von Malmstén (Crelle J. XXXV. 1847) zeigt der Verfasser, dass diese Reihe divergent ist, dass sie aber nichts destoweniger zur Berechnung der Summe $S\frac{1}{x}$ dienen kann, wenn man nicht eine sehr grosse Näherung haben will. Nachdem darauf die Grenze des kleinsten Fehlers bestimmt ist, den man begeht, wenn man die Reihe zur Berechnung von $S\frac{1}{x}$ benutzt, wird die Anzahl der Glieder bestimmt, welche man nehmen muss, um die verlangte Summe bis auf einen Fehler, kleiner als $\frac{1}{10^x}$ zu berechnen, eine Zahl, die um so kleiner ist, je grösser x ist. Es wird bemerkt, dass die Formel für die Anwendung nur bequem ist, wenn x sehr gross ist, in welchem Falle die 3 ersten Glieder schon einen Näherungswerth von $S\frac{1}{x}$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{12x^2}$ geben. Der Verfasser schliesst seine kurze Note mit der Bemerkung, dass einige Fragen, die den von ihm aufgestellten analog sind, 1860 von Henri Limbourg behandelt sind in der Note: „Sur un point de la théorie de la formule de Stirling" (T. XXX. des Mém. des savants étrangers de l'Académie Belgique.). Während er jedoch eine elementare Methode angewandt hat, hat der Belgische Mathematiker seine Betrachtungen auf bestimmte Integrale gegründet. Jg. (O.)

E. Heine. Aus brieflichen Mittheilungen. Clebsch Ann. II. 187-191. 1870.

Die erste Mittheilung betrifft die Entwickelung von $\cos n\varphi$ für ein ganzes positives n nach Potenzen von $\cos\varphi$. Dieselbe geschieht durch Entwickelung der Identität: $\log(1-\alpha e^{i\varphi})+\log(1-\alpha e^{-i\varphi})=\log(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)$. Der Coefficient von $-\alpha^n$ links ist gleich $2\cos n\varphi$, und rechts erhält man dafür die verlangte Reihe. Ni.

E. Heine. Ueber trigonometrische Reihen. Borchardt J. LXXI. 353-365. 1870.

Siehe Abschn. VII., Cap. 1.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integral-Rechnung.

Capitel 1.

Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

STERN. J. Bertrand: Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies. Paris 1870. Gött. Anz. 1870. 1663-1676.

Diese Kritik des zweiten Theiles des Bertrand'schen Werkes spricht zuerst über die Ungleichheit in der Behandlung der Gegenstände und rügt die mangelhafte Anführung der Quellen. Hierauf folgt eine Angabe des Inhalts nach seinen Hauptzügen mit eingestreuten kritisirenden Bemerkungen (siehe die französische Literatur). M.

FR. W. BARFUSS. Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweite unveränderte Ausgabe. Berlin 1869.

Die erste Auflage dieses zweiten Theils des Lehrbuchs der „mathematischen Analysis" erschien bereits im Jahre 1854, und ist in der neuen Auflage nichts geändert. M.

A. v. TEGETTHOFF. Compendium der Differential- und Integralrechnung. Triest 1869.

Das Buch ist für die Bedürfnisse der österreichischen Marine-Akademie berechnet, und enthält als Einleitung die algebraische Analysis, dann die Elemente der höheren Analysis. Das Werk ist lediglich als Schulbuch zu betrachten; einigen Beweisen z. B. dem der Taylor'schen Reihe wäre doch etwas mehr Schärfe zu wünschen. Ni.

S. Spitz. Erster Cursus der Differential- und Integral-Rechnung. Lief. I. Leipzig, Winter 1870.

Das Referat erfolgt nach vollständigem Erscheinen.

Red.

Price. Treatise on infinitesimal calculus 2. edition. London, Macmillan. 1869.

Björling. Elementerna af algebraisken Analysen och Differentialkalkylen. Upsala. 1868.

Kritik siehe Grunert Arch. L. Lit. CLXXXXIX. 2-4. 1869.

Manilius. Note sur l'interprétation de la conception infinitésimale de Poisson. Rapport par E. Catalan. Bull. de Belg. (2) XXVII. 9-11. 1869.

Herr Manilius hatte der Belgischen Akademie eine Note zugehen lassen, die eine Vertheidigung der Poisson'schen Definition des unendlich Kleinen (siehe Mécanique, 2. éd. p. 11) enthielt. Herr Catalan erwähnt in seinem Bericht über diese Note die verschiedenen Definitionen, die im Laufe der Zeit aufgestellt sind, und macht zum Schluss auf die nach Herrn Catalan's Ansicht unberechtigte Unterscheidung von Grössen aufmerksam, die Herr Manilius in seinem Werke „Méthode infinitésimale, sans métaphysique et indépendante de la méthode des limites" aufgestellt hatte. O.

A. de Morgan (the late). On the root of any function and on neutral series. No. II. Trans. of Cambridge XI. (II.) 239-266. 1869.

Der erste Theil der Arbeit brachte folgendes Resultat: „Sind P und Q Funktionen von x und y, welche beide kein Maximum und Minimum zulassen, und nur in vereinzelten Punkten nicht gestatten, dx und dy als Functionen erster Ordnung von dP und dQ auszudrücken: so kann man $P=a$, $Q=b$ durch reelle, endliche oder unendliche Werthe von x und y auflösen; und P und Q sind solche Functionen, wenn $\varphi(x+y\sqrt{-1})=P+Q\sqrt{-1}$".

Der zweite Theil der Arbeit bezieht sich auf neutrale Reihen

und ist eine Fortsetzung der früheren Untersuchungen. Eine kurze Uebersicht über denselben zu geben, scheint unmöglich.

Cly. (M.)

A. S. GULDBERG. Om Dannelsen af nye Algorithmer i Infinitesimalregningen. Forh. af Christiania. Christiania 1869. 165.

In der Differentialrechnung bestimmt man den unendlich kleinen Zuwachs einer Function, während die unabhängige Variable sich unendlich wenig ändert. Aber man kann die unabhängige Variable noch auf andere Art variiren lassen. Man kann dieselbe mit einem Factor multipliciren, der der Einheit unendlich nahe kommt, und dann den zugehörigen Factor der Function suchen. Aus diesem Princip entsteht die „Quotientenrechnung" (calcul des quotiens) und als Umkehrung derselben die „Productenrechnung" (calcul des produits). Der Verfasser giebt für beide Rechnungsarten einige Entwickelungen nebst Anwendungen. Hn. (Wn.)

CAMILLO TYCHSEN. Grundprinciperne for Differentiation af Funktioner med een og to uafhaengige Variable. Til Brug ved Selvundervisning. Kjöbenhavn 1870.

Ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, das vorzugsweise zum Selbstunterricht bestimmt ist; es enthält eine grosse Menge von Problemen und Beispielen. Hn. (Wn.)

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

E. B. CHRISTOFFEL. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke 2[ten] Grades. Borchardt J. LXX. 46-70. 1870.

Ein jeder Differentialausdruck von der Form $\Sigma U dx_i \cdot dx_k$ als eine homogene ganze Function 2[ten] Grades der Differentiale

$dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_n$ betrachtet werden kann, so entspricht die Einführung neuer Variablen $x'_1, x'_2, \cdots x'_n$ der algebraischen Aufgabe der linearen Transformation eines solchen Ausdruckes. Der Verfasser beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen und durch welche Substitution ein derartiger gegebener Ausdruck in einen andern ebenfalls gegebenen verwandelt werden kann. Die Auflösung ist complicirter als das analoge algebraische Problem, da die für $d_{x_1}, d_{x_2}, \cdots d_{x_n}$ zu setzenden Ausdrücke den Integrabilitätsbedingungen zu genügen haben. Die hier gegebene Lösung hat den Zweck, ein auf die Abwickelung der Flächen bezügliches Problem auf ein Gebiet von n Dimensionen zu verallgemeinern. Ni.

E. B. Christoffel. Ueber ein die Transformation homogener Differential-Ausdrücke 2ten Grades betreffendes Theorem. Borchardt J. LXX. 241-245. 1869.

Die Notiz betrifft die Aufklärung eines Punktes in der eben besprochenen Arbeit.

Die Lösung des Problems hing von der Aufstellung von n absoluten Invarianten und eben so viel zugehörigen Formen ab. Der Verfasser bemerkt und beweist hier, dass die erste Bedingung schon ausreichend sei. Ni.

R. Lipschitz. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Variablen. Borchardt J. LXX. 71-102. 1869. LXXII. 1-56. 1870.

Die Arbeit stimmt in Zweck und Umfang mit den beiden vorhergehenden überein. Die Behandlung ist eine wesentlich verschiedene. Der Verfasser führt die Aufgabe auf Probleme der Variationsrechnung zurück. Besondere Aufmerksamkeit ist dem Falle geschenkt, wo eine gegebene homogene Function der Differentiale 2ten Grades sich in eine ähnliche mit constanten Coefficienten verwandeln lässt, eine Aufgabe, die mit der der Bestimmung derjenigen Merkmale übereinstimmt, welche nach Riemann's hinterlassener Schrift, „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen," den Raum im Gegensatze

zu anderen mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten kennzeichnen, deren Ausführung von Riemann aber nicht gegeben ist.

Ni.

R. Lipschitz. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. Borchardt J. LXXI. 274-287. 288-295. 1870.

In der ersten Abhandlung werden invariante Grössenverbindungen der Form $f(dx)$ und des Systems von Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ abgeleitet, wenn

$$f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}}$$

eine quadratische Form der Differentiale $dx_{\mathfrak{a}}$ bedeutet, deren Coefficienten in irgend einer Weise von den $x_{\mathfrak{a}}$ abhängen, und y_α beliebige von einander unabhängige Functionen der Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ sind. — In der zweiten Abhandlung wird der innere Zusammenhang zwischen dem Verfahren, durch welches man zu jenen gelangt, und der quadrilinearen Form ψ aufgedeckt, welche in demselben J. LXX. 83 definirt ist und eine Covariante von $f(dx)$ darstellt.

Wy.

A. Genocchi. Intorno ad un teorema di calcolo differenziale. Atti di Torino. IV. 1869.

Das Theorem, um das es sich handelt, drückt der Verfasser folgendermassen aus: „Es sei $\varphi(x, \alpha)$ eine Funktion zweier unabhängiger Variablen x und α; setzt man voraus, dass für die Werthe von x innerhalb eines gegebenen Intervalles und für die Werthe von α in der Nähe eines speciellen Werthes $\alpha = \alpha_0$ die partielle Derivirte der Funktion nach x bestimmt und endlich bleibe; setzt man ferner voraus, dass für $\alpha = \alpha_0$ diese Funktion eine Grenze $\psi(x)$ habe und dass auch diese Funktion $\psi(x)$ in dem Intervalle eine endliche und bestimmte Derivirte $\psi'(x)$ habe, so wird die partielle Derivirte $\varphi'_x(x, \alpha)$ für $\alpha = \alpha_0$ die Devirte $\psi'(x)$ zur Grenze haben". Dies Theorem ist bereits ausgesprochen von Blanchet (J. de Liouville VI. 1841), Duhamel (Eléments de calcul infinitésimal, 1856), Bertrand (Traité de calcul diff. 1864) und Serret (Cours de calcul diff. et intégr. 1868).

Aus den dortigen Beweisen, welche aus der bekannten Relation

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$$

hergeleitet sind, begreift man weder, wie die Bedingungen erfüllt sind, die für die Existenz dieser Relation nöthig, noch wie die Betrachtungen angewandt werden können, die zum Beweise angestellt sind. Der Verfasser nimmt sich deshalb vor, einen von den früheren verschiedenen Beweis dieses Theorems zu liefern, was ihm auch mit genügender Einfachheit gelingt. Ausserdem beweist der Verfasser, dass „die Grenze von $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ gleich $\frac{d^n y}{dx^n}$ ist". Jg. (O.)

R. Götting. Differentiation des Ausdrucks x^k, wenn x eine Function irgend einer unabhängig Veränderlichen bedeutet. Clebsch Ann. III. 276-285. 1870.

Der Verfasser gelangt zu dem Resultat:

$$\frac{d^n(x^k)}{x^k}=\Sigma\frac{k(k-1)\cdots\cdot(k+\lambda+1-n)}{1\cdot2\cdot3\cdots\lambda_1\cdot1\cdot2\cdots\lambda_2\cdots\cdot}\left(\frac{d^1x}{x}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{d^2x}{x}\right)^{\lambda_2}\cdots\cdot,$$

wo die Summe so zu nehmen ist, dass für jeden Werth von $\lambda=0, 1, 2, \ldots. n-1$ alle zugehörigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots.$ zu nehmen sind, welche die Gleichungen $\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\cdots=k$, und $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\cdots\cdot$ $=n$ erfüllen, und wo $d^n x=\frac{1}{1\cdot2\cdots n}\frac{d^n x}{dy^n}$ zu setzen ist. Ni.

F. Unferdinger. Die allgemeinen Differentialquotienten der Funktionen $e^{ax}\cos(\alpha+\beta x)$, $e^{ax}\sin(\alpha+\beta x)$, $x^a\cos[b\log(\alpha+\beta x)]$, $x^a\sin[b\log(\alpha+\beta x)]$ etc. Wien. Ber. LX. 605-630. 1869.

Das Princip, welches der Verfasser zur Darstellung neuer Differentialquotienten anwendet, besteht in Folgendem:

Es sei X eine Funktion von x mit dem Parameter c, deren n^{ter} Differentialquotient nach x, $X^{(n)}$ bekannt ist; setzt man nun $c=a+bi$ und bringt X auf die Form $Y+Zi$, wo Y und Z reell sind, dann wird $X^{(n)}=Y^{(n)}+iZ^{(n)}$; und man erhält also durch die Trennung des Reellen und Imaginären in $X^{(n)}$ den n^{ten} Diffe-

rentialquotienten der neuen Funktionen Y und Z. So werden aus $D^n e^{cx} = c^n e^{cx}$ die Ausdrücke $D^n(e^{ax} \cos bx)$ und $D^n(e^{ax} \sin bx)$ und durch die Substitution $x = p + qz$, $aq = m$, $bp = \alpha$, $bq = \beta$ die Ausdrücke: $D^n[e^{mx} \cos(\alpha + \beta x)]$ und $D^n[e^{mx} \sin(\alpha + \beta x)]$ ohne Schwierigkeit entwickelt. Die Gleichung $D^n x^m = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$ liefert ferner für $m = a + bi$ die Werthe der Differentialquotienten $D^n[x^a \cos(b \log x)]$ und $D^n[x^a \sin(b \log x)]$, indem das Product $\prod\limits_{r=0}^{r=n-1} (a - r + bi)$ durch die Substitution $a - r = \varrho_r \cos\vartheta_r$, $b = \varrho_r \sin\vartheta_r$ auf die Normalform:
$\varrho_0 \varrho_1 \cdots \varrho_{n-1} [\cos(\vartheta_0 + \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_{n-1}) + i \sin(\vartheta_0 + \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_{n-1})]$
gebracht wird.

Die Anwendung der Leibniz'schen Formel für die Differentiation der Producte auf die Funktion $x^a(\alpha + x)^{bi}$ und nachherige Einführung von βx statt x führt auf die Formeln für

$$D^n[x^a \cos(b \log(\alpha + \beta x))] \text{ und } D^n[x^a \sin(b \log(a + \beta x))].$$

Unter den folgenden Formeln heben wir den allgemeinen Ausdruck für $D^n \log F(x)$ hervor, wo $F(x)$ eine ganze Funktion m^{ten} Grades ist. Mit Hülfe der Gleichung

$$D^n \log(a + bx) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, b^n}{(a + bx)^n}$$

und der Waring'schen Formel zur Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung durch ihre Coefficienten wird gefunden:

$$D^n \log F(x) =$$
$$n! \sum \frac{(-1)^{s_1 + s_2 + \cdots + s_m - 1} \cdot (s_1 + s_2 + \cdots + s_m - 1)!}{s_1!\, s_2! \cdots s_m!} \cdot \frac{F'(x)^{s_1} \cdots F^{(m)}(x)^{s_m}}{1^{s_1} 2!^{s_2} \cdots m!^{s_m} F(x)^{s_1 + \cdots + s_m}},$$

wo die Summation sich auf alle ganzen positiven Werthe einschliesslich Null von $s_1, s_2, \cdots s_m$ bezieht, die der Gleichung $s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots + ms_m = n$ genügen.

In einer der Abhandlung beigefügten Note wird ein neuer Beweis für die Waring'sche Formel mitgetheilt, der darauf beruht, den Ausdruck $\sum\limits_k \log(1 - \alpha_k x)$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades bedeuten, auf zwiefache Art nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln, so dass die Coefficienten in der einen Entwickelung die verschiedenen Potenzsummen der Wurzeln bis auf Zahlenfactoren darstellen, in der

andern aus den Coefficienten der Gleichung zusammengesetzt sind. Für die Lösung des umgekehrten Problems, die Coefficienten einer Gleichung durch die Potenzsummen ihrer Wurzeln darzustellen, wird die nämliche Methode der doppelten Entwickelung auf den Ausdruck $e^{\sum_k \log(1-\alpha_k x)}$ angewandt.

Ref. muss bemerken, dass für das letztere Problem H. Kronecker in einer vor Jahren an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesung über algebraische Gleichungen dieselbe Lösung gegeben hat, während er sich zur Darstellung der Waring'schen Formel des Ausdruckes $\frac{d}{dx}\sum_k \log(1-\alpha_k x)$ als erzeugender Function bediente. Hr.

William Walton. On a theorem on maxima and minima. Quart. J. X. 253-262. 1869.

A. Cayley. Addition to Walton's theorem. Quart. J. X. 262-263. 1869.

Bedeutet $f(x)$ eine ganze Function von x mit reellen Coefficienten und erhält man

$$f(x)=P+iQ,$$

wenn man $x=u+iv$ setzt, so gilt der Satz:

Auf der Fläche $w=P$, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem u, v, w, beschreibe man eine Bahn, deren Projection auf die Ebene der u, v die Curve $Q=0$ ist. Dann ist die Höhe der Bahn ein Maximum oder Minimum für solche Punkte der Projection $Q=0$, und nur für solche, für welche diese Curve einen vielfachen Punkt gerader Ordnung besitzt.

Der Satz wird durch eine lange Analysis bewiesen.

Herr Cayley macht hierzu folgende Bemerkung:

Die Fläche $\omega=P$ besitzt keine Punkte, für welche ω ein eigentliches Maximum oder Minimum ist, die Fläche hat keine höchsten oder tiefsten Punkte, sondern nur Pässe, d. h. Punkte in denen die Tangentenebene horizontal ist, während die Fläche einen Sattel bildet. Die betrachtete Bahn, für die $Q=0$, hat dann zwei Zweige durch diesen Punkt, von denen der eine nach

beiden Seiten steigt, während der andere nach beiden Seiten fällt. Beide schneiden sich rechtwinklig.

Hierfür wird ein sehr einfacher Beweis geliefert, ausgehend von den fundamentalen Gleichungen

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx}.$$

He.

R. W. G. On geometrical methods in maxima and minima. Messenger V. 122-124. 1870.

5 Probleme werden durch Infinitesimalrechnung gelöst, nämlich 1) $PA+PB+PC$ und 2) $PA^2+PB^2+PC^2$ zu einem Minimum zu machen (P variabel), 3) das einer Ellipse eingeschriebene grösste Dreieck, 4) das einer Ellipse umschriebene kleinste Dreieck und 5) die kürzeste Tangente zwischen den Axen zu finden. Glr. (O).

G. B. Marsano. Sulla legge delle derivate generali delle funzioni di funzioni di più variabili indipendenti, e sulla teoria delle forme di partizione dei numeri interi. Genova 1870. Jg.

Capitel 3.

Integralrechnung.

A. Andréieffsky. Sur l'intégration des expressions différentielles homogènes avec quelques applications. Warschau 1869.

Die Differentialausdrücke, welche in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, sind ganze homogene Functionen in Bezug auf die Differentiale der unabhängigen Variabeln. Sie sind bereits von H. Raabe in seiner Differentialrechnung behandelt. Nach Ableitung der Resultate des H. Raabe fügt H. Andréieffsky einige specielle Entwickelungen hinzu und giebt Anwendungen derselben auf die Bestimmung der Form gewisser unbestimmter Integrale. Ke. (O.)

A. GENOCCHI. Dimostrazione di una formola di Leibniz e Lagrange e di altre formole affini. Atti di Torino. IV. 1869.

Die betreffende Abhandlung selbst ist in den Publikationen der Akademie noch nicht erschienen. Der Inhalt wird durch folgende Stelle der Note charakterisirt:

Die bekannte Reihe für die successive Integration eines Produktes wird bewiesen, indem von der Formel

$$\int^m f(x)dx^m = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x f(z)(x-z)^{m-1}dz,\ (m-1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m-1)$$

Gebrauch gemacht wird, welche die Möglichkeit giebt, die Convergenz der Reihe zu beurtheilen und einen Restausdruck zu bilden. Durch Ausdehnung dieser Formel auf gebrochene (positive) Werthe von m wird der Beweis auf Integrale mit gebrochenem Index ausgedehnt. In derselben Abhandlung werden einige andere Formeln bewiesen, von welchen der Verfasser glaubt, dass sie noch nicht bekannt sind. Es sind die folgenden:

$$\int^m pq\,dx^m = \Sigma[-m]_n \frac{d^{n-1}(u^n dp)}{dx^n}\int^{m+n} qu^{-n} dx^{m+n}$$

$$p\,d^m q = \Sigma[m]_n\left(-\frac{1}{u}\right)^n d^{m-n}(q d^{n-1} u^n dp)$$

$$p\int^m q\,dx^m = \Sigma[-m]_n\left(-\frac{1}{u}\right)^n \int^{m+n} q\frac{d^{n-1}(u^n dp)}{dx^n}dx^{m+n},$$

wo p, q, u 3 Funktionen von x anzeigen und $[m]_n$ allgemein den Coefficienten von x^n in der Entwickelung von $(1+x)^m$ bedeutet.

Jg. (O.)

O. SCHLÖMILCH. Ueber die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen, nach einer brieflichen Mittheilung von P. H. Schoute. Schlömilch Z. XV. 207-208. 1870.

O. Werner giebt im 18ten Theile des Grunert'schen Archives für den Werth des Ausdruckes:

$$\frac{d^n}{dr^n}\int_a^b f(x,r)\,dx$$

folgende Formel:

$$\int_a^b \frac{d^n f(x,r)}{dr^n}dx + \frac{d^n(bf(b,r)-af(a,r))}{dr^n}$$
$$-\left\{b\frac{d^n f(b,r)}{dr^n} - a\frac{d^n f(a,r)}{dr^n}\right\}$$

Diese Formel, welche auch in das Exposé de la théorie des intégrales définies von H. Bierens de Haan und in Schlömilch's Compendium aufgenommen ist, entbehrt jedoch, wie der Verfasser dieser Notiz nachweist, der Richtigkeit; es ist nämlich z. B. für den Fall, wo $n=2$ ist, noch hinzuzufügen:

$$-\frac{df(b,r)}{db}\left(\frac{db}{dr}\right)^2+\frac{df(a,r)}{da}\left(\frac{da}{dr}\right)^2.$$

Für höhere Differentialquotienten wird die Entwickelung sogar ziemlich complicirt.

Die Werner'sche Formel ist, wie der Verfasser nachweist, durch Verwechselung der partiellen Differentialquotienten: $\frac{df(b,r)}{dr}$, $\frac{df(a,r)}{dr}$ mit den totalen $\frac{df(b,r)}{dr}$, $\frac{df(a,r)}{dr}$ entstanden.

Ni.

F. Unferdinger. Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right)dx\,dy\,dz.$$

Wien. Ber. LXI. 105-119. 1870.

F. Unferdinger. Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right)dx\,dy\,dz.$$

Wien. Ber. LXI. 417-440. 1870.

Beide nach Aufgabe und Behandlungsweise im engsten Zusammenhange stehenden Arbeiten beschäftigen sich mit der Reduction der in den Titeln genannten dreifachen Integrale auf ein Doppelintegral, wenn der Integrationsraum in ihnen von zwei concentrischen Ellipsoiden, resp. ein- oder zweischaligen Hyperboloiden, von zwei parallelen Ebenen und von zwei sich schneidenden Ebenen begrenzt wird, deren Durchschnittslinie der zu der Richtung der parallelen Grenzebenen in Beziehung auf die Flächen zweiten Grades conjugirte Durchmesser ist, wobei die parallelen Grenzebenen so gewählt sind, dass sie elliptische Schnitte geben.

Es wird in beiden Fällen beziehentlich von den einfacheren Integralen

$$(1)\quad u=\iiint F(x^2+y^2+z^2,\ \alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz$$

$$(2)\quad u=\iiint F(x^2-y^2-z^2,\ \alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz$$

ausgegangen und für das erstere durch die Gleichungen:

$$(1a)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha p}{\varrho}-\dfrac{r\sin\vartheta\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}{\varrho} \\ y=\dfrac{\beta p}{\varrho}+\dfrac{r}{\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}\left\{\gamma\cos\vartheta+\dfrac{\alpha\beta}{\varrho}\sin\vartheta\right\}, \quad (\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}) \\ z=\dfrac{\gamma p}{\varrho}-\dfrac{r}{\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}\left\{\beta\cos\vartheta-\dfrac{\alpha\gamma}{\varrho}\sin\vartheta\right\}, \end{cases}$$

für das letztere durch die Gleichungen:

$$(2a)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha p}{\varrho}+\dfrac{r\sin\vartheta\sqrt{\alpha^2-\varrho^2}}{\varrho} \\ y=-\dfrac{\beta p}{\varrho}-\dfrac{r}{\sqrt{\alpha^2-\varrho^2}}\left\{\gamma\cos\vartheta+\dfrac{\alpha\beta}{\varrho}\sin\vartheta\right\}, \quad (\varrho=\sqrt{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}) \\ z=-\dfrac{\gamma p}{\varrho}+\dfrac{r}{\sqrt{\alpha^2-\varrho^2}}\left\{\beta\cos\vartheta-\dfrac{\alpha\gamma}{\varrho}\sin\vartheta\right\} \end{cases}$$

ein neues Coordinatensystem eingeführt, dessen Elemente p, q, r sind. Man erkennt leicht, dass dies letztere System von Gleichungen aus dem ersteren erhalten wird, wenn man für y, z, β, γ, r resp. $yi, zi, -\beta i, -\gamma i, ri$ einsetzt. Da diese Substitutionen hinreichen, um fast alle Resultate der zweiten Arbeit aus den entsprechenden der ersten abzuleiten, so beschränken wir uns hier darauf, den Entwickelungen der ersten zu folgen.

Aus (1a) folgen die Gleichungen:

$$\begin{matrix}\alpha x+\beta y+\gamma z=p\varrho \\ x^2+y^2+z^2=p^2+r^2\end{matrix}, \quad \frac{\beta(\alpha y-\beta x)+\gamma(\alpha z-\gamma x)}{\varrho(\gamma y-\beta z)}=tg\vartheta.$$

Die Substitutionsdeterminante von (1a) ergiebt sich $=r$, und somit geht das Integral (1) über in

$$\iiint F(p^2+r^2,\varrho p)\,dp\cdot r dr\cdot d\vartheta,$$

welches sich nach der Ausführung der Integration nach ϑ in ein Doppelintegral verwandelt. Erstreckt man nun die Integra-

tionen auf alle Werthe von p, r, ϑ, welche die Bedingungen erfüllen:

$$\varepsilon^2 < p^2 + r^2 < 1; \ \pm g_0 < p < g_1; \ \vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_1,$$

so erhält man dadurch das Integral (1) über einen Raum ausgedehnt, welcher von den beiden concentrischen Kugelflächen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2, \ 0 < \varepsilon < 1,$$

von den beiden parallelen Ebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \varrho, \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \pm g_0 \varrho$$

und von den beiden auf diese senkrechten und durch den Mittelpunkt der Kugelflächen gehenden Ebenen

$$\begin{matrix} (\varrho^2 - \alpha^2)x + (\gamma \varrho t_1 - \alpha\beta)y - (\beta \varrho t_1 + \alpha\gamma)z = 0 \\ (\varrho^2 - \alpha^2)x + (\gamma \varrho t_0 - \alpha\beta)y - (\beta \varrho t_0 + \alpha\gamma)z = 0' \end{matrix} \quad \text{wo} \quad \begin{matrix} t_0 = tg\vartheta_0 \\ t_1 = tg\vartheta_1 \end{matrix}$$

begrenzt ist.

Setzt man in dem Integrale (1) $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ statt x, y, z und $a\alpha, b\beta, c\gamma$ statt α, β, γ und multiplicirt mit abc, so erhält man

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \ \alpha x + \beta y + \gamma z\right) dx\,dy\,dz =$$

$$abc \iiint F(p^2 + r^2, \varrho p)\, dp \cdot r dr \cdot d\vartheta, \ \text{wo} \ \varrho = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2},$$

und indem man das dreifache Integral rechts in Beziehung auf p, r, ϑ zwischen denselben Grenzen wie oben nimmt, erhält man das Integral links auf alle Punkte x, y, z ausgedehnt, welche enthalten sind zwischen den Ellipsoiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon^2,$$

zwischen den parallelen Ebenen:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \varrho, \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \pm g_0 \varrho$$

und zwischen den beiden Ebenen:

$$bc(\varrho^2 - a^2\alpha^2)x + ac(c\gamma\varrho t_1 - ab\alpha\beta)y - ab(b\beta\varrho t_1 + ac\alpha\gamma)z = 0,$$
$$bc(\varrho^2 - a^2\alpha^2)x + ac(c\gamma\varrho t_0 - ab\alpha\beta)y - ab(b\beta\varrho t_0 + ac\alpha\gamma)z = 0,$$

deren Durchschnitt der zur Richtung der parallelen Grenzebenen in Beziehung auf die concentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide conjugirte Durchmesser ist.

Da $\alpha x + \beta y + \gamma z = \pm \varrho$ eine zu den parallelen Grenzebenen parallele Tangentialebene des ersten Ellipsoids darstellt, so

müssen g_1 und $g_0 \leqq 1$ sein, damit eines der Ellipsoide wenigstens von den parallelen Grenzebenen geschnitten wird. Je nachdem nun die Parallelebenen beide Ellipsoide oder nur die zweite dieser Ebenen beide Ellipsoide oder endlich beide Ebenen nur das erste Ellipsoid schneiden, d. h. je nachdem g_0 und $g_1 < \varepsilon$; oder $g_0 < \varepsilon$, $g_1 > \varepsilon$ oder g_0 und $g_1 > \varepsilon$, erhält man das betrachtete dreifache Integral durch folgende Doppelintegrale ausgedrückt:

$$abc(\vartheta_1 - \vartheta_0) \int_{\pm g_0}^{g_1} \int_{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \varrho p)\, dp \cdot r dr$$

$$abc(\vartheta_1 - \vartheta_0) \left(\int_{g_0}^{\varepsilon} \int_{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \varrho p) \right) dp \cdot r\, dr +$$

$$\int_{\varepsilon}^{g_1} \int_{0}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \varrho p)\, dp \cdot r\, dr$$

$$abc(\vartheta_1 - \vartheta_0) \int_{g_0}^{g_1} \int_{0}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \varrho p)\, dp \cdot r\, dr.$$

Setzt man $F = 1$, so erhält man das Volumen eines Körpers, das zwischen den obigen Grenzen enthalten ist, und in diesem Falle sind die Integrationen ausführbar. Aus den betreffenden Formeln heben wir nur den Fall $\vartheta_1 - \vartheta_0 = 2\pi$, $g_1 = 1$, $\varepsilon < g_0 = g < 1$ heraus, welcher als den Inhalt des von der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = \pm g \varrho$ aus dem Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ abgeschnittenen Segments giebt: $\frac{\pi}{3} abc (2 \mp 3g \pm g^3)$ (unabhängig von α, β, γ, also gleich für alle Ebenen, die das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = g^2$ berühren).

Die Reduction des Integrals:

$$u = \iiint F\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},\ \alpha x + \beta y + \gamma z\right) dx\, dy\, dz,$$

welche den Gegenstand der zweiten Abhandlung bildet, erhält man, wie schon erwähnt, am einfachsten, wenn man in dem Obigen überall yi, zi, $-\beta i$, $-\gamma i$, ri statt y, z, β, γ, r resp. einsetzt. In den Grenzbedingungen treten hier statt der Ellipsoide die zweischaligen Hyperboloide:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} - \frac{z^2}{c_2} = \varepsilon_0^2, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon_1^2$$

oder die einschaligen Hyperboloide:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\varepsilon^2, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

die parallelen Grenzebenen sind durch die nämlichen Gleichungen, wie oben gegeben, nur ist hier $\varrho=\sqrt{a^2\alpha^2-b^2\beta^2-c^2\gamma^2}$, und die Bedingung, dass ϱ reell sei, erfordert zugleich, dass die Schnitte der Parallelebenen mit den Hyperboloiden elliptische sind. Die Gleichungen für die sich schneidenden Grenzebenen endlich ergeben sich aus den entsprechenden für das obige Integral durch die angegebenen Substitutionen. Sie gehen ebenfalls durch den Mittelpunkt der concentrischen Hyperboloide und schneiden sich in dem zur Richtung der Parallelebenen conjugirten Durchmesser. Der transformirte Integralausdruck in p, r, ϑ lautet

$$abc(\vartheta_1-\vartheta_0)\iint F(p^2-r^2, \varrho p)\, dp \cdot r\, dr,$$

und was die Grenzen betrifft, so tritt auch hier eine Unterscheidung von 3 Fällen nach der Lage der parallelen Grenzebenen oder der Beschaffenheit von g_0 und g_1 ein, wenn die Grenzflächen 2schalige Hyperboloide sind; werden diese dagegen von einschaligen Hyperboloiden gebildet, mit welchen, wie ersichtlich, die Parallelebenen für jeden Werth von g_0 und g_1 reelle Schnitte geben, dann bedarf es keiner solchen Unterscheidung und man erhält:

$$u=(\vartheta_1-\vartheta_0)\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{p^2+\varepsilon^2}}^{\sqrt{p^2+1}} F(p^2-r^2, \varrho p)\, dp\cdot r\, dr.$$

Indem durch $\varepsilon_0=0$ und $\varepsilon=0$ der Asymptotenkegel als Zwischengrenzfläche eingeführt wird, erhält man durch Addition auch einen Ausdruck für das Integral u, wenn der Integrationsraum von dem zweischaligen Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\varepsilon_1^2$$

und dem einschaligen Hyperboloid:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

begrenzt wird, während die vier Ebenen dieselben bleiben.

Die Annahme $F=1$ führt auch hier auf eine Reihe von Ausdrücken für das Volumen eines zwischen obigen Grenzen

enthaltenen Körpers, welche hier wiederzugeben zu weit führen würde. Unter Anderem findet sich als Analogon zu dem oben erwähnten für das Ellipsoid geltenden Satze das Resultat, dass alle das zweischalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=g^2$$

berührenden Ebenen aus dem Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

das gleiche Volumen ausschneiden, und dass alle Schichten, welche durch diese Tangentialebenen mit je einer ihr parallelen durch den Mittelpunkt gehenden Ebene in dem einschaligen Hyperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

gebildet werden, ebenfalls gleiche Grösse haben.

Zum Schluss erwähnen wir noch die in der ersten Arbeit enthaltene Bemerkung, dass das allgemeinere Integral

$$\iiint F\left(x^2+y^2+z^2,\ \alpha x+\beta y+\gamma z,\ \frac{\beta(\alpha y-\beta x)+\gamma(\alpha z-\gamma x)}{\varrho(\gamma y-\beta z)}\right)dx\,dy\,dz$$

durch die Substitutionen (1a) in das Integral

$$\iiint F(p^2+r^2,\ \varrho p,\ tg\vartheta)\,dp\,r\,dr\,d\vartheta$$

transformirt wird, in welchem jedoch die Integration nach ϑ nicht mehr allgemein vollzogen werden kann. Hr.

F. Unferdinger. Ueber die beiden allgemeinen Integrale

$$\int x^n\cos[m\log(a+bx)]\,dx,\ \int x^n\sin[m\log(a+bx)]\,dx$$

und einige verwandte Formen. Wien. Ber. LIX. 437-454. 1869.

Aus den bekannten Formeln für

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \text{ und } \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

werden zunächst die Integrale

$$\int (e^{ax}-k)^n\cdot e^{ax}\cos bx\,dx \text{ und } \int (e^{ax}-k)^n\cdot e^{ax}\sin bx\,dx$$

unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl, durch Entwickelung der binomischen Potenz in geschlossener Form dargestellt, und aus diesen durch Anwendung der aufeinanderfolgenden Substitutionen $e^{ax}-k=z$, $z=bx$ die im Titel genannten Integrale hergeleitet. Durch Einführung von bi an die Stelle von b und Gleichsetzung des Reellen und Imaginären ergiebt sich sodann als Resultat sehr umfangreicher Entwickelungen noch die Darstellung der Integrale:

$$\int x^n e^{2m \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} \cdot \cos [m \log (a^2+x^2)]\, dx$$

$$\int x^n e^{2m \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} \cdot \sin [m \log (a^2+x^2)]\, dx.$$

Hr.

A. WINCKLER. Ueber einige vielfache Integrale. Wien. Ber. LX. 379-388. 1869.

Die Abhandlung enthält die Herstellung von allgemeinen Relationen zwischen mehrfachen bestimmten Integralen mit Hülfe bekannter Formeln für bestimmte einfache Integrale, und zwar beschäftigt sie sich mit einigen Fällen dieser Art, die sich auf Exponentialfunktionen beziehen. Es kommen hierbei, was das Verfahren betrifft, lediglich verschiedene Anordnungen der Integration desselben Ausdrucks zur Anwendung.

1. Es sei

$$X=\cos a_1 x_1 \cdot \cos a_2 x_2 \cdots \cos a_m x_m$$

$$Y=\cos b_1 y_1 \cdot \cos b_2 y_2 \cdots \cos b_n y_n$$

$$u=\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu, \text{ worin } c_{0,0}=0.$$

Der Ausdruck XYe^{-u} wird nach $x_1 x_2 \cdots x_m$, $y_1 y_2 \cdots y_n$ zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt.

Mit Hülfe der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-kz} \cos lz\, dz = \frac{k}{l^2+k^2}$$

lassen sich die n Integrationen nach y und ebenso die m Integrationen nach x, jede für sich, unmittelbar ausführen, und es ergiebt sich auf diese Weise eine Relation zwischen einem $m$fachen und einem $n$fachen Integrale; für $n=1$ erhält man ein $m$faches bestimmtes Integral durch ein einfaches bestimmtes Integral ausgedrückt.

2. X und Y behalten ihre vorige Bedeutung:

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu^2, \qquad c_{0,0} = 0.$$

Die Integration von XYe^{-u} nach allen x und y zwischen den Grenzen 0 und ∞ wird, wie im vorigen Falle, auf zwei verschiedene Arten ausgeführt und die Resultate einander gleichgesetzt. Hier gelingen die n Integrationen nach allen y mittelst der Formel

$$\int_0^\infty e^{-kz^2} \cos lz\, dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{l^2}{4k}},$$

während die m Integrationen nach allen x, wie im vorigen Falle, gefunden werden.

3.
$$X = x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2 - 1} \cdots x_m^{\alpha_m - 1}$$
$$Y = y_1^{\beta_1 - 1} \cdot y_2^{\beta_2 - 1} \cdots y_n^{\beta_n - 1}$$
$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu.$$

Die $m+n$fache Integration von XYe^{-u} nach allen x und y lässt sich wiederum auf zwei verschiedene Arten anordnen, indem einmal die Integration nach allen x, dann die nach allen y unmittelbar vollzogen werden kann. Die hierbei anzuwendende Formel ist:

$$\int_0^\infty z^{\beta-1} e^{-kz}\, dz = \frac{\Gamma(\beta)}{k^\beta}$$

Beide Resultate werden dann einander gleich gesetzt.

Aus der so hervorgehenden Relation wird durch Multiplikation beider Seiten mit $x_0^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\lambda-1} \cdot dx_0$ und Integration nach x_0 zwischen 0 und ∞ noch ein zweites Resultat abgeleitet. In den entwickelten Formeln sind viele hierher gehörige Relationen, die bereits früher gefunden sind (Cauchy, Journal de l'école polytechn. T. XVII. p. 154; Abel, Oeuvres compl. T. I. p. 96; Moigno, Calcul intégral p. 260), unter anderen auch die bekannte Relation zwischen den Euler'schen Integralen erster und zweiter Gattung als besondere Fälle enthalten. Hr.

A. Enneper. Reduction eines vielfachen Integrals. Schlömilch Z. XV. 121-124. 1870.

Das betrachtete Integral ist:

$$\varphi = \iint \frac{dx_1\, dx_2 \cdots dx_n}{(1 + A + 2\sum ax)(1 + B - 2\sum bx)},$$

wo
$$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2,\ B = b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2$$
$$\sum ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$
$$\sum bx = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1$$
für $n=2$ ist dasselbe bereits von H. Hermite (Annal. scientif. de l'école normale supérieure T. II. p. 49) gefunden.

Durch orthogonale Substitution und Einführung von trigonometrischen Functionen findet der Verfasser:
$$P = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}} Q}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$
wo
$$Q = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin u^n \sin v^{n-1}\, du\, dv}{MN},$$
$$M = 1 + A - 2(a \cos u + a' \sin u \cos v),$$
$$N = 1 + B - 2(b \cos u + b' \sin u \cos v) \text{ ist.}$$

Das Doppelintegral Q lässt sich berechnen, wenn man setzt:
$$Q = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n-1}\left(\frac{d^{n-1}R}{dz^{n-1}}\right)_{z=0},$$
$$R = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin u\, du\, dv}{(1 - z \sin u \sin v) MN},$$
wo sich R leicht in geschlossener Form entwickeln lässt.

Ni.

A. Steen. Om Ondrengen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af förrte Art. Skrifter, v. Kopenh. IV. 1869.

Der Verfasser stellt sich folgende Aufgabe: das Integral
$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}},\ R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$
auf die Form
$$C \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$
zu reduciren. Die hier gegebene Lösung unterscheidet sich von den bekannten Lösungen dadurch, dass man hier unmittelbar durch sehr einfache Substitutionen von der algebraischen Form auf die trigonometrische gelangt, ohne eine Substitution einzuführen, die die geraden Potenzen aus dem Polynom R fortschafft.

Hn. (Wn.)

R. MOST. Ueber drei Integrationen innerhalb des Gebildes

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\cdots=1.$$

Schlömilch Z. XIV. 422-426. 1869.

Erweiterung zweier Sätze von Dirichlet und Schlömilch, wenn die Integration über alle Werthe von $x, y, z, u, \ldots$ erstreckt wird, welche die linke Seite obiger Gleichung < 1 belassen.

Wy.

O. SCHLÖMILCH. Ueber rectificable Curven. Schlömilch Z. XV. 124-126. 1870.

Aus der Identität:

$$(u+\sqrt{2uv})^2+(v+\sqrt{2uv})^2=(u+\sqrt{2uv}+v)^2$$

wird eine Rectificationsmethode abgeleitet.

Der Verfasser setzt die rechtwinkligen Coordinaten:

$$x=A+\varphi(t)+\int\sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)}\,dt$$

$$y=B+\psi(t)+\int\sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)}\,dt,$$

wo φ, ψ willkürliche Functionen, t eine Hülfsvariable ist; es ergiebt sich mittels der obigen Identität dann für den Bogen:

$$s=C+\varphi(t)+\psi(t)+\int\sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)}\,dt.$$

Man kann dann φ und ψ leicht so wählen, dass das in den 3 Formeln vorkommende einzige Integral in endlicher Form gewonnen werden kann.

Ni.

O. SCHLÖMILCH. Notiz über die Rectification von Curven. Schlömilch Z. XV. 215-216. 1870.

Ist für die Curve $y=\varphi(x)$ der Bogen $s=\psi(x)$, so ist auch

$$y_1=\mu\varphi(x)+\sqrt{\mu^2-1}\,\psi(x)$$

eine rectificable Curve.

Wn.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

A. Winckler. Ueber einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden. Wien. Ber. LX. 857-917. 1869.

Diese sehr reichhaltige Abhandlung beschäftigt sich vorzugsweise mit der Aufstellung allgemeiner Relationen, vermittelst welcher die Werthe der meisten schon bekannten und einer grossen Anzahl von neuen bestimmten Integralen mit Leichtigkeit gewonnen werden.

I. Aus der identischen Formel:

$$\frac{dF(u)}{dy}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dF(u)}{dx}\cdot\frac{du}{dy},$$

wo u eine beliebige Funktion von x und y, $F(u)$ eine für alle hier in Betracht kommenden Werthe von u endlich und stetig bleibende Funktion von u ist, erhält man, wenn für u einer der Ausdrücke: $x+y, xy, x^y$ genommen, und die Gleichung so umgeformt wird, dass der Faktor von $\frac{dF(u)}{dy}$ eine Funktion von x allein und der Faktor von $\frac{dF(u)}{dx}$ eine Funktion von y allein wird, durch doppelte Integration auf beiden Seiten nach y und x resp. zwischen den Grenzen a, b und α, β, folgende Relationen:

$$(1)\int_\alpha^\beta dx[F(x+b)-F(x+a)]=\int_a^b dx[F(x+\beta)-F(x+\alpha)]$$

$$(2)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}[F(bx)-F(ax)]=\int_a^b \frac{dx}{x}[F(\beta x)-F(\alpha x)]$$

$$(3)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x\log x}[F(x^b)-F(x^a)]=\int_a^b \frac{dx}{x}[F(\beta^x)-F(\alpha^x)],$$

wobei rechts überall für y, x gesetzt ist. Aus (1) wird nur ein einziges Resultat gezogen und zwar durch Anwendung der Substitution:

$$F(u)=\log\Gamma(u),\ \alpha=0,\ \beta=1$$

$$\int_0^1 \log\frac{\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+a)}dx=\int_a^b \log\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\cdot dx=b\log b-a\log a-(b-a),$$

und hieraus wird mit Benutzung der Eigenschaften der Gammafunktion die bekannte Formel gewonnen:

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+b)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi + b\log b - b,$$

rücksichtlich deren bemerkt wird, dass bei ihrer Herleitung, entgegen der üblichen, weder Reihenentwickelungen noch ein Uebergang vom Endlichen in's Unendliche vorkommt.

Die Substitutionen: $\beta=\infty, \alpha=0$ in (2) und $\beta=1, \alpha=0$ in (3) liefern die Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\{F(bx)-F(ax)\} = \{F(+\infty)-F(0)\}\cdot\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\{F(x^b)-F(x^a)\} = \{F(+1)-F(0)\}\cdot\log\frac{b}{a}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen werden durch Specialisirung der Funktion $F(u)$ eine Reihe bestimmter Integrale berechnet, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten müssen.

Neue Relationen zwischen Quadraturen gehen ferner aus der identischen Gleichung:

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}F(u)\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{du}{dx}F(u)\right)}{dy}$$

hervor, indem auf beiden Seiten die doppelte Integration nach x und y ausgeführt wird. Die Substitution $u=xy$, die allein angewandt wird, führt zu der Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta dx\{bF(bx)-aF(ax)\} = \int_a^b dx\{\beta F(\beta x)-\alpha F(\alpha x)\},$$

woraus man ableitet:

$$\int_0^\infty dx\{bF(bx)-aF(ax)\} = \left[tF(t)\right]_0^\infty \log\frac{b}{a},$$

falls $\beta x F(\beta x)$ für $\beta=\infty$ und $\alpha x F(\alpha x)$ für $\alpha=0$ endliche von x unabhängige Werthe erhalten.

Aus dieser, wie aus der folgenden, ebenfalls aus obiger Relation abgeleiteten Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\{bF(bx)-aF(ax)\} = (b-a)\int_0^\infty \frac{d\cdot(uF(u))}{u}$$

werden die Werthe einer neuen Reihe bestimmter Integrale ermittelt.

II. Es folgt dann die strenge Begründung der die Reduktion des bestimmten Integrals eines Produkts zweier Funktionen enthaltenden, von Weierstrass zuerst gefundenen Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx,$$

wo ξ einen Mittelwerth zwischen a und b. bedeutet, und $\psi(x)$ die beiden Bedingungen zu erfüllen hat, für $x=a$ zu verschwinden und zwischen den Grenzen a und b entweder nur zu wachsen oder nur abzunehmen.

Zur Herleitung dieser Gleichung wird die Formel benutzt:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx,$$

welche von Dirichlet (Crelle J. IV.) bereits für den Fall $a=0$ durch geometrische Betrachtungen erwiesen ist, vom Verfasser aber in der vorliegenden etwas allgemeineren Gestalt rein analytisch begründet wird.

Durch die Substitution von $\varphi(x)\cdot f(y)$ für $f(x,y)$, wo $f(y)$ zwischen den Grenzen a und b des Arguments endlich bleiben, und ihr Zeichen nicht ändern soll, geht die rechte Seite obiger Formel unter Anwendung eines bekannten Satzes der Integralrechnung über in:

$$\int_a^b \left\{f(y)\cdot\int_y^b \varphi(x)\,dx\right\} dy = \int_\xi^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_a^b f(y)\,dy.$$

Setzt man nun noch:

$$\int_a^x f(y)\,dy = \psi(x),$$

so erfüllt $\psi(x)$ die obigen Bedingungen, und die rechte Seite wird:

$$\psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx,$$

während die linke Seite in:

$$\int_a^b dx \left\{\varphi(x)\cdot\int_a^x f(y)\,dy\right\} = \int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx$$

übergeht, wodurch obige Gleichung bewiesen ist, selbst für den Fall, dass die darin vorkommenden Funktionen nicht analytisch gegeben sind.

Die weitere Untersuchung ist darauf gerichtet, unter gewissen Voraussetzungen für den Mittelwerth ξ engere Grenzen zu erhalten. Sie führt zu folgendem Ergebniss:

Erfüllt $\psi(x)$ die obigen Bedingungen und es ist

$$h = b - \int_a^b \frac{\psi(x)}{\psi(b)} dx,$$

so hat man,

1) wenn $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stets wächst, und $\varphi(h) \geqq 0$, oder wenn $\varphi(x)$ stets abnimmt und $\varphi(h) \leqq 0$:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(b) \int_{b+\varepsilon(h-b)}^b \varphi(x)\,dx$$

2) wenn $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stets wächst und $\varphi(h) \leqq 0$, oder wenn $\varphi(x)$ stets abnimmt und $\varphi(h) \geqq 0$:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(b) \int_{a+\varepsilon(h-a)}^b \varphi(x)\,dx,$$

$$0 < \varepsilon < 1.$$

III. Endlich werden mit Hilfe des Satzes über die Umkehrung der Integrationsfolge doppelter Integrale mit constanten Grenzen, durch Anwendung des discontinuirlichen Faktors und vermittelst einer Formel, welche den Rest der n ersten Glieder der Maclaurin'schen Reihe durch ein $n$faches Integral darstellt, mehrere bestimmte Integrale dem Werthe nach ermittelt.

Aus diesem ziemlich umfangreichen Theile der Arbeit heben wir Folgendes hervor:

1) Der von Poisson zuerst angegebene Werth für

$$\int_0^\pi dx \log(a^2 + 2a\cos x + 1)$$

wird aus dem Ausdrucke

$$\frac{2y + 2\cos x}{y^2 + 2y\cos x + 1}$$

durch doppelte Integration nach x und y resp. zwischen $0, \pi$ und $0, a$ und Umkehrung der Integrationsfolge hergeleitet, wobei das bekannte Resultat sich also ohne Benutzung unendlicher Reihen oder des Ueberganges vom Endlichen in's Unendliche ergiebt.

2. Aus den Werthen der discontinuirlichen Funktionen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos bx \sin xy, \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin bx \cos xy$$

werden die Gleichungen abgeleitet:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos bx \int_0^\infty f(y) \sin xy\, dy = \frac{\pi}{2} \int_b^\infty f(y)\, dy$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin bx \int_0^\infty f(y) \cos xy\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^b f(y)\, dy,$$

aus welchen die Gleichungen der Fourier'schen Doppelintegrale durch Differentiation nach b erhalten werden.

3) Der erwähnte Ausdruck für den Rest der n ersten Glieder der Maclaurin'schen Reihe lautet:

$$x^n \int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 \int_0^1 x_2^{n-2} dx_2 \cdots \int_0^1 x_{n-1}^{n-1} dx_{n-1} \int_0^1 f^{(n)}(x \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)\, dx_n.$$

Daraus werden die folgenden 2 Gleichungen abgeleitet:

$$\int_a^b X \left[f(x) - \left\{ f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n+1)!} f^{(n-1)}(0) \right\} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 dx_n \int_0^1 x_{n-1} dx_{n-1} \int_0^1 x_{n-2}^2 dx_{n-2} \cdots \int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 \int_a^b x^n X f^{(n)}(x \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) dx$$

und

$$\int_a^b X \left\{ f(0) + \frac{x}{n} f'(0) + \frac{x^2}{n(n+1)} f''(0) + \frac{x^3}{n(n+1)(n+2)} f'''(0) + \cdots \right\} dx$$

$$= (n-1)! \int_0^1 x_1^{n-2} dx_1 \int_0^1 x_2^{n-3} dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \int_a^b X f(x \cdot x_1 \cdots x_{n-1})\, dx,$$

wo X eine endlich bleibende Funktion von x bezeichnet.

Insbesondere wird die Gleichung:

$$\int_a^b X [f(x) - f(0)]\, dx = \int_0^1 dx_1 \int_a^b X f'(x x_1)\, dx,$$

welche aus der ersteren für $n = 1$ folgt, zur Werthbestimmung einer Anzahl neuer bestimmter Integrale angewandt. Hr.

H. Hankel. Beweis eines Hilfssatzes in der Theorie der bestimmten Integrale. Schlömilch Z. XIV. 436. 1869.

Der von H. du Bois-Reymond, Borchardt J. LXIX. (siehe Fortschr. d. Math. I. p. 101-105) angegebene Mittelwerthsatz

$$\int_a^b fx \cdot \varphi x \cdot dx = fa \int_a^\xi \varphi x \cdot dx + fb \int_\xi^b \varphi x \cdot dx; \quad b > \xi > a$$

wird auf neue und einfache Weise bewiesen. Zur Gültigkeit des

Satzes sind folgende Bedingungen zu erfüllen: fx muss von $x=a$ bis $x=b$ entweder nicht wachsen oder nicht abnehmen; $\int_u^b \varphi x\,dx$ bleibt stetig, wenn u von a bis b variirt. Kr.

J. W. L. Glaisher. On a theorem in definite integration. Quart. J. X. 347-356. 1870. Hierzu eine Anmerkung von Cayley.

Der Boole'sche Satz, von dessen Anwendungen der Aufsatz handelt, ist in der Formel dargestellt:

$$\left(\int_{p_1}^{q_1}+\int_{p_2}^{q_2}+\cdots\int_{p_n}^{q_n}\right)\varphi f(\psi)\,dx=\int_p^q f(v)\,\Theta[\varphi]\frac{\delta v}{v-\psi},$$

und zwar bedeuten φ und ψ rationale Functionen von x; p_1, $p_2,\cdots p_n$ und $q_1, q_2,\cdots q_n$ sind die Wurzeln von $\psi x=p$ und $\psi x=q$, und Θ ist das Operationszeichen, welches das um den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{\varphi}{v-\psi}$ nach absteigenden Potenzen von x verminderte Cauchy'sche Residuum derselben Grösse ausdrückt. Boole wendet die Formel auf den Fall an:

$$\psi=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\cdots\frac{a_n}{x-\lambda_n},$$

wo die a positiv, und die λ reell sind.

Es wird zuerst gezeigt, dass hier, wenn zur Rechten der Formel v alle reellen Grössen durchläuft, zur Linken x ein gleiches thut, dass also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi f(\psi)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\,\Theta\varphi\frac{\delta v}{v-\psi},$$

insbesondere für $\varphi=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\psi)\,dx=(a_1+a_2+\cdots a_n)\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\frac{\delta v}{v^2}.$$

Als Beispiele der Anwendung werden Summen unendlicher Reihen für ψ eingeführt, zuerst

$$\psi=\frac{\cot x}{x^2}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^3},$$

eine Function, deren bekannte Entwickelung die verlangte Form hat; desgleichen $\psi=\cot x$. Im dritten Beispiel wird

$$\psi=\frac{\varphi' x}{\varphi x}$$

gesetzt, wo φx eine ganze Function n^{ten} Grades ist. Es ergiebt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x}\right) dx = n\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\frac{dv}{v^2},$$

und insbesondere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\varphi x}{\varphi' x}\right)^2} dx = n\sqrt{\pi}.$$

Fernere Beispiele sind für die einfachsten Formen von φ aufgestellt. Als allgemeines Resultat wird noch erwähnt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi x\, f(\psi x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi u\, f\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

wo φx, Φu Brüche gleichen Grades in Zähler und Nenner, und die Coefficienten des letzteren Bruchs Funktionen der Coefficienten des erstern sind.

Setzt man

$$\psi = ax - \frac{a_1}{x-\lambda_1} - \frac{a_2}{x-\lambda_2} - \cdots \frac{a_n}{x-\lambda_n},$$

so ist bemerkenswerth, dass für jedes $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\psi)\, dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, dv$$

wird, während für $a = 0$ die ganz verschiedene, oben genannte Form dafür eintritt.

Schliesslich wird gezeigt, wie Boole sein Theorem aus einem noch allgemeineren ableitet.

In einer Anmerkung fügt Cayley einen besonderen Beweis für den Fall $\varphi = 1$ hinzu. H.

J. J. Nejedli. Note über die mehrfachen und willkürlichen Werthe einiger bestimmter Integrale. Pr. Laibach 1870.

Die Arbeit behandelt einige einfache Fälle von bestimmten Integralen, wo der Ausdruck unter dem Integralzeichen durch's Unendliche geht, welche in Cournot's und Moigno's Lehrbüchern vorkommen. Die Principien, dass z. B. ein Integral statt der algebraischen auch die numerische Summe der Elemente darstellen könne, sind wohl nicht ganz gerechtfertigt, der fragliche

Gegenstand aber durch neuere Forschungen als erledigt zu betrachten. Ni.

Zucchetti. Integrali simmetrici. Atti di Torino IV. 1869.

Kurze Note, in der, nach Aufstellung der Formel

$$\int_0^{c-\varphi(c)} F(x)\,dx = \int_{\varphi(c)}^{a} [F(x) - \varphi(x)]\,dx,$$

durch die Gleichung zweier endlichen Flächen, welche respective alle Elemente gleich haben, die in gleicher Entfernung von der Axe der x liegen, einige Anwendungen derselben auf die Auswerthung bestimmter Integrale gemacht werden. Jg. (O).

R. P. Note on a formula of Cauchy. Messenger V. 30-33. 1869.

Die Cauchy'sche Formel (Exercices de Math. I.) ist

$$\int_0^\infty x^{2n} f\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]dx = \int_0^\infty f(x^2)\,dx + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2}\int_0^\infty x^2 f(x^2)\,dx + \cdots;$$

aus dieser wird folgende Reduction eines bestimmten Integrals abgeleitet:

$$\int_0^\infty \frac{x^{4n}}{x^{4n}-x^{4n-2}-\cdots+1}\varphi\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

wo φ eine gerade Function sein muss.

3 Formeln auf p. 32 sind incorrect. Auf der linken Seite der Gleichung Zeile 9, 13, 14 ist $\varphi(x)$ geschrieben statt $\varphi\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Glr. (O.)

G. F. Meyer. Notiz über zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale. Clebsch Ann. III. 157-160. 1870.

Die betreffenden Integrale sind die bekannten:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$$

$$v = \int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}.$$

Der Verfasser bestimmt sie durch Integration einer linearen Differentialgleichung. Ni.

D. Besso. Sull' integrale $\int_0^\beta \frac{\sin^m x\, dx}{x}$. Battaglini G. VII. 210-212. 1870.

Durch Zerlegen von $\sin^{2n+1}x$ [wo n eine ganze Zahl ist] in eine Reihe, die nach den Sinus der Vielfachen von x fortschreitet, wird bewiesen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2n+1}x\cdot dx}{x} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{2^{2n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

woraus sich dann leicht folgende andere Formel ergiebt:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+3^2)\cdots[z^2+(2n+1)^2]} = \frac{1}{2^{2n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ferner wird

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin^{2n}x\cdot dx}{x}$$

ausgedrückt durch eine Reihe, deren einzelne Glieder die Form haben:

$$\text{Const.}\int_\alpha^\beta \cos bx \frac{dx}{x},\quad [b=0, 2, 4.., 2n].$$

Wn.

H. Mylord. Lösning af Opgave 270. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 47. 1870.

Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_0^\pi \frac{2a+(1+a^2)\cos\theta}{(1+2a\cos\theta+a^2)^2}\log(1+2a\cos\theta+a^2)\,d\theta.$$

Man setze zunächst

$$tg\frac{1}{2}\theta = x,$$

und dann

$$(1-a)x=(1+a)y,\ \text{wenn}\ a^2<1,$$

oder

$$(a-1)x=(a+1)y,\ \text{falls}\ a^2>1.$$

Nach diesen Substitutionen findet man den gesuchten Werth durch Differentiation nach a. Hn. (Wn.)

G. Dillner. Definite integraler af synektiska funktioner. Dillner Tidskr. III. 257. 1870.

Enthält nur Bekanntes. Hn. (Wn.)

E. Catalan. Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler et sur quelques intégrales définies. Mém. de Belg. XXXVII. 1-19. 1869.

Aus der Entwickelung

$$tg x = 4(4-1)\frac{B_1}{1\cdot 2}x - 4^2(4^2-1)\frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^3 + \cdots$$
$$\pm 4^q(4^q-1)\frac{B_{2q-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2q}x^{2q-1} \mp \cdots$$

leitet der Verfasser Relationen her, aus denen sich die durch die Gleichung

$$B_{2q-1} = \pm\frac{P_{2q-1}}{2(4^q-1)}$$

mit den Bernoulli'schen Zahlen zusammenhängenden P einfacher berechnen lassen, als aus einer von ihm früher (C. R. LVII. 1106) gegebenen Formel. Ferner findet der Verfasser mit Hülfe der Gleichung

$$P_{2q-1} = 8q(4^q-1)\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}dt}{e^{2\pi t}-1}$$

das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1}(e^{tx}-e^{-tx})^2(4e^{2tx}+7+4e^{-2tx}) = \frac{1}{4}tg^2 x,$$

welches für specielle x sehr viele bekannte bestimmte Integrale enthält. Durch die Substitution $x=\frac{\pi}{n}$ und $e^{tx}=\frac{1}{\sqrt{z}}$ werden neue bestimmte Integrale ausgewerthet.

Einen zweiten Gegenstand der Arbeit bilden die von Sylvester (C. R. LII. 161) so genannten Euler'schen Zahlen E, welche durch die Gleichung

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)}x^{2n}$$

definirt sind. Sie lassen sich ebenfalls durch ein bestimmtes Integral darstellen, nämlich

$$E_{2n} = 4^{n+1}\int_0^\infty \frac{t^{2n}dt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}},$$

analog der Plana'schen Formel für B_{2n-1}. Im Folgenden werden nun Relationen zwischen den Bernoulli'schen und den Euler'schen Zahlen hergeleitet, aus denen wiederum andere Darstellungen derselben durch bestimmte Integrale folgen.

In einem „Zusatz" stellt der Verfasser aus der Entwicklung

$$\frac{1}{\cos x}+tg\,x=\sum_0^\infty G_i\frac{x^i}{\Gamma(i+1)},$$

worin

$$P_{2n-1}=4^{\overline{n-1}}\,G_{2n-1},\quad E_{2n}=G_{2n}$$

ist, eine einzige Recursionsformel dar, welche zugleich die Bernoulli'schen und die Euler'schen Zahlen enthält. Für die G_i ergiebt sich das bestimmte Integral:

$$G_i=2^{i+2}\int_0^\infty\frac{e^{\pi\alpha}-(-1)^i e^{-\pi\alpha}}{e^{2\pi\alpha}-e^{-2\pi\alpha}}\alpha^i\,d\alpha.$$

M.

W. Roberts. Sur une intégrale double définie. Brioschi Ann. (2) III. 327-330. 1869.

Das Doppelintegral

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\,[\cos^2\vartheta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\varphi+\cos^2\beta\sin^2\vartheta\sin^2\varphi]\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

lässt sich durch die Substitution $\cos\vartheta=x$ zurückführen auf

$$U=-\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg} t\,d\varphi}{t},\quad t^2=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\sin^2\beta\sin^2\varphi}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\cos^2\beta\sin^2\varphi}.$$

Um dieses Integral zu finden, betrachtet der Verfasser das allgemeinere

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg} mt\cdot d\varphi}{t}.$$

$\frac{dV}{dm}$ lässt sich sofort integriren und man erhält V durch elliptische Functionen erster und dritter Gattung und Logarithmen, oder mit Hülfe einer Legendre'schen Reductionsformel durch ein Integral dritter Gattung und einen Logarithmus ausgedrückt. Der logarithmische Theil verschwindet für $m=1$, und wir erhalten:

$$U=\frac{\pi\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}\Pi(-k^2\sin\alpha,k,\alpha)-\pi,\quad k^2=1-\frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha}.$$

Mit Hülfe von geometrischen Betrachtungen und unter Anwendung elliptischer Coordinaten lässt sich das vorgelegte Doppelintegral auf ein Product einfacher Integrale reduciren.

M.

Hermite. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. Brioschi Ann. (2) III. 83. 1869.

Unter der Voraussetzung, dass $\sqrt{1-x^2}$ positiv ist, hat man

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

und für ein reelles a haben $\sqrt{a^2-1}$ und a gleiches Zeichen. Ist aber $a=A+B\sqrt{-1}$ und setzt man $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, so müssen α und A gleiches, β und B entgegengesetztes Zeichen haben. M.

J. W. Strutt. On the values of the integral $\int_0^1 Q_n Q_{n'} d\mu$, Q_n, $Q_{n'}$ being Laplaces coefficients of the orders n, n', with an application to the theory of radiation. Trans. of London. CLIX. 579-590. 1869.

Für eine Halbkugel sind die Grenzen 1,0. Der allgemeine Ausdruck wird erhalten als der Coefficient von $e^n e'^{n'}$ in einer bestimmten logarithmischen Function von (e, e'). Seite 584 wird eine Tabelle gegeben für die dem Werthe 1,1 von n, n' entsprechenden Werthe des Integrals. Cly. (M.)

Tchebycheff. Des fonctions semblables à celles de Legendre. J. de l. Soc. phil. de Moscou IV.

Bekanntlich kann man aus dem Werth des Integrals

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\,dx$$

die wichtige Eigenschaft der Legendre'schen Functionen X_0, $X_1, X_2, \ldots$ ableiten, die darin besteht, dass

$$\int_{-1}^{+1}X_n X_m\,dx=0,$$

wo n und m verschiedene Indices sind. H. Tchébyscheff be-

trachtet in seiner Note das allgemeinere Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(s, x)\, F(t, x)\, dx}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu},$$

wo

$$F(s, x) = \frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda \cdot (1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

ist. Nach Fortschaffung der Wurzeln reducirt sich das Integral auf

$$\int_0^1 \frac{z^{\lambda+\mu-1} \cdot (1-stz)^\mu}{z^\lambda (1-z^\mu) \cdot (1-stz)}\, dz.$$

Dies lässt sich in eine Reihe nach Potenzen des Produkts st entwickeln. Daraus leitet der Herr Verfasser folgenden Satz ab: „Sind

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \cdots$$
$$T_0 + T_1 t + T_2 t^2 + \cdots$$

die Entwickelungen der Functionen $F(s, x)$, $F(t, x)$, wo $T_0, T_1, \ldots$ ganze Functionen der Variabeln x sind, so genügen die Functionen $T_0, T_1, \ldots$ der Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m T_n}{(1-x)^\lambda \cdot (1-x)^\mu}\, dx = 0,$$

wo m und n verschiedene Indices sind". Z. (O.)

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Aloys Mayr. Construktion der Differentialgleichungen aus partikularen Integralen. Fortsetzung der Prolegomena zur Theorie der Integration. Würzburg, Kellner. 1870.

Auf seine frühere Schrift („Prolegomena z. Th. d. Integr." s. Fortschr. d. M. I. 118) Bezug nehmend, in welcher der Beweis geliefert sein soll, dass die Differentialgleichungen nicht durch direkte Operationen

integrirt werden können, glaubt der Verfasser die einzig wissenschaftliche und naturgemässe Methode für die Integration von Differentialgleichungen in der Construktion derselben aus partikularen Integralen gefunden zu haben. Es wird darunter die Herstellung von speciellen Differentialgleichungen verstanden, denen ein zum Voraus gewähltes partikulares Integral Genüge leistet. Da es dem Verfasser nur auf die Darlegung seiner Methode ankommt, so beschränkt er sich auf die Construktion linearer homogener Differentialgleichungen von möglichst einfachem Bau, sowie auch für die 3 Arten von Integralfunctionen, die zur Substitution dienen, — Exponentialfunctionen, bestimmte Integrale und bestimmte Differentiale — die denkbar einfachsten Formen gewählt werden. Hierbei begegnet es allerdings oft genug, dass die ausser dem gewählten noch vorhandenen $n-1$ partikulären Integrale der aus dem ersteren construirten Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, wenn n die Zahl 2 übersteigt, nicht angegeben werden können. Einer Berichtigung bedarf der Ausspruch, zu welchem sich der Verfasser durch den Umstand veranlasst sieht, dass bei einer linearen homogenen Differentialgleichung 2ter Ordnung mehr als 2 partikuläre Integrale gefunden werden. Derselbe lautet (p. 149): „Besteht die Lehre, dass eine (lineare homogene) Differentialgleichung nur n partikuläre Integrale haben könne, so müssen die übrigen als singulär genommen werden.... Dann müssen aber auch die Unterschiede festgestellt werden, die zwischen partikulären und singulären Integralen stattfinden". Nun, der in Zweifel gezogene Satz ist erstlich falsch citirt; nicht die Zahl der partikulären Integrale überhaupt, sondern die Zahl der von einander linear-unabhängigen Integrale beträgt gerade n und in dieser Form besteht der Satz allerdings; daraus würde dann zweitens folgen, dass etwaige noch hinzukommende Integrale entweder singuläre sind, oder mit den n ersteren in linearer Relation stehen müssen. Von diesen beiden Alternativen endlich findet aber nur die letztere statt, da es bekanntlich von linearen Differentialgleichungen überhaupt keine singulären Integrale giebt.

Wenn von nennenswerthen Resultaten nicht zu berichten ist, so ist zu bemerken, dass es dem Verfasser, wie er wiederholt

hervorhebt, um „materielle Resultate" nicht zu thun ist. Was indess seine dargelegte Methode der Construktion betrifft, so ist er darüber nicht in Zweifel, „dass sie schon bei diesem ihrem ersten Beginne eine reiche, unversiegbare, allen Zeiten unerschöpfliche Quelle der Erkenntniss öffnet, einen lebendigen Born der Wissenschaft, von dem das Wort gelten kann: multi pertransibunt et augebitur scientia". Hr.

F. Grelle. Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der operativen Symbole. Schlömilch Z. XV. 297-310. 1870.

Der Verfasser sucht die Aufmerksamkeit der deutschen Mathematiker auf die Vortheile zu lenken, welche die vornehmlich von französischen und englischen Mathematikern gepflegte Methode der Trennung der Operationszeichen bei der Behandlung der Differentialgleichungen rücksichtlich der Einfachheit und Uebersichtlichkeit der Resultate gewährt. Es wird nun zu diesem Behufe zunächst an gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten die Methode selbst, sowie der Nachweis ihrer Zulässigkeit dargelegt.

1) Ist die Differentialgleichung gegeben: $D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = f(x)$, wo $D^p y = \frac{d^p y}{dx^p}$ und $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ Constante sind, so setze man, indem man die Symbole D von y abtrennt:

$$N = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots a_1 D + a_0 = (D-k_1)(D-k_2)\cdots(D-k_n).$$

Dividirt man nun die Gleichung $Ny = f(x)$ durch $D-k_n$ und denkt sich in $\frac{Ny}{D-k_n}$ die Potenzen von D wieder einzeln mit y verbunden, $\frac{f(x)}{D-k_n}$ aber durch $e^{k_n x}\int e^{-k_n x} f(x)\,dx$ definirt, dann repräsentirt $\frac{Ny}{D-k_n} = \frac{f(x)}{D-k_n}$ eine Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welche die vorgelegte reducirt ist. Da sie die nämliche Beschaffenheit, wie diese hat, so kann die Reduction durch das Divisionsverfahren ebenso weiter fortgesetzt werden, bis auf der linken Seite nur noch y übrig bleibt. Die allgemeine Lösung

für y ergiebt sich auf diesem Wege schliesslich in einer Form, welche, was bemerkenswerth ist, den Fall vielfacher Wurzeln zugleich mit enthält, und die wir der Kürze wegen in folgender Weise schreiben:

$$y = \sum_{\mu, s} \frac{A_s^\mu f(x)}{(D-k_\mu)^s}, \text{ wo } \frac{f(x)}{(D-k_\mu)^s} \text{ in } e^{k_\mu x} \int^{(s)} e^{-k_\mu x} f(x)\, dx^s$$

umzusetzen ist, $\frac{A_s^\mu}{(D-k_\mu)^s}$ das allgemeine Glied bedeutet, welches man erhält, wenn man $\frac{1}{N}$ in Partialbrüche zerlegt. Ist die Anzahl der verschiedenen Wurzeln $= r$ und sind s_μ Wurzeln $= k_\mu$, so durchläuft μ die ganzen Zahlen von 1 bis r, s die ganzen Zahlen von 1 bis s_μ.

Im Falle lauter ungleicher Wurzeln erhält man die bekannte Lösung:

$$y = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{k_p x}}{N'_p} \left\{ \int e^{-k_p x} f(x)\, dx + C_p \right\}, \text{ wo } N'_p = \left| \frac{dN}{dD} \right|_{D=k_p}.$$

2) Für die partielle Differentialgleichung:

$$D^n z + a_{n-1} D^{n-1} D_1 z + a_{n-2} D^{n-2} D_1^2 z + \cdots + a_0 D_1^n z = f(x, y),$$

wo $D^p D_1^q z$ für $\frac{d^n z}{dx^p\, dy^q}$ steht, gelingt ebenfalls die Reduktion auf eine ähnliche Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, indem man nach Abtrennung der Symbole D und D_1 setzt:

$$N = D^n + a_{n-1} D^{n-1} D_1 + \cdots + a_0 D_1^n = (D - k_1 D_1)(D - k_2 D_1) \cdots (D - k_n D_1)$$

und die vorgelegte Gleichung durch $D - k_n D_1$ dividirt. Die Deutung von $\frac{f(x, y)}{D - k_n D_1}$ ist zwar verschieden von der bei der gewöhnlichen Differentialgleichung angewandten, doch wird auch hier eine Uebereinstimmung erzielt, indem aus der Taylor'schen Reihe nach demselben Princip die symbolische Gleichung abgeleitet wird: $f(x+h) = e^{hD} f(x)$. Die weitere Entwickelung, so wie das Endresultat, welches übrigens nur für ungleiche Wurzeln angegeben ist, müssen wir hier übergehen.

Zum Schluss wird noch an einigen Beispielen, die aus Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen (p. 111, 107, 124) entnommen sind, gezeigt, wie die Probleme, in welchen die Funktion, die einer partiellen Differentialgleichung genügt, noch gewisse vorgeschriebene Grenzbedingungen zu erfüllen hat,

häufig einfacher aus dem allgemeinen Integral gewonnen wird, als wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, partikuläre Integrale zum Ausgang nimmt. Hr.

J. Cockle. On convertent functions. Proc. of Manchester VIII. 2-3. 1869.

Die Theorie der Conversion der Integrale, welche den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, soll ein weiteres Mittel zur Lösung von Differentialgleichungen auf endliche Weise geben. Die Anwendung ist nicht nothwendig auf den Fall einzuschränken, in welchem das zu convertirende Integral ein singuläres Integral ist. Ein Umriss dieser Theorie findet sich Bd. VII. p. 67. Csy. (O.)

J. Cockle. On convertent functions. Proc. of Manchester IX. 86-87. 1870.

Die Arbeit ist ein Supplement zu einer grösseren Arbeit über denselben Gegenstand. Csy. (O.)

P. du Bois-Reymond. Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht. Borchardt J. LXX. 299-314. 1869.

Es werden für die totalen linearen, die Integrabilitätsbedingung erfüllenden Differentialgleichungen zwei Auflösungsmethoden entwickelt, welche die Integration nur einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung erfordern.

Die erste kann ihrer Weitläufigkeit wegen hier nicht angegeben werden, die zweite besteht in Folgendem:

Sei $\Sigma X dx = 0$ die zu integrirende totale Differentialgleichung mit n Variabeln, so führe man die Substitutionen ein:

$$x_p = x_p^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\vartheta_{1p}(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) + (\alpha_2 - \alpha_2^0)\vartheta_{2p}(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n),$$
$$p = 1, 2, \dots n,$$

so dass alle x in Constante übergehen, wenn $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$ gesetzt wird, und die übrigen α beliebig bleiben. ϑ_{1p} und ϑ_{2p} stellen beliebige Funktionen vor, die aber für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$ nicht unendlich werden dürfen. Es gehe nun durch diese Substitutionen $\Sigma X dx = 0$ über in:

$$A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + \dots + A_n d\alpha_n = 0;$$

dann integrire man die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$A_1\, d\alpha_1 + A_2\, d\alpha_2 = 0,$$

indem $\alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n$ als constant behandelt werden, mit der Bestimmung, dass für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$ sei; das Integral schreibe man in der Form:

$$F(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = F(\alpha_1^0\, \alpha_2^0,\, \alpha_3 \ldots \alpha_n)$$

und führe vermittelst obiger Substitutionen die ursprünglichen Variabeln x wieder ein, dann erhält man in

$$\varphi(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \varphi(x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0) = C$$

das gesuchte Integral. Hr.

Grünwald. Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differentialgleichungen mit variabeln Coefficienten. Prag. Ber. 1869. 63-69.

Siehe Abschnitt X. Cap. 4.

N. Trudi. Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl' integrali delle equazioni lineari cosi' differenziali che a differenze finite. Battaglini G. VII. 76-97. 1870.

Der Verfasser giebt für eine lineäre Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten die Bestimmung der willkürlichen Constanten für den Fall, dass die entsprechende Gleichung n^{ter} Ordnung, von deren Wurzeln die allgemeine Lösung abhängt, mehrere Systeme gleicher Wurzeln hat. Die hier aufgestellte Lösung durch Partialbruchzerlegung des Quotienten zweier gewissen Functionen ist, was dem Verfasser unbekannt geblieben zu sein scheint, bereits von Cauchy gegeben, so dass die vorliegende Arbeit nichts Neues enthält. Zum Schluss wird noch die Lösung der endlichen Differenzengleichung mit constanten Coefficienten behandelt. Wn.

G. G. Stokes. Supplement to a paper on the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments. Trans. of Cambridge. XI. (II.) 412-425. 1869.

Der Verfasser nimmt Bezug auf 2 frühere Arbeiten: „On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series" (Trans. of Cambridge IX.) und „On the discontinuity

of arbitrary constants etc." (Ibid. X.). In diesen Arbeiten handelt es sich um folgende Frage: Sind $y=P$ und $y=Q$ particuläre Lösungen einer Differentialgleichung 2[ter] Ordnung, und $y=U$ und $y=V$ particuläre Lösungen derselben Gleichung, so sollen die Constanten A, B, C, D in den Gleichungen

$$U=AP+BQ,\quad V=CP+DQ$$

bestimmt werden. In den betrachteten Fällen sind U und V nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihen, die aber für grosse Werthe von x schwer zu berechnen sind; P und Q sind nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihen, die stets divergiren aber für grosse x anfänglich convergent sind und deren numerischer Werth ziemlich genau und leicht erhalten werden kann, wenn man die Summation nur so weit fortsetzt, als die Reihen convergiren. In der Arbeit Band X. wurde gezeigt, dass die constanten Coefficienten der absteigenden Reihen in Wirklichkeit discontinuirlich sind, dass sie denselben Werth zwischen gewissen Werthen der Amplitude der imaginären Variabeln annehmen, und dann plötzlich verschiedene Werthe erhalten. In der vorliegenden Ergänzung ist die Frage der Bestimmung dieser Constanten weiter entwickelt, und die allgemeine Methode angewendet auf die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{n^2}{x^2}y=y.$$

In dem besonderen Falle $n=0$, der betrachtet wird, ist eine der nach steigenden Potenzen fortschreitenden Lösungen die folgende:

$$y=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\text{etc.},$$

d. h. Bessel's Integral mit einem rein imaginären Werth der Variabeln, nämlich J^0_{ix}. Cly. (M.)

ZORER. Integration der Gleichungen des ersten Grades mit constanten Coefficienten. Pr. G. Ellwangen. 1869.

Fortsetzung einer Arbeit, welche dem Referenten nicht zugänglich war. Sie führt — als Beispiel für ein im Früheren entwickeltes Gesetz — die Integration der Gleichung

$$a\frac{d^5y}{dx^5}+b\frac{d^4y}{dx^4}+c\frac{d^3y}{dx^3}+d\frac{d^2y}{dx^2}+e\frac{dy}{dx}+fy=0$$

aus, für die verschiedenen Fälle, die bei der Betrachtung der Wurzeln der Gleichung $ap^5 + bp^4 + cp^3 + dp^2 + ep + f = 0$ zu unterscheiden sind. M.

Chr. Hansen. Om partikulare Oplösninger svarende til Differentialligninger af forst Orden. Tychsen Tidsskr. (2) V. 119. 1869.

Eine Kritik der gewöhnlich angewandten Methode, um die partikulären Lösnngeu einer Differentialgleichung erster Ordnung zu finden. Herr Zeuthen hat im fünften Theil der obigen Zeitschrift p. 154 und im sechsten Theil p. 33 einige Bemerkungen zu dieser Kritik veröffentlicht, worin er die gewöhnliche Methode aufrecht erhält. Hn. (Wn.)

Studnička. Beiträge zur Theorie der Integration von completen linearen Differentialgleichungen. Prag. Ber. 1870. 76-82.

Das Ergänzungsglied, welches zu dem allgemeinen Integrale der reducirten Gleichung:

$$\sum_{k=n}^{k=0} X_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

in der Lösung der completen Differentialgleichung:

$$\sum_{k=n}^{k=0} X_k \frac{d^k y}{dx^k} = X$$

hinzutritt, soll selbstständig gefunden werden, mit Umgehung der Auflösung der reducirten Gleichung. Eine allgemeine Methode hierfür wird nicht angegeben und die Fälle, in denen diese Aufgabe gelöst wird, betreffen solche complete Differentialgleichungen, bei denen die Form des Ergänzungsgliedes im Voraus zu erkennen ist. Sie lassen sich auf folgende zurückführen.

1. Die Coefficienten X_k sind constant, $X = \alpha e^{\beta x}$ oder $= \alpha \sin \gamma x + \beta \cos \gamma x$, dann ist das Ergänzungsglied von derselben Form wie X, nämlich $= A e^{\beta x}$ oder $= A \sin \gamma x + B \cos \gamma x$. Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung für y wird dann A resp. A und B bestimmt. Der Fall, dass β eine Wurzel der Gleichung $\sum_{k=n}^{k=0} X_k \beta^k = 0$ oder γ eine Wurzel der Gleichung: $X_0 - X_2 \gamma^2 + X_4 \gamma^4 - \cdots = 0$, erfordert eine leichte Modifikation.

2) $$X_k = a_k + b_k x + c_k x^2 + \cdots + m_k x^k$$
$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \mu x^m,$$
dann hat das Ergänzungsglied, wie X, die Form:
$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Mx^m;$$
und indem man wiederum diesen Ausdruck statt y in die Gleichung einführt, werden die Coefficienten $A, B, C \dots M$ bestimmt. In diesem Falle würde das Ergänzungsglied auf dem gewöhnlichen Wege nicht herzustellen sein, da die partikulären Integrale der reducirten Gleichung im Allgemeinen nicht bekannt sind. Hr.

N. Bougaieff. Sur les formes intégrables des équations différentielles du premier ordre. J. Philom. de Moscou. II.

Der Zweck der Abhandlung ist, ein System von Formen von Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten, die sich mit Hülfe einer Transformation der Variabeln integriren lassen.

Zur Integration der Gleichung
$$\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0$$
wendet der Verfasser folgende Transformationen an:

1) Die neuen Variabeln u und v werden mit den ursprünglichen x, y durch die beiden Gleichungen
$$\varphi(x, y, u, v) = 0, \quad \theta(x, y, u, v) = 0$$
verbunden.

Der Verfasser leitet dann die Bedingung ab, der die Function f genügen muss, damit die transformirte Gleichung die Form
$$v' + \psi(u) \cdot \chi(v) = 0$$
habe, wo $\psi(u)$ und $\chi(v)$ zwei willkürliche Functionen sind.

2) Zur Integration derselben Gleichung benutzt Herr Bougaieff auch die Transformation
$$x = \varphi(p, w, w'), \quad y = \psi(p, w, w'),$$
wo
$$w' = \frac{dw}{dp}.$$

Die so transformirte Gleichung wird in Bezug auf w vom 1ten Grade sein, wenn z. B.
$$x = \psi(w'), \quad y = \theta(w - pw') + \tau(w')$$
ist, wo ψ, θ, τ willkürliche Functionen sind.

Hierauf stellt der Verfasser die allgemeine Form der Differentialgleichungen auf, die sich mit Hülfe dieser Substitution integriren lassen.

3) Nach Betrachtung der Substitution $y=\int z\,dx$ stellt der Verfasser zum Schluss einige integrirbare Formen auf, die man bei verschiedenen Hypothesen über die Form des Multiplikators erhält. Z. (O.)

J. J. Sylvester. The story of an equation of differences of the second order. Phil. Mag. (4) XXXVII. 225-227. 1869.

Der Verfasser beweist, dass die Bestimmung des Grades einer Gleichung, die aus einer Elimination resultirt, benutzt werden kann zur Folgerung eines neuen und keineswegs klaren Factums in der Differenzenrechnung. Csy. (O.)

J. Cockle. On a certain Boolian Trinomial. Messenger V. 33-39. 1869.

Es handelt sich um die Integration der für $n=1$ von Boole (Differential Equations p. 449) betrachteten Differentialgleichung:

$$(D^2+aD+b)u+(cD+e)\varepsilon^{n\Theta}u+f.\varepsilon^{2n\Theta}u=0,$$

worin D die symbolische Bedeutung $D=\frac{d}{d\Theta}$ hat.

Mittelst einer Methode, die der von Laplace nachgebildet und eine Verallgemeinerung derselben ist, wird das Integral in Form eines bestimmten Integrales aufgestellt.

Zum Schluss macht der Verfasser darauf aufmerksam, wie vermittelst eines Verfahrens, welches er in seiner Arbeit: „On certain Rational Fractions" (Messenger IV. p. 168) auseinandergesetzt hat, in manchen Fällen ein bestimmtes Integral durch ein unbestimmtes ersetzt werden kann. He.

D... G. Bidrag till in elementär framställning af läran om integrerande faktorn. Dillner Tidskr. II. 127. 1869.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn man eine Function φ von x und y der Art bestimmen kann, dass der Ausdruck

$$z=\frac{\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}}{M\frac{d\varphi}{dy}-N\frac{d\varphi}{dx}}$$

eine Function von φ ist, so ist

$$\mu = e^{\int z d\varphi}$$

ein Factor, der die Differentialgleichung

$$M dx + N dy = 0$$

integrabel macht. — Zum Schluss wird noch ein anderes, etwas allgemeineres Theorem bewiesen. Hn. (Wn.)

D... G. Om integrering medelst substitution. Dillner Tidskr. II. 253. 1869.

Ein Versuch, die Methoden zur Integration der Differentialgleichungen durch Substitution rationeller zu machen.

Hn. (Wn.)

ADOLPH STEEN. Om lineare Differentialligningers Integration ved bestemte Integraler. Forh. af Christiania 1869. 115.

Der Verfasser giebt einige neue Entwickelungen in Bezug auf die Integration der Differentialgleichung

$$(1) \quad (a_0 x + b_0)\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 x + b_1)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + (a_{n-1} x + b_{n-1})\frac{dy}{dx} + a_n x + b_n = 0$$

mittelst bestimmter Integrale. Er zeigt zuerst, dass, wenn $b_0 = 0$, $b_1 = n a_0$, $b_2 = (n-1) a_1, \ldots b_r = (n-r+1) a_{r-1}$, $b_n = a_{n-1}$ ist, folgendes Integral der Gleichung genügt:

$$y = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{ux}\, du,$$

wo α eine Wurzel der Gleichung ist:

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \cdots + a_{n-1} u + a_n = 0.$$

Weiter sucht dann der Verfasser, ob es nicht möglich ist, der allgemeinen Gleichung (1) durch ein partikuläres Integral von folgender Form zu genügen:

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} f(u)\, du,$$

wenn man die Grenzen α und β, sowie die Form der Function $f(u)$ auf geeignete Weise bestimmt. Es giebt Fälle, wo man diese Bestimmungen ausführen kann. — Die Arbeit enthält ferner zahlreiche Anwendungen. Hn. (Wn.)

HOLMGREN. Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+a_0y=0.$$

Handl. Stockh. VII. 1869.

In der Einleitung erwähnt der Verfasser die auf dieselbe Aufgabe bezüglichen Arbeiten von Euler, Liouville und Spitzer und bemerkt dann: „Eine allgemeine Integrationsmethode, die von jedem Einwurf frei ist, blieb bisher immer noch zu wünschen. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist es, ausgehend von den Liouville'schen Arbeiten, eine solche aufzustellen, und mit ihrer Hülfe vollständige Integrale zu finden, die keiner Beschränkung in Bezug auf den Werth der unabhängigen Variabeln unterworfen sind". Hn. (Wn.)

H. MYLORD. Lösning af Opgave 267. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 144. 1870.

Integration der Differentialgleichung:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-2)y=x^4.$$

Man setze zuerst $-y=x^2+z$, dann $z=\frac{u}{x}$, so erhält man

$$x^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+u\right)-2\frac{du}{dx}=0.$$

Hier setze man $u=u_1\sin x+u_2\cos x$,
so ergiebt sich durch Bestimmung von u_1 und u_2:

$$y=x^2+\frac{k_1}{x}[x\sin(x+k_2)+\cos(x+k_2)].$$

Hn. (Wn.)

A. STEEN. Ogtan en Methode til Integration af

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=f(x^2+y^2).$$ Dillner Tidskr. III. 24. 1870.

G. MITTAG LEFFLER. Integration af differentialequationer

$$f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dillner Tidsskr. III. 24 und 28. 1870.

Beide Arbeiten sind durch eine Arbeit von Malmsten in demselben Journal (II. 69) veranlasst. Herr Steen integrirt die

Differentialgleichung durch Transformation und giebt als Anwendung folgenden Satz:

Es sei eine Rotationsfläche $z=\varphi(x^2+y^2)$. Die Linien von constanter Neigung (h) in Bezug auf eine Ebene senkrecht zur Axe haben zu Projectionen auf diese Ebene Curven, deren orthogonale Trajectorien einen Krümmungsradius (ϱ) haben:

$$\varrho=\operatorname{cotg} h\cdot\frac{\varphi'^2(r^2)}{\varphi''(r^2)},$$

wo r den Abstand der Punkte von der Axe ausdrückt.

Herr Leffler integrirt die Differentialgleichung mittelst geometrischer Betrachtungen und bemerkt, dass die allgemeinere Gleichung:

$$\frac{y''}{(a+2by'+cy'^2)^{\frac{3}{2}}}=f(ax^2+2bxy+cy^2+2ex+2fy+g)$$

mittelst der Substitutionen:

$$u=bx+cy+f$$
$$v=x\sqrt{ac-b^2}+\frac{ec-bf}{\sqrt{ac-b^2}}$$

die Form annimmt:

$$\frac{u''}{(1+u'^2)^{\frac{3}{2}}}=\varphi(u^2+v^2).$$

Hn. (Wn.)

A. Steen. Nogle Bemarkninger om Integration af Differentialligninger. Dillner Tidskr. III. 44. 1870.

Bemerkungen über die Anwendung der Variation der Constanten bei der Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Hn. (Wn.)

—. On a class of differential equations. Messenger V. 90-94. 1869.

Es wird zuerst gezeigt, dass die Differentialgleichung

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dP}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R=0,$$

wo P und R Functionen von y allein sind, immer auf Quadraturen zurückgeführt werden kann, vermittelst der Substitution

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{z}{P^{2a}},$$

wo z Function von y ist.

Auf diese Gleichung wird die allgemeinere

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R=0,$$

P, Q, R Functionen von y, zurückgeführt durch Multiplication einer Function μ von y, welche der Bedingung

$$\mu Q=a\frac{d(\mu P)}{dy}$$

genügt.

Die Resultate werden endlich so verallgemeinert, dass man das Integral von

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R\left(\frac{dy}{dx}\right)^n=0$$

erhält. He.

A. Cayley. Note on the integration of certain differential equations by series. Messenger V. 77-82. 1869.

Hat man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, der man durch ein Integral der Form

$$y=Ax^\lambda+Bx^{\lambda+1}+\cdots$$

genügen kann, so wird λ durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Für jeden Werth von λ sind dann die Coefficienten $B, C\dots$ bestimmte Vielfache von A, so dass das allgemeine Integral die Form

$$y=A\left(x^\alpha+\frac{B}{A}x^{\alpha+1}+\cdots\right)+K\left(x^\beta+\frac{L}{K}x^{\beta+1}+\cdots\right)$$

annimmt.

Der specielle Fall nun, den der Verfasser behandelt, ist der, wo die Differenz der beiden Wurzeln α und β eine ganze Zahl k ist, so dass $\beta=\alpha+k$. In diesem Fall fällt obige Lösung der Form nach mit

$$y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha+1}+\cdots$$

zusammen, welche daher zwei willkürliche Constante enthalten muss, so dass jetzt die Coefficienten nicht länger bestimmte Vielfache von A sein können.

Als einfachster Fall wird derjenige behandelt, wo die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten immer nur zwei auf

einander folgende Coefficienten verbinden. Dann erscheint das allgemeine Integral in der Form

$$y = A\left(x^{\alpha} + \frac{B}{A}x^{\alpha+1} + \cdots + \frac{E}{A}x^{\alpha+e}\right) + K\left(x^{\alpha+k} + \frac{L}{K}x^{\alpha+k+1} + \cdots\right),$$

so dass jetzt eine singuläre Lösung in endlicher Form existirt.

He.

P. Helmling. De aequatione $X_0 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$ integranda. Dorpat 1860.

R. Most. Ueber eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung. Schlömilch Z. XV. 427-450. 1870.

Für jeden singulären Punkt a einer beliebigen homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, deren Coefficienten eindeutige Funktionen des Argumentes x sind, giebt es, wie H. Fuchs gezeigt hat, m partikuläre ein Fundamentalsystem bildende Integrale von der Form: $(x-a)^{\lambda}\varphi$, wo φ im Allgemeinen eine in der Umgebung von a eindeutige Funktion von x ist. Die Grössen λ werden bis auf beliebig hinzuzufügende ganze Zahlen durch eine Gleichung m^{ten} Grades bestimmt, deren Wurzeln w zu den Grössen λ in der Beziehung stehen: $w = e^{2\pi i\lambda}$*). Für den Fall, dass einige der Wurzeln einander gleich werden, hatte H. Fuchs weiter nachgewiesen, dass in der entsprechenden Gruppe von Integralen im Allgemeinen Logarithmen auftreten. Hiervon ausgehend, giebt der Verfasser zunächst eine allgemeine Methode, diese neuen Integrale aufzufinden. Sie beruht auf dem Prinzip, den Fall gleicher Wurzeln als Grenzfall der ungleichen Wurzeln zu behandeln. Indem wir es uns hier versagen müssen, die Bedenken, die wir gegen die Herleitung haben, auszuführen, bemerken wir nur zu dem Resultate, dass dasselbe zwar der Form nach die von H. Fuchs gegebene Darstellung der Integrale als lineare Funktionen von $\log(x-a)$ mit variablen Coefficienten ent-

*) In der Abhandlung heisst es irrthümlich, die λ selbst ergeben sich als die Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades, was schon der Definition dieser Grössen widerspricht. Für eine bestimmte Klasse von Differentialgleichungen, zu der auch die vom Verfasser behandelte gehört, hat H. Fuchs allerdings auch für die λ eine Gleichung m^{ten} Grades aufgestellt, diese erfüllen aber alsdann noch die besondere Bedingung, dass die ihnen zugehörigen φ für $x = a$ nicht verschwinden.

hält, allein für diese Coefficienten selbst Werthbestimmungen aufweist, deren Unzulässigkeit schon aus dem Grunde ersichtlich ist, dass aus denselben folgen würde, es müssten in dem Fall gleicher λ jedes Mal Logarithmen auftreten, was schon durch einfache Beispiele widerlegt wird.

Die Differentialgleichung, um deren Integration es sich handelt, lautet:

$$\sum_{r=0}^{r=m}(a_r+b_r x^\varrho)x^{m-r}y^{(m-r)}=\sum_{r=0}^{r=\varrho}c_r x^{r\varrho}.$$

Für die partikulären Integrale derselben werden drei Darstellungsformen angewandt: Reihen, bestimmte Integrale und bestimmte Differentiale. Unter bestimmten Differentialen wird hier der Ausdruck $\frac{d\psi(u,x)}{dx}$ verstanden, in welchem nach erfolgter Differentiation u einen bestimmten Werth erhält.

Es wird nun zunächst die Gleichung behandelt, die aus der gegebenen hervorgeht, wenn man die rechte Seite gleich Null setzt. Nach einer Umformung, wie sie Riemann für $m=2$ angegeben, und der darauf folgenden Substitution $x^\varrho=\xi$, erhält sie die Gestalt:

$$(d_0+e_0\xi)\varrho^m\frac{d^m y}{(d\log\xi)^m}+(d_1+e_1\xi)\varrho^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{(d\log\xi)^{m-1}}+\cdots+d_m+e_m\xi=0.$$

Die Grössen d_k und e_k ergeben sich als lineare homogene Funktionen von resp. a_k und b_k, und für die singulären Punkte 0 und ∞ nehmen die bezüglichen Fundamentalgleichungen, deren Wurzeln die partikulären Integrale einzeln zugeordnet sind, die Formen an:

$$d_0\varrho^m u^m+d_1\varrho^{m-1}u^{m-1}+\cdots+d_m=0$$
$$e_0\varrho^m u^m+e_1\varrho^{m-1}u^{m-1}+\cdots+e_m=0.$$

Es wird darauf der Einfachheit halber und unbeschadet der Allgemeinheit $\varrho=1$ gesetzt. In der Umgebung der singulären Punkte 0 und ∞ — die Reihenentwickelung für den dritten singulären Punkt $x=-\frac{a_0}{b_0}$ wird nicht versucht — ergeben sich dann für die m partikulären Integrale die bezüglichen Reihen:

$$y_q=x^{\alpha_q}F\begin{pmatrix}\alpha_q-\beta_1, & \alpha_q-\beta_2,\ldots\alpha_q-\beta_m, & -\frac{b_0}{a_0}x\\ \alpha_q-\alpha_1+1, & \alpha_q-\alpha_2+1,\ldots\alpha_q-\alpha_m+1, & \end{pmatrix}$$

$$y_q=x^{\beta_q}F\begin{pmatrix}\alpha_1-\beta_q, & \alpha_2-\beta_q,\ldots\alpha_m-\beta_q, & -\frac{a_0}{b_0}x^{-1}\\ \beta_1-\beta_q+1, & \beta_2-\beta_q+1,\ldots\beta_m-\beta_q+1, & \end{pmatrix},$$

wenn mit $F\binom{a_1, a_2 \dots a_m}{b_1, b_2 \dots b_m} u)$ die hypergeometrische Reihe m^{ter} Ordnung:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_1^{n|1} \dots a_m^{n|1}}{b_1^{n|1} \dots b_m^{n|1}} u^n$$

bezeichnet wird; die α und β sind die Wurzeln der resp. 1[ten] und 2[ten] obiger Fundamentalgleichungen und q nimmt alle Werthe von 1 bis m an.

Die für den Fall, dass die Differenzen der α (oder der β) zum Theil ganze Zahlen sind, ausfallenden Integrale sind durch neue zu ersetzen; wenn aber der Verfasser glaubt, vermittelst eines einfachen Raionnements für das ausgefallene y_r ein neues Integral y'_r in 12^a (und ebenso in 13^a) hergestellt zu haben, so hat er dabei übersehen, dass dieses mit einem andern Integrale desselben Systems, nämlich mit y_s zusammenfällt. Dass auch in dem Falle gleicher α Integrale ausfallen, ist gar nicht angemerkt. Um in beiden Fällen die Lücke auszufüllen, bedarf es einer tieferen Untersuchung der Bildungsgleichungen für die Coefficienten der Reihen, die der Verfasser nicht angestellt hat.

Die Darstellung der Lösungen durch bestimmte Integrale, wobei die 3 Fälle: 1) $a_0 \lesseqgtr 0, b_0 \lesseqgtr 0$, 2) $b_0 = b_1 = \cdot\cdot b_{r-1} = 0$, 3) $a_0 = \cdot\cdot a_{r-1} = 0$, verschiedene Formen ergeben, gelingt ihm mit Hülfe von Reduktionssätzen, die wir hier ebenso wenig wie die bestimmten Integrale selbst, die in allen Fällen $(m-s)$fach werden, wiedergeben können. Die Anzahl der so gewonnenen Lösungen übersteigt m, eine Diskussion derselben, namentlich hinsichtlich der Relationen, die zwischen ihnen bestehen müssen, findet nicht statt.

Bei Gelegenheit der Darstellung der partikulären Integrale durch bestimmte Differentiale, auf die wir hier ebenfalls nicht weiter eingehen, wird bemerkt, dass die Ausdrücke $\left[\frac{d^\lambda(1-u^\mu)}{du^\lambda}\right]_{u=0}$ ähnliche Beziehungen wie die Gammafunktionen zeigen.

Den Beschluss macht die Zurückführung der Integration der vorliegenden nicht homogenen Gleichung auf die einer homogenen Gleichung der betrachteten Art. Hr.

J. Cockle. On criticoids. Phil. Mag. (4) XXXIX. 201-210. 1870.

Eine „critical" Funktion der Coefficienten einer algebraischen Gleichung ist eine Funktion, welche unverändert bleibt, wenn jede der Wurzeln um dieselbe Grösse vermehrt wird; mit andern Worten, eine „critical" Function ist eine Funktion der Wurzeldifferenzen.

Ein „Criticoid" befindet sich in derselben Beziehung zu einer factoriell transformirten linearen Differentialgleichung, wie eine „critical" Funktion in Beziehung zu einer linear transformirten algebraischen Gleichung. Csy. (O.)

L. Fuchs. Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. Brioschi Ann. (2) IV. 36-49. 1870.

Der Verfasser lehrt im Anschluss an seine, in Borchardt J. LXVI. veröffentliche Abhandlung die Werthe der Integrale linearer Differentialgleichungen durch eine für die nicht singulären Punkte stets convergente Reihe bestimmen, deren Glieder durch wiederholte Integration gewonnen werden, und in welcher die von Caqué in Liouville J. im Jahre 1864 veröffentlichte Reihe enthalten ist. Wy.

C. Tychsen. Rettelse til in Afhandling af Abel. Tychsen Tidsskr. (2) V. 49. 1869.

Der Verfasser hat einen Rechnungsfehler im zweiten Theil von N. H. Abels oeuvres complètes p. 244 verbessert.

Hn. (Wn.)

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

B. Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen, herausgegeben von K. Hattendorf Braunschweig. 1869.

Der Herausgeber reproducirt die Vorlesung, welche Riemann im Winter 1854-55, also im Beginn seiner akademischen

Thätigkeit in Göttingen gehalten und im Winter 1860-61 und im Sommer 1862 in erweiterter Weise wiederholt hat. Eine zusammenhängende Ausarbeitung des Verfassers von 1854 hat der Herausgabe zu Grunde gelegen und derselben hat der Verfasser die Erweiterungen hinzugefügt, welche sein eigenes Heft von 1860-61 enthält. Es zeugt von Riemann's grosser Einsicht und Bescheidenheit, dass er sich bei dieser, wohl seiner ersten akademischen Vorlesungen im Jahre 1854 sehr genau an den mustergültigen Vortrag seines Lehrers Dirichlet über denselben Gegenstand gehalten hat; eine akademische Vorlesung soll ja nicht unter allen Umständen eine Originalarbeit sein. Das hierüber ausgearbeitete Heft enthält in der That die Theorie der bestimmten Integrale, der Fourier'schen Reihen, der partiellen Differentialgleichungen, die Anwendungen auf die Wärmelehre, namentlich die Verbreitung der Wärme in einem unendlichen Körper und einer Kugel, deren Oberfläche gleichmässig erwärmt ist, dann die Theorie der elastischen Saite und der Luftschwingungen in der Weise, wie sie Dirichlet in Berlin vorzutragen pflegte; die Erweiterungen von 1860 und 61 enthalten dagegen Probleme, die Dirichlet in diesen Vorlesungen nicht gegeben hat, nämlich den allgemeinen Fall der Wärmeverbreitung in einer Kugel, die Gleichungen für die elastischen festen Körper mit Beispielen und die Bewegung eines festen Körpers in einer begrenzten Flüssigkeit. Eigene Riemann'sche Untersuchungen enthält diese Arbeit nicht, die Methoden, welche z. B. in der Theorie der bestimmten Integrale und der Fourier'schen Reihen eingeschlagen werden, stehen dem fern, was Riemann sonst über diese Gegenstände vorgetragen oder veröffentlicht hat. Wenn daher die Veröffentlichung Riemann'scher Vorlesungen auch unter allen Umständen Dank verdient, so würde sich der Herausgeber denselben vielleicht noch im höheren Grade erworben haben, wenn er mit der Herausgabe der Vorlesung über Functionentheorie und Abel'sche Funktionen, so wie über das Potential begonnen hätte, da namentlich die beiden erstgenannten Vorträge höchst wichtige Erläuterungen und Ergänzungen zu den so kurzen von Riemann veröffentlichen Abhandlungen über diese Gegenstände bilden. Ni.

F. Grelle. Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der operativen Symbole. Schlömilch Z. XV. 297-310. 1870.

Siehe Abschnitt VI. Cap. 5. p. 160.

V. G. Imschenetsky. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit du Russe par J. Hoüel. Grunert Arch. L. 278-474. 1869.

Die Arbeit giebt in sehr ausführlicher Weise die Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, wie sie in neuester Zeit zur Abrundung gekommen ist. Der H. V. schliesst sich im Allgemeinen der Jakobi'schen Behandlungsweise, wie sie in seiner hinterlassenen von Clebsch veröffentlichten Arbeit gegeben ist, an, nimmt aber dabei auf die vorausgehenden Untersuchungen von La Grange, Charpit, Pfaff, Cauchy und Jacobi, selbst auf die späteren von Liouville, Bertrand, Bour u. s. w. vielfach Rücksicht. Die Arbeit selbst zerfällt in 7 Kapitel, in deren erstem die verschiedenen Formen der Integrale der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, namentlich des vollständigen singulären allgemeinen Integrals behandelt werden. Das 2te Kapitel betrifft diejenigen Formen von allgemeinen Integralen, welche zu einer Differentialgleichung führen, welche in Bezug auf die Ableitungen linear ist.

Das 3te Kapitel geht dann auf die allgemeine Integration über, sie wird nach Jakobi gegeben, in dessen Behandlung der Verfasser jedoch einige Vereinfachungen einführt. Zunächst wird der Fall von 2 unabhängigen Variablen behandelt, in welchem Falle das Jacobi'sche Verfahren mit dem von La Grange und Charpit gegebenen identisch ist, dann aber der allgemeine Fall behandelt.

Im 4ten und 5ten Kapitel wird diese Integration dann zu Ende geführt.

Das 6te Kapitel beschäftigt sich mit der von Bour gegebenen Erweiterung der Jacobi'schen Theorie auf simultane partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und deren Anwendung auf verschiedene Probleme.

Im 7ten Kapitel wird die Theorie der sogenannten Hamilton'schen Differentialgleichungen behandelt, d. h. derjenigen totalen Differentialgleichungen, die sich auf eine partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung zurückführen lassen, welche namentlich in der Mechanik und Variationsrechnung vorkommen. Endlich giebt das 8te Kapitel noch eine Uebersicht der Methode, welche Cauchy für die partiellen Differentialgleichungen anwendet.

Ni.

C. Niven. Application of a change of the dependent and independent variables. Quart. J. X. 312-317. 1870.

Umständlicher Beweis der bekannten Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu dem Zwecke, eine solche zweiter Ordnung nach gleicher Methode zu behandeln. Doch ist auch deren Lösung vorausgesetzt. Zum Zweck ihres Beweises bedurfte es keiner Hinweisung auf einen Wechsel der Variabeln, der sich von selbst darbietet und kaum zu umgehen ist.

H.

R. Radau. Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik. Clebsch Ann. II. 167. 1870.

Siehe Abschnitt X. Cap. 4.

A. Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement. Clebsch Ann. II. 13. 1870.

Siehe Abschnitt X. Cap. 4.

G. Holzmüller. Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetz von Weber. Schlömilch Z. XV. 69-91. 1870.

Siehe Abschnitt X. Cap. 4.

Brill. Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen. Clebsch Ann. I. 225-252. 1869.

Siehe Abschnitt XI. Cap. 2.

R. Moon. The solution of linear partial differential equations of the second order involving two independent variables. Phil. Mag. (4) XL. 35-41. 1870. Csy.

Simon Spitzer. Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^n z}{dx^n} = x^m \frac{d^{m+n} z}{dy^{m+n}} + F_1(y) + xF_2(y) + \cdots x^{m-1} F_m(y),$$

in welcher m und n ganze positive Zahlen und $F_1(y)$ $F_2(y) \dots F_m(y)$ beliebige Funktionen von y bedeuten. Grunert Arch. LI. 499-506. 1870.

Der Verfasser verificirt folgende Formeln:

1) Für den Fall, wo $m=1$, die Gleichung also lautet:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = x \frac{d^{n+1} z}{dy^{n+1}} + F_1(y), \text{ ist}$$

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \{\varphi_1(y+\lambda_1 ux) + \varphi_2(y+\lambda_2 ux) + \cdots + \varphi_{n+1}(y+\lambda_{n+1} ux)\} du,$$

wo die λ die Wurzeln der Gleichung $\lambda^{n+1}=1$ sind, $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{n+1}$ im übrigen willkürliche Funktionen, welche die Gleichung

$$\lambda_1^n \varphi_1^{(n)}(y) + \lambda_2^n \varphi_2^{(n)}(y) + \cdots + \lambda_{n+1}^n \varphi_{n+1}^{(n)}(y) = F_1(y)$$

erfüllen. Jedoch ist es noch nöthig, dass die φ derart gewählt sind, dass der Ausdruck:

$$e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \int_{r=1}^{r=n+1} \left\{\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)\right\}.$$

für $u=\infty$ verschwindet.

2) Für den Fall, wo $m=2$, also:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = x^2 \frac{d^{n+2} z}{dy^{n+2}} + F_1(y) + xF_2(y), \text{ ist}$$

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u \{\varphi_1(y+\lambda_1 uvx) + \varphi_2(y+\lambda_2 uvx) + \cdots + \varphi_{n+2}(y+\lambda_{n+2} uvx)\} du\, dv,$$

wo die λ die Wurzeln der Gleichung $\lambda^{n+2}=1$, die φ selbst will-

kürliche Funktionen sind, welche die Bedingungsgleichungen:

$$\int_{r=1}^{r=n+2}(\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y))\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}}du = F_1(y),$$

$$\int_{r=1}^{r=n+2}(\lambda_r^{n+1} \varphi_r^{(n+1)}(y))\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}}du = F_2(y)$$

erfüllen, indess muss auch hier der Ausdruck:

$$e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}}\int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}}\int_{r=1}^{r=n+2}\left\{\frac{1}{\lambda_r^2}\varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)\right\}dv$$

für $u=\infty$ verschwinden. Ni.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 14. Messenger V. 62-64. 1869.

Aus den Integralen

$$x = a\cos t + a'\sin t,\quad y = b\cos t + b'\sin t$$

der dynamischen Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y$$

wird die simultane Lösung

$$S = c + \frac{1}{2}(x^2+y^2+a^2+b^2)\cos t - 2(ax+by)\operatorname{cosec} t$$

der beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dS}{da}\right)^2 + \left(\frac{dS}{db}\right)^2\right\} = -\frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

hergeleitet. Glr. (O.)

P. C. V. Hansen. Lösning af Opgaver 118. Tychsen Tidsskr. (2) V. 161. 1869.

Integration der folgenden Differentialgleichungen mittelst bestimmter Integrale:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{m(m+1)}{x^2}z - a^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dz}{dx} - a^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + qx^2\frac{d^2z}{dx\,dy} - bz = 0.$$

Hn. (Wn.)

P. C. V. HANSEN. Cauchy's Methode til Integration af partielle Differentialligninger af 1ste Orden. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 25, 73, 123. 1870.

Entwickelung bekannter Theorieen. — Der Verfasser stützt sich vorzugsweise auf die Arbeiten von Cauchy (Exercices d'analyse et de phys. math. Tome II.) und von Serret (Compt. rend. Octobre 1861). Hn. (Wn.)

R. MOON. On the equation of Laplace's coefficients. Phil. Mag. (4) XL. 434-440. 1870.

Die Gleichung von Laplace's Coefficienten wurde zuerst in endlichen Ausdrücken integrirt im Jahre 1841 von Hargreave. Zwei andere Lösungen sind früher von Boole und Donkin gegeben. Die vorliegende Arbeit giebt eine neue, von den früheren verschiedene Lösung derselben Frage. Csy. (O.)

L. SCHLÄFLI. Ueber die partielle Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d^2w}{dx^2}.$$

Borchardt J. LXXII. 263-284. 1870.

Aus partikulären Lösungen der Glieder wird mit Vermeidung des Fourier'schen Doppelintegrals eine allgemeine Lösung von gewöhnlicher Convergenz gewonnen, welche in verschiedenen Formen ihren Ausdruck findet. Im zweiten Theil sind durch diese die verschiedenen Aufgaben gelöst, welche in der Hattendorf'schen Ausgabe der Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen in Betreff der Wärmebewegung in homogenen Körpern bei verschiedenen Oberflächenbedingungen behandelt werden, und zwar dient zur Ermöglichung dieser Auflösungsmethode die Auffindung von Festsetzungen, wie die Funktion, welche für die Anfangstemperatur der durch das x bestimmten Schichten beliebige Werthe angiebt, gemäss den Oberflächenbedingungen ausserhalb des Körpers fortzusetzen ist.

Eine frühere Ausführung des letztgenannten Gedankens solle von Poisson (Journ. polytechnique. 19) vorhanden sein, wovon sich der Herr Verfasser aber nicht habe überzeugen können, da ihm die Notiz erst bei der Redaktion zugegangen und jenes Journal nicht zur Hand gewesen sei.

Beachtenswerth ist noch eine, wie es scheint, wohl begründete Bemerkung, über die Sprungstellen a der Fourier'schen Reihe, dass die Annahme des Werthes $\frac{1}{2}(F(a+0)+F(a-0))$ rein conventionell sei.
Wy.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

A. Mayer. Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Princip der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht. Clebsch Ann. II. 143-149. 1870.

Der Verfasser betrachtet den in Rede stehenden Satz als einen besonderen Fall eines allgemeineren der Variationsrechnung, der letztere wiederum ist eine Interpretation der bekannten Zurückführung der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung, durch welche sich die Probleme der Variationsrechnung bestimmen lassen, auf eine andere, welche die Grundvariable nicht enthält. Diese Zurückführung wird aber vom Verfasser auf elementarem Wege bewirkt und besteht in dem Satze:

Sind $y\, y_1\, y_2 \ldots y_n$ unbekannte Funktionen von x, ferner $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ $(m<n+1)$ Funktionen der y, f eine Funktion der y und ihrer ersten Differentialquotienten y'. Soll dann die Variation des Integrales

$$v=\int_{a_1}^{a_r} f\,dx$$

unter der Bedingung verschwinden, dass auch die Funktionen φ gleich Null werden, so führt dies bekanntlich auf $n+1$ Differentialgleichungen von der Form:

$$1)\quad \frac{df}{dy_i}=\sum_{k=1}^{k=m}\lambda_k\frac{d\varphi_k}{dy_i}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy'_i}\right).$$

Der Umstand, dass in den Funktionen φ und f das x selbst nicht vorkommt, bedingt, dass der Ausdruck:

$$2)\quad y'\frac{df}{dy'}+y'_1\frac{df}{dy'_1}+\cdots y'_m\frac{df}{dy'_m}-f=h.$$

Führt man nun statt x die Grösse y als unabhängige Variable ein, und eliminirt mittelst der letzten Gleichung dx, transformirt demgemäss die in f befindlichen nach x genommenen Differentialquotienten, wodurch die Funktion f übergehen möge in F, welche letztere Funktion die Differentialquotienten von $y_1 \dots y_n$ nach y enthält, so gehen die Gleichungen 1) über in die n Gleichungen:

$$3)\quad \frac{d\frac{F+h}{w}}{dy_i} + \sum_{k=1}^{k=m} \mu_k \frac{d\varphi_k}{dy_i} = \frac{d}{dy} \frac{d\frac{F+h}{w}}{d\frac{dy_i}{dy}},$$

wo w der Werth von $y' = \frac{dy}{dx}$ ist, der sich aus Gleichung 2) ergiebt.

Diese Gleichungen sind ganz von der Form, wie die Gleichungen 1) und lösen also das Problem, die Variation von:

$$W = \int_{b_0}^{b_1} \frac{F+h}{w} dy$$

zum Verschwinden zu bringen, wo $b_0\, b_1$ leicht zu bestimmende Grenzen sind.

Die erstere Aufgabe lässt sich also auf die letztere zurückführen und umgekehrt.

Um hieraus den Satz von den kleinsten Wirkungen abzuleiten, muss man setzen: $x = t$, $f = T + U$, für die y die Coordinaten x, y, z der Punkte des Systems, $F = \frac{1}{2} \Sigma_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$; es ist dann $V = \int (T+U)\, dt$, und das Integral 2) der Satz von der lebendigen Kraft, $T = U + h$, während das Integral W den Satz von den kleinsten Wirkungen enthält. Ni.

Sabinine. Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples. Bull. de St. Pétersb. XV. 70-83. 1870.

Um zu entscheiden, ob ein einfaches oder vielfaches Integral zu einem Maximum oder Minimum wird, hat man bekanntlich die zweite Variation zu untersuchen. Eine Methode für die Discussion der zweiten Variation vielfacher Integrale ist zuerst von

Clebsch angegeben (Borchardt J. LVI. 122). In der vorliegenden Arbeit giebt Herr S. eine andere Reduktion der zweiten Variation, indem er an Stelle der Variationen gewisse lineäre, algebraische Ausdrücke von willkürlichen Constanten substituirt. — Die Methode ist ganz allgemein und es wird nur die eine Voraussetzung gemacht, dass die Variationen der Grenzen constant sind. Die Grundzüge der Methode sind folgende: Gegeben ist das vielfache Integral:

$$W = \int w \, dx_1 \dots . \, dx_i;$$

die Funktion w enthält 1) die unabhängigen Variabeln $x_1 \, x_2 \dots . x_i$, 2) die abhängigen Variabeln $y_1 \dots . y_s$, die als Funktionen von $x_1 \dots . x_i$ zu bestimmen sind, 3) die $s.i$ partiellen Differentialquotienten der letzteren p_{si}, wo $p_{si} = \frac{dy_s}{dx_i}$.

Sind ausserdem die Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0 \dots . \varphi_k = 0$ gegeben, so bilde man

$$v = w + \Sigma \lambda_k \varphi_k,$$

$$V = \int v \, dx_1 \dots dx_i;$$

so giebt $\delta V = 0$ bekanntlich mit den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$ zusammen die Differentialgleichungen des Problems, so wie die Grenzbedingungen. Der Verfasser bildet nun den Ausdruck für $\delta^2 V$ und führt darin an Stelle der Variationen $w_1 \dots w_s$ der y folgende Werthe ein. Bezeichnet a_e eine Integrationsconstante, die in die Ausdrücke von y und x erst in Folge der Integration der Differentialgleichungen des Problems eintritt und die entweder in einer willkürlichen Funktion oder unabhängig davon stehen kann, so bilde man die Summen:

$$L_{11} = \Sigma_e \, b_{1e} \frac{dy_1}{da_e}, \cdots L_{1n} = \Sigma_e \, b_{ne} \frac{dy_1}{da_e} \dots .$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$L_{s1} = \Sigma_e \, b_{1e} \frac{dy_s}{da_e}, \cdots L_{sn} = \Sigma_e \, b_{ne} \frac{dy_s}{da_e} \dots ,$$

wo die $b_{11} \dots . b_{1e} \dots . b_{s1} \dots . b_{se}$ unbestimmte Constante sind, die weder in den Funktionen y und x noch in den Differential-

gleichungen, noch in den Grenzbedingungen vorkommen. Diese unbestimmten Constanten sind nur so zu wählen, dass die Determinante D der s^2 Grössen L nicht gleich 0 wird. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man die Variationen w der y als Funktionen von eben so viel unabhängigen Variabeln t_n ausdrücken, indem man die L zu Coefficienten macht, also setzt:

$$w_s = \sum_n L_{sn} t_n,$$

wo die t_n als willkürliche Funktionen von $x_1 \dots x_i$ anzusehen sind.

Diese Ausdrücke setzt der Verfasser in den Ausdruck für $\delta^2 V$ ein und gelangt dann nach verschiedenen ziemlich complicirten Reductionen zu einem Ausdruck für $\delta^2 V$, der unter dem Integralzeichen einen homogenen Differentialausdruck vom zweiten Grade in Bezug auf die willkürlichen Variabeln enthält.

Wn.

LUNDSTRÖM. Distinction des maxima et minima dans un problème isopérimétrique. N. Act. Upsal. (3) VII. 1-39. 1870.

Der Verfasser behandelt die Theorie der isoperimetrischen Probleme, die nur von einem einfachen Integral abhängen. Nachdem er die Hauptpunkte jener Probleme auseinander gesetzt, discutirt er die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die gefundene Lösung ein Maximum oder Minimum sei. Die allgemeine Methode wird zum Schluss an einigen bekannten Beispielen erläutert. Wn.

E. HEINE. Aus brieflichen Mittheilungen. Clebsch Ann. II. 187-191. 1870.

Die zweite Mittheilung betrifft den Beweis des Satzes, dass für willkürliche Aenderungen δy der Ausdruck:

$$\int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ry}{dx^r}\right) \delta y \, dx$$

nur dann verschwinden kann, wenn f selbst in den Integrationsgrenzen verschwindet. Ni.

L. Lindelöf. Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima. Clebsch Ann. II. 160-166. 1870.

Siehe Abschnitt IX. Cap. 3 D.

W. Walton. On a problem in the calculus of variation. Quart. J. X. 72-78. 1869.

Siehe Abschnitt X. Cap. 4.

Siebenter Abschnitt.

Funktionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

J. THOMAE. Abriss einer Theorie der complexen Funktionen und der Thetafunktionen einer Veränderlichen. Halle. Nebert. 1870.

Siehe Abschnitt VII. Cap. 2.

E. BELTRAMI. Articolo bibliografico: Teorica generale delle funzioni di variabili complesse, del professore Felice Casorati. Vol. I. Pavia 1868. Battagl. G. VII. 29-41. 1869.

Eine Empfehlung des Casorati'schen Werkes (Vgl. Fortschr. d. M. I. 128-130). Indem der Verfasser die historische Entwickelung der Theorie der complexen Grössen, wie sie Casorati giebt, recapitulirt, verweilt er zunächst bei Gauss, von dessen Anzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio II. (Gött. Anz. 1831) er den grössten Theil übersetzt wiedergiebt. Im Folgenden werden vorzugsweise die Verdienste Cauchy's um die Ausbildung der Theorie der Funktionen complexer Variabeln hervorgehoben.. M.

J. WORPITZKY. Beiträge zur Funktionentheorie. Pr. Berlin 1870.

Es handelt sich in dem ersten Theile dieser Arbeit darum, für eine endliche Differenz $b-a$ das bestimmte Integral

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{b-a}$$

in der Anschauung zu fixiren. Hier ist $f(z)=X+iY$ eine mehrdeutige Funktion von $z=x+iy$, die den für die endliche Bestimmtheit des Integrals ausreichenden, wenn auch nicht durchaus nothwendigen Bedingungen (die in der Abhandlung: „Ueber die Endlichkeit von bestimmten Integralen und Reihensummen", Berlin 1867, vom Verfasser gegeben sind), genügt. Theilt man den als gerade vorausgesetzten Integrationsweg $\mathfrak{w}$ von z in unendlich viele gleiche Theile, so ist das obige Integral der Punkt der mittleren Entfernung aller Punkte, welche in der Bahn $\mathfrak{W}$ der Funktion $f(z)$ den Theilpunkten von $\mathfrak{w}$ entsprechen; oder mechanisch gedeutet, ist das bestimmte Integral die complexe Coordinate des Schwerpunktes der Bahn $\mathfrak{W}$, wenn man letztere proportional dem Modul von $\frac{1}{f'(z)}$ belastet denkt. Diese Belastung lässt sich auch durch Ausbreitung eines Flächenstückes um $\mathfrak{W}$ darstellen.

Die „allgemeine Methode zur Berechnung der Werthe der Veränderlichen, für welche eine Funktion einen verlangten Werth annimmt", — welche den Inhalt des 2ten Theiles der Arbeit ausmacht, — beruht auf der Anwendung der recurrirenden Formel (2) $\varphi(z_{n+1})=f(z_n)$ auf die zu lösende Gleichung (1) $\varphi(\zeta)=f(\zeta)$. Die Bedingung, dass $\lim\limits_{n=\infty}\zeta_n=\zeta$ wird, ist: dass ζ_1 innerhalb eines um ζ beschriebenen Kreises liegt, der die Eigenschaft hat, dass für alle Punkte innerhalb desselben

$$\mathrm{mod}\,\frac{dz_{n+1}}{dz_n}=\mathrm{mod}\,\frac{f'(z_n)}{f'(z_{n+1})}<1$$

ist. Vortheilhafter als (2) für die Berechnung ist folgende Formel:

$$\varphi(\zeta_{n+1})=\frac{f(\zeta_n)\cdot\varphi'(\zeta_n)-\varphi(\zeta_n)\cdot f'(\zeta_n)}{\varphi'(\zeta_n)-f'(\zeta_n)}=f_n(\zeta_n).$$

Am einfachsten ist der Fall $\varphi(z)=z$. Verfasser wendet seine Methode auf den von Gauss (Theoria motus corp. coel. p. 10) behandelten Specialfall $u=\mu+e\sin u$ der Gleichung $u=x+\alpha\varphi(u)$ an, deren Wurzel sich bekanntlich nach der Lagrange'schen Reihe entwickeln lässt, (Lagrange, Mém. de l'Ac. de Berlin 1768). Ferner wird die Rechnung an einem numerischen Beispiel, der Wurzel der Gleichung $z^7+28z^4=480$ durchgeführt und mit dem Resultat von Gauss (Beiträge zur Theorie d. alg. Glchgn. 1849,

§ 16. — Werke III. 93) verglichen. Zur Beurtheilung des Fehlers dient die Formel:

$$\operatorname{mod}(\zeta_{n+1}-\zeta) < \operatorname{mod}(\zeta_{n+1}-\zeta_n)\frac{p}{1-p},$$

wo p den grössten Modul von $\frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}$ auf dem Wege für z_n bezeichnet.

Der dritte Theil der Arbeit ist eine Abhandlung „über die Glieder der Taylor'schen Reihe und eine auf ihre Eigenschaften gestützte Methode zur Berechnung der singulären Punkte und der Wurzeln der Funktionen". Der Verfasser nennt einen um $z=t$ beschriebenen Kreis K, worin die monogene Funktion $f(z)$ zugleich mit ihrer Ableitung überall endlich, eindeutig und stetig ist, einen *s*-fach algebraischen Convergenzkreis von der Ordnung α, wenn: 1) nur für s Unendlichkeitspunkte z' auf ihm $\lim\limits_{z=z'}(z-z')^\alpha f(z)$ eine und zwar bei jeder Annäherung dieselbe bestimmte endliche Grösse ist, und wenn 2) für eine Nummer n $\lim\limits_{z=z'}(z-z)^{\alpha+n}f^n(z)$ ebenfalls endlich ist. Für alle Punkte a_s des K, wofür dieser von der Ordnung α wird, gilt die Summe:

$$\frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega}f^{\omega}(t)}{\binom{-\alpha}{\omega}\omega!}=\psi(t,\omega)+\sum_{a_s}A_s e^{i(\varrho-\varrho_s)(\alpha+\omega)},$$

worin $\psi(t,\omega)$ eine für $\omega=\infty$ verschwindende Funktion und A_s endliche nicht verschwindende Constanten bedeuten. Zunächst werden nun die Glieder der Taylor'schen Reihe für einen einfach-algebraischen Convergenzkreis betrachtet, und Näherungsformeln zur Berechnung von a und α aufgestellt. Die Berechnung der Nullpunkte einer Funktion, also auch die Auflösung der Gleichungen lässt sich leicht darauf zurückführen. Beispiele: $1-z-uz^2=0$, $\frac{e^z-1}{z}=0$, $z^7+28z^4-480=0$. Für einen mehrfach-algebraischen Convergenzkreis giebt der Verfasser einen Ausdruck zur Berechnung der A_m nach der Bestimmung der a_m, und verweilt nur bei der Berechnung der Grössen a_m-t. Es lassen sich aus den Coefficienten der Taylor'schen Reihe die Coefficienten einer Gleichung s^{ten} Grades berechnen, durch deren Wurzeln a_m-t die s singulären Punkte a_s bestimmt werden. Für einen 2-fach algebraischen Convergenzkreis werden die Beispiele $1-z-uz^2=0$ und $z^3-mz^2-1=0$ durchgeführt. M.

H. HANCKEL. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktionen. Ein Beitrag zur Feststellung des Begriffes der Funktion überhaupt. Universitätspr. Tübingen. 1870.

Die „einleitenden Bemerkungen über den Funktionsbegriff", mit denen der Verfasser beginnt, führen den Nachweis, dass die allmähliche Ausbildung des Begriffes „Funktion" mit den Fortschritten der Analysis Hand in Hand gegangen ist. Descartes stellte zuerst die Abhängigkeit der Werthreihen zweier veränderlichen Grössen geometrisch dar, und für dieses Abhängigkeitsverhältniss schufen Leibniz und Joh. Bernoulli den Ausdruck „Funktion". Euler's Definition hatte nur algebraische Funktionen vor Augen und wurde durch Fourier's Entdeckung, ganz beliebige, keinem einfachen Gesetz genügende, oder verschiedenen Gesetzen in ihren verschiedenen Theilen folgende, „illegitime" Funktionen durch periodische Reihen darzustellen, ungenügend. Ihr folgte die Dirichlet'sche Nominaldefinition, die auch nicht für die Bedürfnisse der Analysis ausreicht. Selbst gegen Riemann's System, welches auf der Definition der (monogenen) Funktion einer complexen Variabeln basirt, sind neuerdings Bedenken geltend gemacht, zumal gegen das von ihm sogenannte Dirichlet'sche Princip. Der Verfasser erörtert nun, um über diese Schwierigkeiten hinwegzukommen, zunächst die Mannigfaltigkeit der in dem reinen Dirichlet'schen Funktionsbegriffe enthaltenen, möglichen Grössenbeziehungen zweier Veränderlichen, und schenkt dabei besondere Aufmerksamkeit den bisher wenig oder gar nicht beachteten „illegitimen" Funktionen. Er beschränkt sich aber zunächst nur auf reelle Variabele und reelle endliche Werthe der Funktionen Einer Veränderlichen. Während man bisher ausschliesslich solche Funktionen mit unendlich vielen Oscillationen unendlich kleiner Argumente analytisch dargestellt hat, welche jene unendlich vielen Oscillationen nur in der Umgebung einzelner Punkte zeigen, stellt der Verfasser analytische, unbedingt convergente Reihen auch für solche Funktionen auf, welche in ganzen Intervallen durchaus oscilliren. Dies gelingt mit Hülfe des sogenannten Princips der Conden-

sation der Singularitäten, welches darin besteht, dass man von einer Funktion mit unendlich vielen Singularitäten zu einer andern Funktion übergeht, in der sich diese unendlich vielen Singularitäten gewissermassen auf eine endliche Strecke zusammendrängen. Dieses Princip liefert die mannigfachsten linear unstetigen Funktionen, d. h. solche, welche in unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig sind. Sie zerfallen in punktirt- und in total unstetige Funktionen, von denen erstere immer, letztere niemals integrabel sind. Beide Klassen werden analytisch dargestellt. Die Schlussbemerkung enthält eine Kritik des Funktionsbegriffes, welche mit Nothwendigkeit auf die Riemann'sche Definition führt. Es folgen noch 3 Noten: I. Ueber den Begriff der Grenze, II. Beispiele von Funktionen, welche in ganzen Linien total unstetig sind, und III. Ueber Funktionen complexer Veränderlicher, welche linear unstetig werden. M.

A. Grunert. Allgemeine analytische Theorie der Funktion $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Vierecke. Grunert Arch. LI. 423-498. 1870.

Die Bemühungen von Gauss, Lobatschewsky, Bolyai u. A., die Theorie der Parallelen zu begründen, haben auch eine rein analytische Auffassung dieses Gegenstandes hervorgerufen und den Verfasser zu den hier niedergelegten rein-analytischen Resultaten geführt. Auf die Beziehungen dieser Untersuchungen zur Geometrie ist hier nicht eingegangen, und die Bezeichnung „eingebildete Dreiecke und Vierecke" soll nur eine abgekürzte Bezeichnung für gewisse rein analytische Beziehungen sein. Die Funktion $\Pi(x)$ wird definirt durch die Gleichungen

$$\sin\Pi(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}},\quad \cos\Pi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

und werden im ersten Kapitel der Arbeit verschiedene Relationen zwischen den trigonometrischen Funktionen des $\Pi(x)$, sowie des $\Pi(x\pm y)$ hergeleitet, ferner die Differentialquotienten des $\sin\Pi(x)$, $\cos\Pi(x)$ etc. nach x. Das zweite Kapitel handelt von dem imaginären oder eingebildeten Dreiecke, dessen Seiten a, b, c und Winkel A, B, C den Bedingungen

$$0<A<180^\circ,\ 0<B<180^\circ,\ 0<C<180^\circ,\ A+B+C \gtreqless 180^\circ$$

und $$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b),$$
$$(\cos A + \cos B \cos C) \sin \Pi(a) = \sin B \sin C$$
und den durch cyklische Vertauschung hieraus entstehenden 4 Gleichungen genügen. Aus diesen Fundamentalformeln fliesst eine grosse Reihe von Formeln, die den Grundformeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie ganz analog sind. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Untersuchung, ob zwischen dem imaginären Dreieck und dem reellen gewisse Analogien Statt finden. Diese Analogien werden durchgeführt an den Beziehungen, welche ein reelles Dreieck ABC zu denjenigen Dreiecken ADC und BDC hat, welche entstehen, wenn man einen Punkt D auf der Seite AB oder deren Verlängerung annimmt. Schliesslich wird die Grenze gesucht, der sich die Summe der Grundlinien von n gleichschenkligen imaginären Dreiecken mit dem Winckel $\frac{2\pi}{n}$ an der Spitze, für unendlich grosse n nähert. Im vierten Kapitel wird eine zwischen 2 Seiten und den daran liegenden drei Winkeln und einer der beiden andern Seiten eines imaginären Vierecks statt findende allgemeine Relation bewiesen, von der Lobatschewsky (Giorn. d. Matem. 1867. 301) einen besonderen Fall betrachtet hat. M.

F. W. HÜLTMANN. Potensläran. Dillner Tidskr. III. 250. 1870.

Darstellung der Potenzlehre für den ersten Unterricht. Die Potenz wird definirt durch die Gleichung:
$$a^{\mu+\nu} = a^{\mu} . a^{\nu},$$
wo μ, ν, a beliebige algebraische Grössen sind. Hn. (Wn.)

SEIDEL. Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes der Form
$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$
Münch. Abh. XI. II. 1870.

Bei Gelegenheit der Behandlung der Aufgabe, eine Funktion y von x, welche definirt ist durch die Gleichung
$$x^y = y,$$

nach Potenzen von lx zu entwickeln, setzt Eisenstein (Crelles J. XXVIII.), ohne eine nähere Untersuchung darüber anzustellen, voraus, dass der unendliche Potenzausdruck

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$$

(in welchem unter x eine positive Grösse verstanden wird), nach der also bestimmten Grenze y konvergire so lange, und nur so lange, als $x \leqq 1$ ist; und da die Grenzen für die Konvergenz seiner Reihe andere sind, so statuirt er die Gleichheit der letzteren mit dem unendlichen Ausdruck innerhalb des engeren Werthgebietes von x, welches den zweierlei Umgrenzungen zugleich angehört.

Die Reihe, welche Eisenstein mit Hülfe der vorstehenden Gleichung abgeleitet hat, konvergirt, seiner Untersuchung nach, innerhalb der Strecke

$$x = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \text{ bis } x = \sqrt[e]{e}.$$

Das wirkliche Verhalten des unendlichen Potenzausdruckes in Bezug auf Konvergenz ist indess, wie Herr Seidel gezeigt hat, ein anderes, als Eisenstein voraussetzt.

Werden die Bezeichnungen $x^x = x_1$, $x^{x_1} = x_2$, $x^{x_2} = x_3, \ldots\ldots$ $x^{x_r} = x_{r+1}, \ldots\ldots$ eingeführt, so spricht sich, nach Herrn Seidel, das Gesammtergebniss seiner Diskussion des unendlichen Potenzausdruckes in Folgendem aus:

Lässt man x von Null an wachsen bis zu dem Werthe $\frac{1}{e^e}$, so ist die Grenze von x_{2n}, für unendlich wachsende n, eine Funktion u von x, welche nach und nach von 0 bis $\frac{1}{e}$ wächst, und die Grenze von x_{2n+1} ist unter gleichen Umständen eine andere Funktion v, welche nach und nach abnimmt von 1 bis $\frac{1}{e}$.

Herr Seidel zeigt sodann die Berechnung beliebig vieler zusammengehöriger x, u, v aus den Gleichungen IX, VIII, VII seiner Abhandlung.

Für $x=\frac{1}{e^e}$ fallen u und v im Werthe $\frac{1}{e}$ zusammen. Wächst x von diesem Werthe an bis zum Maximalwerthe $\sqrt[e]{e}$, der für $y=e$ als Maximalwerth von x der Gleichung $lx=\frac{ly}{y}$ genügt, so konvergiren die x_{2n} und x_{2n+1} gegen eine und dieselbe Grenze y, die allmälig von $\frac{1}{e}$ bis e zunimmt und der Gleichung $x^y=y$ genügt.

Erst da, wo diese Gleichung ein reelles y versagt, nämlich jenseits $x=\sqrt[e]{e}$, hört auch der Potenzausdruck zu konvergiren auf.

Von den beiden Funktionen lim x_{2n} und lim x_{2n+1} ist die erste die kleinste reelle Wurzel der Gleichung $x^v lx - lv = 0$, die andere ist die grösste Wurzel dieser Gleichung für $x<1$, aber kleinste Wurzel für $x>1$.

Bemerkenswerth ist, dass diese beiden Funktionen in dem grössten Theile ihres reellen Verlaufes, zwischen $x=\sqrt[e]{e}$ und $x=\frac{1}{e^e}$, unter sich und mit der Wurzel y der Gleichung $x^y=y$ (und zwar der kleineren, wo diese Gleichung zwei Lösungen darbietet) zusammenfallen; von der bezeichneten Stelle bis zu $x=0$ hat aber jede von den dreien ihre besondere Fortsetzung, die ohne Unterbrechung der Continuität sich an den allen gemeinsamen Theil anschliesst.

Der Konvergenzbereich der Eisenstein'schen Reihe dehnt sich also nach unten nicht so weit, nach oben nur ebenso weit aus, als derjenige, in welchem der unendliche Potenzausdruck der Gleichung $x^y=y$ Genüge leistet. „Für den Umfang des reellen Gebietes, in welchem die beiden unendlichen Ausdrücke dieselbe Funktion darstellen", schliesst Herr Seidel, „setzt also lediglich die Bedingung der Konvergenz der **Reihe** den Markstein". Wtn.

A. Winckler. Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. Wien. Ber. LXII. 356-394. 1870.

Der Verfasser leitet in dem ersten Theile seiner Arbeit eine

allgemeine Regel her für die Bestimmung eines durch seine trigonometrischen Funktionen gegebenen Bogens. Sind gegeben:

$$\cos\varphi = a_0,\ \sin\varphi = a,\ \ (a_0^2 + a^2 = 1),$$

und bezeichnet man mit $[a_0]$ und $[a]$ die absoluten Werthe von a_0 und a, und setzt $a_0 = \varepsilon_0[a_0]$ und $a = \varepsilon[a]$, so ist der gesuchte Bogen:

$$\varphi = \left\{1 - \frac{1}{2}\varepsilon(1+\varepsilon_0)\right\}\pi + \varepsilon_0\varepsilon . \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{a}{a_0}\right],$$

wo unter $\operatorname{arctg}\left[\frac{a}{a_0}\right]$ der im ersten Quadranten liegende oder kleinste Bogen verstanden ist, dessen trigonometrische Tangente gleich $\left[\frac{a}{a_0}\right]$ ist. Auch für die Summe und Differenz zweier, überhaupt für jede lineare Funktion mehrerer durch ihre trigonometrischen Funktionen gegebenen Bogen lassen sich die allgemeinen Ausdrücke mit Hülfe des obigen Satzes herstellen. Eine fernere Anwendung lässt sich machen auf die Zerlegung der Logarithmen und Bogen complexer Ausdrücke in den reellen und imaginären Theil, z. B. $\log\frac{m+n\sqrt{-1}}{r+s\sqrt{-1}}$, $\operatorname{arctg}(p+q\sqrt{-1})$, $\arcsin(p+q\sqrt{-1})$, $\arccos(p+q\sqrt{-1})$. Die resultirenden Gleichungen sind zwar schon lange bekannt (Vgl. Cauchy, Leçons sur le calcul infinitésimal), aber das Gesetz, nach welchem die Vorzeichen ganz allgemein bestimmt werden, ist bisher noch nicht angegeben.

In dem zweiten Theile der Arbeit untersucht H. Winckler die Frage: Giebt es ausser den bekannten noch andere in rationalem Verhältnisse zur halben Peripherie stehende Bogen, deren trigonometrische Funktionen ein rationales Verhältniss zum Radius haben? Durch Betrachtung der Wurzeln der beiden algebraischen Gleichungen, die aus den nach geraden Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitenden Entwickelungen von $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi . \cos\varphi}$ und $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ für $\varphi = \frac{m}{n}\pi$ erhalten werden, wird bewiesen, dass es in jedem Quadranten nur einen Bogen giebt, dessen cos, sin und tang rational sind.

Wir kommen nun zum dritten Gegenstande der Arbeit. Bekanntlich giebt die Entwickelung einiger transcendenten Funktionen nach der Maclaurin'schen Formel so complicirte höhere Differentialquotienten, dass es schwer ist, das allgemeine Gesetz der Glieder der Reihe zu übersehen, und dass die Diskussion des Restes der Entwickelung fast unmöglich ist. Zur Feststellung der Identität der Entwickelung mit der zu entwickelnden Funktion ist aber ausser dem Nachweis der Convergenz noch der Beweis erforderlich, dass der Rest sich der Grenze Null nähert. Der Verfasser giebt deshalb ein neues, im Wesentlichen mit der Methode der unbestimmten Coefficienten übereinkommendes Verfahren an, welches nicht nur sehr leicht und schnell die Glieder der Entwickelung derartiger Funktionen bestimmt, sondern auch in vielen Fällen die nöthigen Criterien der Gültigkeit und Convergenz der Reihe liefert. Dieses Verfahren beruht nämlich auf der Vergleichung der unbestimmten Coefficienten in der Entwickelung von $f(x)$ mit den oft sofort bestimmbaren in der Entwickelung von $f'(x)$ oder $f''(x)$ oder einer höheren Ableitung, und die Grenze des Restgliedes in $f(x)$ lässt sich leicht durch Vergleichung mit dem Restgliede in $f'(x)$ oder $f''(x)$ oder einer höheren Ableitung angeben. Eine Anwendung wird gemacht auf $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ und $(\arcsin x)^2$. Zum Schluss bemerkt der Verfasser, dass diese Methode allgemein für die Integration der Differentialgleichungen durch Reihen von Vortheil sei.

M.

J. Brockmann. Die goniometrischen Funktionen in ihrer allgemeinen analytischen Bedeutung. Pr. G. Cleve. 1870.

Der Verfasser will den Versuch machen, „eine allgemein analytisch schlechthin gültige Bedeutung der goniometrischen Funktionen zu statuiren und auf Grund dieser allgemeinen analytischen Bedeutung die Wege für ihre Anwendung zu ebenen". Ausgehend von den Entwickelungen der Funktionen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ nach der Maclaurin'schen Reihe, gelangt der Verfasser zu den bekannten Relationen zwischen diesen 3 Funktionen, zu der Moivre'schen Formel für beliebige Exponenten und zu den Additionstheoremen für die goniometrischen Funktionen. Weder

die Resultate noch ihre Herleitung sind neu. Obwohl der Verfasser die Allgemeingültigkeit der in den ersten Paragraphen entwickelten Formeln betont, benutzt er doch in § 6 die Reihe für $\operatorname{lognat}\frac{1+x}{1-x}$, ohne die Grenzen ihrer Gültigkeit anzugeben. Die letzten Paragraphen enthalten die Elemente der hyperbolischen Funktionen nach Gudermann. M.

A. Cayley. On the logarithms of imaginary quantities.
Proc. of L. M. S. II. 50-54. 1869.

Stellen die Punkte P, P' mit den Coordinaten $xy, x'y'$ die imaginären Grössen $x+iy$, $x'+iy'$ dar, so wird $\frac{P}{P'}=\frac{x+iy}{x'+iy'}=X+iY$ durch einen Punkt mit den Coordinaten X, Y dargestellt. Setzen wir $P=re^{i\vartheta}, P'=r'e^{i\vartheta'}$, $\frac{P}{P'}=\frac{r}{r'}e^{i\varphi}$, so erhalten wir, je nachdem die Strecke $P'P$ die negative x-Axe oberhalb, unterhalb oder gar nicht trifft, $\vartheta-\vartheta'-\varphi$ resp. $=+2\pi, -2\pi, 0$. Nun verstehen wir unter $\log r$ den reellen Logarithmus der positiven reellen Grösse r, und definiren den log der imaginären Grösse P durch die Gleichung $\log P=\log r+i\vartheta$. Diesen einen so fixirten Werth, der aus der unendlichen Menge ausgewählt ist, nennt der Herr Verfasser desshalb „selected value". In den obigen drei Fällen ist nun $\log P-\log P'$ resp. $=\log\frac{P}{P'}+2i\pi$, $\log\frac{P}{P'}-2i\pi$, $\log\frac{P}{P'}$. Der Durchschnitt der Strecke PP' mit der negativen x-Axe verursacht also eine, aber auch die einzige Discontinuität der Funktion $\log P$. Deshalb betrachten wir das Integral $\int_{P'}^{P}\frac{dz}{z}$ im Vergleich mit dem durch die Substitution $z=P'u$ erhaltenen

$$\int_{1}^{\frac{P}{P'}}\frac{du}{u},$$

erstreckt über eine Gerade. Log u wird nicht discontinuirlich, wenn u von 1 bis $\frac{P}{P'}$ geht; wohl aber $\log z$, wenn z von P' nach P geht und $P'P$ die negative x-Axe schneidet. Diese Disconti-

nuität ist eine nothwendige Folge der obigen Definition, und würde bei einer andern Definition beim Ueberschreiten einer andern vom Nullpunkt aus gezogenen Linie entstehen. Nun integriren wir $\frac{dz}{z}$ über die 4 Seiten des Vierecks $1PP'\frac{P}{P'}1$ und erhalten in den obigen 3 Fällen resp. $-2i\pi$, $+2i\pi$, 0: dasselbe Resultat, welches die Integration über irgend eine den Nullpunkt umschliessende Linie ergiebt, aber ohne die Principien der Integration von Funktionen, welche für $z=0$ unendlich werden, erhalten. Aus $\log P = \log r + i\vartheta$ folgt $P^m = e^{m\log P} = r^m e^{im\vartheta}$, $(x+iy)^m = r^m e^{im\vartheta}$, wo r^m den positiven reellen Werth darstellt. Hiermit ist der Werth von $(x+iy)^m$ fixirt als „selected value". Aehnlich haben wir für imaginäre Exponenten $m=p+qi$ als „selected value":

$$(x+iy)^{p+qi} = e^{(p+qi)(\log r+i\vartheta)} = e^{p\log r-q\vartheta+i(p\vartheta+q\log r)} = r^p e^{-q\vartheta} e^{i(p\vartheta+q\log r)}.$$

Aus der Betrachtung des Integrals $\int Z\,dz$, wo Z eine Funktion von $\log z$ oder z^m ist, erhellt die Nothwendigkeit, derartige ausgewählte, selected, Werthe von vorn herein zu fixiren.

M.

Hill. Remarques sur les fonctions entières à diviseurs binômes. Borchardt J. LXX. 103-104. 1869.

Wenn $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0$ durch $x^n - b^n = 0$ theilbar ist, also die Wurzeln $x = b\varepsilon$ $(\varepsilon^n = 1)$ hat, so wird
$f(b\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + \cdots + A_{n-1}\varepsilon^{n-1} = 0$, daher $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots A_{n-1} = 0$ d. h. $a_0 + a_n b^n + a_{2n} b^{2n} + \cdots = 0$, $a_1 + a_{n+1} b^n + a_{2n+1} b^{2n} + \cdots = 0, \ldots$ Aus diesen Gleichungen können nächst b^n die $n-1$ Bedingungsgleichungen dafür gefunden werden, dass $f(x)$ einen binomischen Faktor n^{ten} Grades hat.

No.

Tchébycheff. Sur la détermination des fonctions par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable. J. d. l. S. Ph. de Moscou IV.

Herr Tchébycheff erinnert zunächst an die Cauchy'sche Formel zur Bestimmung einer Funktion aus n speciellen Werthen $u_1, u_2, \ldots u_n$, die den Werthen $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Variabeln ent-

sprechen, für den Fall eines rationalen Bruches $\frac{N}{D}$ (D und N sind Polynome von x und nicht höheren Grades als λ resp. $n-\lambda-1$). Dann giebt der Verfasser folgende Lösung des Problems:

„Es sei $\varphi x = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$,

$$U = \varphi x \cdot \left\{\frac{u_1}{(x-x_1)\varphi' x_1} + \frac{u_2}{(x-x_2)\varphi' x_2} + \cdots + \frac{u_n}{(x-x_n)\varphi' x_n}\right\}.$$

Theilt man successive φx durch U, U durch den ersten Rest k u. s. f., bis man zu einem Rest k_μ gelangt, dessen Grad geringer als $n-\lambda$ ist; sind ferner $q, q_1, \ldots q_\mu$ die sich dabei ergebenden Quotienten, $k_1, k_2, \ldots k_\mu$ die dadurch erhaltenen Reste, so wird der letzte Rest mit dem Zeichen $+$ oder $-$ der Zähler N sein. Den Nenner $D=Q_\mu$, ausgedrückt in $q_1, q_2, \ldots q_\mu$, erhält man durch die Formeln:

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = q_1,\ Q_2 = q_1 q_2 + 1, \ldots$$
$$Q_i = Q_{i-1} \cdot q_i + Q_{i-2}, \ldots Q_\mu = D = Q_{\mu-1} q_\mu + Q_{\mu-2}.$$

Was das Zeichen von N betrifft, so ist es positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Divisionen gerade oder ungerade ist".

Dann geht der Verfasser zu irrationalen Funktionen über. Er betrachtet den einfachsten Fall, wo u die Wurzel der Gleichung $u^2 + Lu + M = 0$ ist, und sucht nur die Lösung, in der der Grad von L nicht höher als n und die Funktion M von geringstem möglichen Grade ist. Er reducirt das Problem auf die Bestimmung solcher Funktionen L und W, dass die Differenz $L\frac{U}{\varphi x} - W$, wo U und φx die obige Bedeutung haben, die Funktion $\frac{U^2}{fx}$ möglichst genähert darstellt. Ein ähnliches Problem ist übrigens bereits von demselben Verfasser in dem Aufsatz: „Sur le développement des fonctions en séries au moyen des fractions continues 1866" gelöst. Z. (O).

E. Netto. De transformatione aequationis $y^n = R(x)$, designante $R(x)$ functionem integram rationalem variabilis x in aequationem $\eta^2 = R_1(\zeta)$. Diss. Berlin. 1870.

Nach der Ermittelung des Ranges ϱ einer Funktion $y^n = R(x)$

wird eine Methode zur Berechnung der Differentiale der Integrale erster Gattung $H(xy)$ angegeben. Darauf werden die Bedingungen für die Bildung von Funktionen $f(xy)$ eines bestimmten Grades $< \frac{\varrho+2}{2}$ oder $\frac{\varrho+3}{2}$ in Form von Determinanten aus den $H(xy)$ aufgestellt. Für $\varrho = 1$, 2, und 3 werden die betreffenden Transformationen ausgeführt. No.

E. Schroeder. Ueber iterirte Funktionen. Clebsch Ann. III. 286-322. 1870.

Ist $F(z)$ eine beliebige eindeutig gegebene Funktion von z, so wird die $r$fach iterirte Funktion $F^r(z)$ durch die recurrenten Gleichungen definirt:

$$F^1(z) = F(z),\ F^2(z) = FF(z) \ldots F^r(z) = F^{r-1}F(z),$$

woraus die Relationen hervorgehen:

$$F^{r_1}F^{r_2}(z) = F^{r_1+r_2}(z) = F^{r_2}F^{r_1}(z)$$
$$\{F^{r_1}\}^{r_2}(z) = F^{r_1 r_2}(z) = \{F^{r_2}\}^{r_1}(z).$$

Durch diese Fundamentalgleichungen ist auch die Ausdehnung des Begriffes iterirter Funktionen für beliebige (reelle und complexe) Werthe von r gegeben. Insbesondere bedeutet

$w = F^{-r}(z)$ die Auflösung der Gleichung $F^r(w) = z$,

$w = F^{\frac{p}{q}}(z)$ die der Gleichung $F^q(w) = F^p(z)$.

Fasst man $F^r(z)$ als Funktion zweier Argumente r und z auf, so kann sie auch durch die Differenzengleichung:

$$\Phi(r, z) = \Phi(r-1, F(z))$$

mit der Anfangsbedingung $\Phi(1, z) = F(z)$ definirt werden, zu deren näherer Bestimmung die Forderung hinzugefügt wird, dass die Funktion einen analytischen Ausdruck habe.

Es wird nun zunächst für die iterirten Funktionen der von Hoppe (Schlömilch Z. V. 136) und Serret (Cours d'algèbre supérieure t. II. p. 329) bereits behandelten linear gebrochenen Funktionen $F(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{\beta_0 z + \beta_1}$, der einzigen, von der bisher die Wiederholungen untersucht sein sollen, eine neue Darstellung gegeben und die Curve, auf welcher sich der Punkt $F^r(z)$ bewegt, wenn r von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, discutirt.

Zur Auffindung neuer iterabler Funktionen wird folgendes Princip aufgestellt:

Ist $\Phi(z)$ eine Funktion, deren Iteration $\Phi^r(z)$ bekannt ist, ist ferner $z=\psi(\zeta)$, mithin $\zeta=\psi^{-1}(z)$, dann ist, wenn man die Funktion bildet:

$$F(z)=\psi\{\Phi(\psi^{-1}(z))\},$$

ihre Wiederholung:

$$F^r(z)=\psi\{\Phi^r(\psi^{-1}(z))\}.$$

Daraus werden die beiden Folgerungen gezogen:

1) Besteht für die Funktion $\psi(\zeta)$ ein Additionstheorem, so dass

$$\psi(\zeta+h)=F\{\psi(\zeta)\} \text{ oder } \psi\{\psi^{-1}(z)+h\}=F(z),$$

dann nehme man $\Phi(\zeta)=\zeta+h$, und man erhält, da $\Phi^r(\zeta)=\zeta+rh$, für die Wiederholung von $F(z)$:

$$F^r(z)=\psi\{\psi^{-1}(z)+rh\}.$$

2) Besteht für $z=\psi(\zeta)$ ein Multiplikationstheorem, so dass

$$\psi(m\zeta)=F(\psi(\zeta)), \text{ oder } \psi\{m\psi^{-1}(z)\}=F(z),$$

dann erhält man unter der Annahme $\Phi(\zeta)=m\zeta$, woraus $\Phi^r(\zeta)=m^r\zeta$ für die Wiederholung von $F(z)$:

$$F^r(z)=\psi\{m^r\psi^{-1}(z)\}.$$

Unter den Anwendungen, die von vorstehenden Theoremen gemacht werden, heben wir die Iteration derjenigen rationalen Funktionen hervor, welche erhalten werden, wenn man für $\psi(\zeta)$ die elliptischen Funktionen $(\sin\operatorname{am}\zeta)^2$, $\cos\operatorname{am}\zeta$, $\Delta\operatorname{am}\zeta$ mit dem Modul k wählt, und das Multiplikationstheorem für den speciellen Fall $m=2$ anwendet. Es ergiebt sich als Iteration der Funktionen:

$$F(z)=\frac{4z(1-z)(1-k^2z)}{1-k^2z^2},\quad F(z)=\frac{z^2-(1-z^2)(1-k^2+k^2z^2)}{1-k^2(1-z^2)^2},$$

respective:

$$F^r(z)=\left\{\sin\operatorname{am}\left(2^r\int_0^{\sqrt{z}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\,k\right)\right\}^2$$

$$F^r(z)=\cos\operatorname{am}\left(2^r\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\,k\right)$$

($\psi(\zeta)=\Delta\operatorname{am}\zeta$ liefert eine Funktion, die aus der 2ten durch Vertauschung von k mit $\frac{1}{k}$ hervorgeht).

Das oben erwähnte Princip liefert ferner, indem für ψ eine linear gebrochene Funktion, für $\Phi(z)$ die Funktion $\frac{2z}{1+z^2}$ gesetzt wird, deren Wiederholungen unter den Beispielen zu den vorhergehenden Theoremen bereits angegeben sind, die Iteration einer Klasse gebrochener Funktionen 2ten Grades, zwischen deren 5 Coefficientenverhältnissen 2 Relationen bestehen.

Darauf wird die Iteration solcher Funktionen $F(z)$, die sich durch eine Maclaurin'sche Potenzreihe mit dem Terme z als Anfangsglied darstellen lassen, eingehend betrachtet, und mit Benutzung der Coefficientenausdrücke in der Entwickelung der verschiedenen Potenzen von $F(z)$ nach steigenden Potenzen von z für die Coefficienten der Reihenentwickelung der iterirten Funktion $F^r(z)$ ein Bildungsgesetz aufgestellt, in Folge dessen dieselben als ganze Funktionen von r erscheinen, und welches für $r=-1$ das Umkehrungsproblem der Funktion $F(z)$ enthält. Zum Schluss wird unter Bezugnahme auf eine frühere Arbeit des Verfassers (Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Clebsch Ann. II. 317 s. p. 42) mit Hilfe der erlangten Ergebnisse der Nachweis geliefert, dass die gebräuchlichen Näherungs-Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen:

$$z'=z-\frac{f}{f'} \text{ und } z'=z-\frac{ff'}{f'^2-ff''},$$

für eine quadratische Gleichung gegen eine der beiden Wurzeln convergiren. Hr.

NÖTHER. Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer complexen Variabeln. Gött. Nachr. 1869. 298.

Der Verfasser signalisirt eine Reihe von a. a. O. zu beweisenden Sätzen über die Funktion s von r unabhängig Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$, welche durch eine algebraische Gleichung $F(s, x_1, x_2 \dots x_r)$ definirt ist; unter mehrfacher Beziehung auf die von Riemann bei einer unabhängig Veränderlichen (Crelle J. LIV.) und von Clebsch bei zwei unabhängig Veränderlichen (Comptes rend. 1868) betretene Classifikation. Es gilt, die Resultate dieser Autoren nach mehreren Seiten hin auszudehnen.

Dabei werden gelegentliche Anwendungen auf räumliche Gebilde gemacht.

Ein genauerer Bericht muss bis zum Erscheinen der angekündigten Ausführung verschoben werden. Wy.

C. Neumann. Ueber eine Erweiterung desjenigen Satzes der Integralrechnung, welcher der Theorie der Partialbruchzerlegung zu Grunde liegt. Gött. Nachr. 1869. 9.

„Es seien $\varphi, F_1, F_2, \ldots, F_p$ ganze rationale Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$ vom Grade $r, n, n_1, n_2, \ldots, n_p$; R die Funktionaldeterminante von $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$ nach $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$; und r die von R nach $\frac{df}{dx}$ gebildete Partialdeterminante.

Aus den Gleichungen $F_1=0, F_2=0, \ldots, F_p=0$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_p$ durch x ausgedrückt, so dass $\frac{\varphi}{rf}$ nur von x abhängt; und $\Sigma'\frac{\varphi}{rF}$ bedeute die Summe sämmtlicher Gestalten, welche jener Bruch für die gefundenen $n_1 . n_2 \ldots n_p$ Werthe von x annimmt. Dann erhält man durch Integration längs der Begrenzung eines Gebietes A der x-Fläche die Identität

$$\int_A \left(\Sigma'\frac{\varphi}{rF}\right) dx = 2\pi i . \Sigma\frac{\varphi}{R},$$

wo die Summation rechter Hand ausgedehnt zu denken ist über alle diejenigen, den $(p+1)$ Gleichungen

$$F=0, F_1=0, \ldots, F_p=0$$

genügenden Werthsysteme von $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$, bei denen das x innerhalb A liegt".

Den Beweis dieses Satzes giebt der Verfasser nicht. Er spricht die Erwartung aus, dass er auf andere als algebraische Funktionen ausgedehnt werden könne, und zeigt, dass ein Satz von Jacobi (Theoremata nova algebraica, Crelle J. XIV., 281) und von Liouville (Liouville J. VI.) in ihm enthalten ist. Wy.

L. Kronecker. Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Berl. Monatsber. 1869. 159-193 und 688-698.

Herr Kronecker sucht, vom Sturm'schen Satze ausgehend, das den Sturm'schen Entwickelungen zu Grunde liegende Ketten-

bruch-Verfahren zu verallgemeinern und die allgemeineren Resultate zu interpretiren. Es schliesst sich daran eine Ausdehnung des Cauchy'schen Satzes. — Die Grundlage der Untersuchung bildet der von Herrn Kronecker neu eingeführte Begriff der Charakteristik von Funktionen-Systemen. Es seien F_0, $F_1, \dots F_n$ $(n+1)$ Funktionen, jede von den n Variabeln $z_1 \dots z_n$. Setzt man $(n-1)$ der Funktionen $=0$, $F_i=0$, (wo i alle Indices ausser h und k bezeichnet) so ist die Veränderlichkeit der z auf eine einfache Mannigfaltigkeit beschränkt; die zugehörigen Werthsysteme z bilden eine stetige Folge, die als Linie zu betrachten ist; ein einzelnes Werthsystem der z wird als Punkt betrachtet. Der Sinn des Fortganges in einer solchen Linie wird bestimmt durch das Zeichen der Funktionaldeterminante, die gebildet ist aus den $(n-1)$ Funktionen F_i und irgend einer eindeutigen Funktion ψ. Je nachdem ψ an Stelle von F_h oder F_k tritt, ist das Zeichen der Funktionaldeterminante und damit der Sinn des Umganges ein verschiedener. Von allen Linien, die so aus dem Funktionensystem entstehen $[\frac{1}{2} n (n+1)$ an der Zahl], wird angenommen, dass sie geschlossen seien, dass ausserdem die Anzahl der durch n Gleichungen bestimmten Punkte endlich sei. — Irgend eine solche Linie $[hk]$ schneidet die $(n-1)$fache Mannigfaltigkeit $F_h=0$, und tritt an diesen Stellen aus dem Bereiche, wo $F_h . F_k < 0$ in einen, wo $F_h . F_k > 0$, oder umgekehrt. Herr Kronecker fasst dies so auf, dass die Linie dort aus dem Bereiche $F_h=0$ austritt, oder in denselben eintritt. Subtrahirt man nun die Anzahl der Austritte von der der Eintritte, so ist die Hälfte dieser Differenz eine ganze Zahl (positiv, negativ oder $=0$) und constant, wie man auch die Indices h und k auswählen mag; die Zahl heisst daher Charakteristik des Funktionensystems. Für dieselbe beweist Herr Kronecker ausser dem Satz von der Constanz noch einige andere Sätze. — Sind $F_0, F_1, \dots F_n$ ganze rationale Funktionen, so lässt sich auf dieselben ein der Kettenbruch-Entwickelung analoges Verfahren anwenden, das Herr Kronecker in einer früheren Arbeit (Monatsber. 1865 Dezember) auseinandergesetzt hat; und die durch dasselbe gebildete Reihe von

Funktionen kann zur Ermittelung der Charakteristik dienen, wie an einem einfachen Beispiel ($n=2$) gezeigt wird.

Herr Kronecker leitet dann weiter für die Charakteristik einen Ausdruck durch ein ($n-1$)faches Integral ab; dies Integral stellt in doppelter Hinsicht eine Verallgemeinerung des von Gauss in der theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum Art. 6 gegebenen Integrals dar; denn es ist 1) die Beschränkung auf 3 Integrationsvariable und 2) auch für $n=3$ die Beschränkung auf Begrenzungen einfacher Körper aufgehoben, also der Fall einer gegenseitigen Durchdringung von Körpern nicht ausgeschlossen. — Das erwähnte Integral von Gauss setzt die Dichtigkeit als constant voraus, man erhält ein etwas allgemeineres, wenn man auch die Dichtigkeit variabel annimmt. Auch für das so erhaltene Integral findet Herr Kronecker eine Verallgemeinerung und gelangt dadurch zur Ausdehnung gewisser Potentialsätze auf n Variable. Diese Sätze beziehen sich namentlich auf den Werth, den die Summe der zweiten Differentialquotienten des Potentials annimmt. — Für den Fall, dass $n=2m$, und dass die Funktionen $F_1, \dots F_n$ die n Theile von m Funktionen der complexen Variabeln:

$$y_1 = z_1 + i \cdot z_{m+1},\ y_2 = z_2 + i \cdot z_{m+2}, \dots\ y_n = z_m + i \cdot z_{2m},$$

ergiebt sich aus dem Vorhergehenden eine Verallgemeinerung des Cauchy'schen Satzes. — Einige der gefundenen Resultate kann man mittelst partieller Integration vielfacher Integrale nachträglich verificiren. Bemerkt mag noch werden, dass diejenige der aufgestellten Relationen, welche eine Verallgemeinerung der partiellen Differentialgleichung des Potentials bildet, unabhängig ist von den Voraussetzungen, die bei Herleitung der Potentialgleichung über die Differentiirbarkeit der Dichtigkeitsfunktion gemacht werden.

In der zweiten Arbeit leitet Herr Kronecker aus der Theorie der Charakteristik von Funktionen-Systemen eine Ausdehnung der Theorie der Krümmung von Flächen auf Funktionen mehrerer Variabeln ab. Wenn die Funktionen $F_1, F_2, \dots F_n$ die partiellen Ableitungen der Funktion F_0 sind, so geht das Integral der Charakteristik für den Fall $n=3$ in die über die Fläche $F_0=0$ ausgedehnte „curvatura integra" über, letztere durch 4π

dividirt. Dies Resultat leitet Herrn Kronecker darauf, die Theorie der Krümmung auf Funktionen von n Variabeln zu übertragen; über die betreffenden Untersuchungen werden jedoch in der vorliegenden Arbeit nur einige vorläufige Andeutungen gegeben.

Wn.

R. Lipschitz. Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Funktionensystems. Gött. Nachr. 1870. 439-477.

Es seien $F_1, F_2 \dots F_n$ Funktionen der reellen Variabeln $z_1, z_2 \dots z_n$, und diese Funktionen seien innerhalb eines bestimmten Gebietes G eindeutig und reell, ihre ersten partiellen Differentialquotienten überall endlich und stetig. Damit dann auch umgekehrt jedem System von Werthen der Funktionen $F_1, \dots F_n$ nur ein System von Grössen $z_1, \dots z_n$ entspricht, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, deren erste bekanntlich die ist, dass die Funktionaldeterminante der Funktionen F in dem ganzen Gebiete G ihr Vorzeichen nicht ändert. Herr Lipschitz untersucht jene Bedingungen näher und gelangt zu folgenden Resultaten: In dem System

$$F_1 = C_1, F_2 = C_2, \dots F_n = C_n$$

sind den sämmtlichen Funktionen F feste Werthe vorgeschrieben. Wenn man aus diesem System successive alle verschiedenen Paare von Gleichungen $F_k = C_k$ und $F_l = C_l$ fortlässt, so bestimmen die jedesmal übrigbleibenden $n-2$ Gleichungen für die Variabeln $z_1, \dots z_n$ eine Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung $M_{k,l}$, deren Begrenzung eine in sich zurücklaufende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung sei, die der Begrenzung des Gebietes G angehört. Die Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung $M_{k,l}$ sei nun einfach zusammenhängend; $F_k = C_k$ und $F_l = C_l$ mögen, jede für sich, eine solche einfache Mannigfaltigkeit bezeichnen, die sich in $M_{k,l}$ von einem Werthsystem der Grenze bis zu einem zweiten einfach erstreckt; jene beiden Mannigfaltigkeiten erster Ordnung mögen ferner nicht unendlich viele discrete gemeinsame Werthsysteme besitzen, und $M_{k,l}$ keinerlei Singularitäten haben. Sind diese Bedingungen erfüllt und ist endlich für jedes Werthsystem die Funktionaldeterminante der F innerhalb des Ge-

bietes G eine Grösse von unveränderlichem Vorzeichen, so genügt dem obigen System

$$F_1 = C_1, \ldots . F_n = C_n$$

nur ein System von Werthen $z_1, z_2 \ldots z_n$.

Herr Lipschitz giebt, nachdem er die obigen Resultate bewiesen, eine Methode an, um das Werthsystem der z zu bestimmen, das einem gegebenen System von Werthen der Funktionen F eindeutig zugehört. Auch auf Funktionen von complexen Variabeln lassen sich die erhaltenen Resultate ausdehnen, auf ähnliche Art, wie in der oben besprochenen Arbeit von Kronecker, indem man die getrennten Bestandtheile der m complexen Variabeln als $2m$ reelle Variable und gleichzeitig die getrennten Bestandtheile der m complexen Funktionen als $2m$ reelle Funktionen jener reellen $2m$ Variabeln betrachtet. In diesem Falle ist die Funktionaldeterminante ein Aggregat von zwei Quadraten. Wn.

C. Weierstrass. Ueber die allgemeinsten eindeutigen und $2n$fach periodischen Funktionen von n Veränderlichen. Berl. Monatsber. 1869. 853-857. 1870.

Die Theorie der Abel'schen Funktionen lehrt, in dem gegebenen Gleichungssysteme

$$u_1 = \sum_1^n {}_\nu \psi_1(x_\nu),\ u_2 = \sum_1^n {}_\nu \psi_2(x_\nu), \ldots u_n = \sum_1^n {}_\nu \psi_n(x_\nu)$$

die Funktionen ψ, deren Ableitungen algebraische Funktionen der x sind, so zu bestimmen, dass jeder rational und symmetrisch aus den x zusammengesetzte Ausdruck eine eindeutige, $2n$fach periodische und durch Θ-Funktionen ausdrückbare Funktion der n Grössen u wird. Da aber zwischen den Moduln dieser Θ-Funktionen eine Anzahl von Relationen besteht, welche ihre Willkürlichkeit beschränkt, so sind diese Θ-Funktionen nur specielle, mithin auch die obigen $2n$fach periodischen Funktionen von n Argumenten nicht die allgemeinsten ihrer Art. Um zu den allgemeinsten eindeutigen und $2n$fach periodischen Funktionen von n Argumenten zu gelangen, stellt der Herr Verfasser sich die Aufgabe, die Funktionen ψ so zu bestimmen, dass zu einem Systeme der Grössen u nicht unendlich viele Systeme der x gehören, sondern nur eine endliche Anzahl; dann giebt

es eine eindeutige und $2n$fach periodische Funktion von $u_1, u_2 \dots u_n$, durch deren partielle Ableitungen sich **algebraisch** die Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades ausdrücken lassen, deren Wurzeln die x sind. M.

B. Riemann. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$fach periodische Funktion von n Veränderlichen unmöglich ist. (Schreiben an H. Weierstrass). Borchardt J. LXXI. 197-200 1870.

Die Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ einer $2n$fach periodischen Funktion lassen sich in die Form $x_\nu = \sum_1^{2n}{}_\mu a_\mu^\nu \xi_\mu$ setzen, worin a_μ^ν den Periodicitätsmodul von x_ν für die μ^{te} Periode bedeutet und die ξ reelle Grössen sind. Durchlaufen die ξ alle Werthe von 0 bis 1, mit Ausschluss eines dieser Grenzwerthe, so entsteht ein $2n$fach ausgedehntes Grössengebiet von der Eigenschaft, dass jedes Werthsystem der x nur **einem** Werthsysteme dieses Grössengebietes nach diesen $2n$ Modulsystemen congruent ist. Der Verfasser nennt es „ein bei diesen $2n$ Modulsystemen periodisch sich wiederholendes Grössengebiet". Der Beweis der Unmöglichkeit einer einwerthigen Funktion von n Variabeln mit mehr als $2n$ Perioden beruht nun auf dem Satze, dass sich $2n+1$ Modulsysteme, zwischen denen die n Gleichungen $\sum_1^{2n+1}{}_\mu a_\mu^\nu m_\mu = 0$ stattfinden, worin die m ganze Zahlen sind, aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen. Diese können so gewählt werden, dass der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Grössengebietes für sie nur ein aliquoter Theil von dem für die $2n$ ersten Modulsysteme a beträgt. Dasselbe gilt, wenn noch mehr Modulsysteme vorhanden sind. So wird aber das Gebiet auf ein unendlich kleines reducirt, und die Funktion wird eine Funktion von weniger als n linearen Ausdrücken der Grössen x.

M.

A. Grandi. Di una formola nota che si puo dedurre da un teorema di Cauchy. Battaglini G. VIII. 374-375. 1869.

Aus dem Satze von Cauchy:

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_s w d \log(z - z_0),$$

welcher den Werth einer Funktion w einer complexen Variabeln durch ein Integral ausdrückt, das in positiver Richtung über die Begrenzung einer Fläche genommen ist, in der $w(z)$ monodrom, stetig und endlich ist, — leitet der Verfasser direct die Formel

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_s \left(\frac{du}{dp}\log r - u\frac{d\log r}{dp}\right) ds$$

her, welche Riemann in seiner Dissertation (art. 10 p. 14) gegeben hat, für die Funktion u von x und y, welche durch die Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ definirt ist. M.

H. Weber. Note zu Riemann's Beweis des Dirichlet'schen Princips. Borchardt J. LXXI. 29-39. 1870.

Die Absicht des Verfassers ist, die Zweifel, welche mehrfach gegen die Allgemeinheit und Strenge des Dirichlet'schen Princips erhoben worden sind, aufzuklären. Diese Zweifel betrafen besonders die Befugniss der Anwendung der Variationsrechnung auf eine Funktion, deren Eigenschaften a priori ganz unbekannt sind. Der Verfasser umgeht dieselbe auf einem Wege, der mit dem von ihm in der Abhandlung: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+k^2u=0$; Clebsch Ann. I, 1" (s. p. 217), eingeschlagenen übereinstimmt, aber noch strenger ist. Die besonders missliche partielle Integration wird ganz umgangen. Der Verfasser führt zunächst den Beweis für den speciellen Fall:

$$\Omega(u)=\iint\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right\}dx\,dy$$

und bestimmt durch ein, wenn auch praktisch unausführbares, doch convergentes Rechnungsverfahren eine Reihe von Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n$ derart, dass der absolute Werth des Integrals

$$\iint\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dv}{dy}\right)dx\,dy$$

kleiner als eine beliebig klein zu wählende Grösse ε_n ist für alle im Innern der Fläche S stetigen, am Rande verschwindenden Funktionen v, für welche $\Omega(v)$ endlich bleibt. Für beliebig

grosse m und gehörig grosse Werthe von n kann ferner das Integral

$$\iint \left\{\frac{dw}{dx}\left(\frac{du_m}{dx}-\frac{du_n}{dx}\right)+\frac{dw}{dy}\left(\frac{du_m}{dy}-\frac{du_n}{dy}\right)\right\} dx\, dy$$

kleiner als eine beliebig klein zu wählende Grösse gemacht werden, wenn w eine beliebige im Innern von S stetige Funktion ist, für welche $\Omega(w)$ endlich ist, die aber am Rande nicht verschwindet, sondern beliebige Werthe erhält. Nun kann man eine im Innern einer Kreisfläche mit sämmtlichen Differentialquotienten stetige Funktion w, welche der Differentialgleichung $\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}=0$ in der ganzen Fläche S genügt, bestimmen, deren Differentialquotient am ganzen Rande beliebig vorgeschriebene Werthe hat, welche der einzigen Bedingung unterworfen sind, dass das über den Rand erstreckte Integral $\int \bar{w}\, ds$ verschwindet.

Dies führt zu dem Schlusse, dass für jeden Punkt im Innern von S die Funktion u_n sich mit unendlich wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze nähert. Die Grenzfunktion

$$U(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int\left(\bar{u}\frac{-d\log r}{dp}-\bar{u}'\log r\right)ds$$

ist mit sämmtlichen partiellen Differentialquotienten im ganzen Innern der Fläche S endlich und stetig und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2U}{dx_0^2}+\frac{d^2U}{dy_0^2}=0,$$

und geht stetig in die am Rande vorgeschriebenen Werthe über.

Nach Durchführung dieses speciellen Falles lässt sich der allgemeinere Fall, in welchem die zu bestimmende Funktion gewisse gegebene Unstetigkeitsbedingungen zu erfüllen hat, leicht erledigen. M.

F. E. Prym. Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$. Borchardt J. LXX. 354-362. 1869.

In den Fällen, in denen es bis jetzt gelungen ist, das System der Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy},\ \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$$

zu integriren (Riemann: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse, 1851", und „Theorie der Abel'schen Funktionen, 1857"), sind die Grenzbedingungen so gewählt, dass sie u allein enthalten; dadurch ist die Aufgabe auf die Lösung der einen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ reducirt, und man hat die zugehörige Funktion v durch ein einfaches, u enthaltendes Integral ausgedrückt. Herr Prym hat sich nun die Aufgabe gestellt, das obige System von Differentialgleichungen auch in solchen Fällen, wo die Grenzbedingungen u und v untrennbar enthalten, für welche also die Riemann'schen Methoden nicht mehr ausreichen, zu integriren. Vorliegende Arbeit macht uns mit folgendem Resultate seiner Untersuchungen (die nächstens in ihrer Gesammtheit veröffentlicht werden sollen) bekannt.

Man zerlege die $\overline{2p+1}$ fach zusammenhängende Fläche T durch p Schnittpaare a_ν, b_ν und durch p von demselben Punkte π ausgehende, nach dem gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkt der Schnitte a_ν, b_ν führende Schnittlinien c_ν in eine einfach zusammenhängende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c begrenzte Fläche T'. Diese Fläche T' werde ferner durch r, von π ausgehende, nach beliebig in T' fixirten Punkten ε_ϱ gezogene, einander und sich nicht schneidende Linien l_ϱ in eine, von den beiden Seiten der a, b, c, l begrenzte einfach zusammenhängende Fläche T'' verwandelt. Alsdann existirt eine in T'' allenthalben einwerthige, mit Ausschluss der Punkte ε_ϱ stetige complexe Funktion $u+vi$ der Coordinaten x, y, die in der ganzen Fläche T'' den Differentialgleichungen $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$ genügt. Für jeden Punkt ε_ϱ lässt sich eine Funktion

$$\varphi_\varrho(r_\varrho)=L_\varrho \ln r_\varrho+L'_\varrho\frac{1}{r_\varrho}+L''_\varrho\frac{1}{r_\varrho^2}+\cdots,$$

worin die L willkürliche Constanten und r_ϱ, je nach der Beschaffenheit des Punktes ε_ϱ, die Ausdrücke $z-z_\varrho$, $(z-z_\varrho)^{\frac{1}{\nu}}$, $\frac{1}{z}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ bedeutet, herstellen, so dass $(u+vi)-\varphi_\varrho(r_\varrho)$ für ε_ϱ stetig bleibt. Die Funktion $(u+vi)$ kann durch von einander unab-

hängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden, und ihr Verhalten an der Begrenzung der Fläche T'' ist dadurch charakterisirt, dass sie beim Ueberschreiten der Querschnitte in lineare Ausdrücke von sich selbst übergeht. Es wird $(u+vi)^+$ längst $a_\nu, b_\nu, c_\nu, l_\nu$ resp. gleich $A_\nu(u+vi)^- + A'_\nu$, $B_\nu(u+vi)^- + B'_\nu$, $(u+vi)^- + \varDelta_\nu$, $(u+vi)^- - 2\pi i L_\varrho$; und zwischen den $5p+r$ Constanten $A_\nu, B_\nu, A'_\nu, B'_\nu, \varDelta_\nu, L_\varrho$ bestehen die $p+1$ Relationen

$$2\pi i \sum_1^r{}_\varrho L_\varrho = \sum_1^p{}_\nu \varDelta_\nu, \quad \varDelta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1),$$

die aber nicht den Charakter von Beschränkungen haben, sondern aus der Einwerthigkeit der Funktion allein schon folgen. Rechnet man alle diejenigen Funktionen, für welche die mit dem Modul 1 behafteten Constanten A_ν, B_ν dieselben sind, in eine Gruppe mit dem Symbol $\begin{pmatrix} A_1, A_2, \dots A_p \\ B_1, B_2, \dots B_p \end{pmatrix}$, so erscheinen die von Riemann untersuchten Abel'schen Integrale als Gruppe $\begin{pmatrix} 1, 1, \dots 1 \\ 1, 1, \dots 1 \end{pmatrix}$, sind also specielle Fälle der obigen Funktionen $u+vi$.

Die grössere in Aussicht gestellte Arbeit des Verfassers wird die ausführliche Theorie der Funktionen $u+vi$ und einer zweiten Klasse Funktionen $U+Vi$ mit denselben Eigenschaften, für welche aber die Moduln der Constanten A_ν, B_ν nicht gleich 1 sind, bringen und zeigen, dass die Haupteigenschaften der durch ϑ-Funktionen darstellbaren Gebilde abgeleitet werden können, ohne die Kenntniss der ϑ-Funktionen vorauszusetzen. M.

F. E. Prym. Ueber ein Randintegral. Borchardt J. LXXI. 305-315. 1870.

Es seien ω und ω' zwei solche Funktionen $u+vi$ der complexen Variabeln $x+yi$, deren Existenz in der obigen Arbeit mit Hülfe der Fläche T'' nachgewiesen ist. Diese Fläche T'' verwandle man dadurch, dass man die r Unstetigkeitspunkte ε_ϱ durch r sich nicht schneidende geschlossene Curven k_ϱ ausscheidet, in eine Fläche T^*, und betrachte das Integral $\int\limits_R^{+} \omega\, d\omega'$, ausgedehnt in positiver Richtung über die ganze, aus den beiden Seiten der

Schnitte a, b, c, l' (d. h. den Theil der l bis zu den k) und den äusseren Seiten der Curven k bestehende Begrenzung R der Fläche T^*. Dieses Integral ist Null, da ω und ω' überall in T^* einwerthig und stetig sind. Andererseits ist es aber gleich der Summe der über die einzelnen Begrenzungstheile erstreckten Integrale. Durch Ausführung dieser Integrationen gelangt der Verfasser zu einer merkwürdigen Relation zwischen den Constanten, die das Verhalten der Funktionen ω und ω' an der Begrenzung von T'' und in den Punkten ε_ϱ charakterisiren.

M.

F. E. Prym. Beweis zweier Sätze der Funktionentheorie. Borchardt J. LXXI. 223-236. 1870.

Der erste Satz lautet: „Eine in der Fläche T' allenthalben einwerthige und stetige Funktion $u+vi$ der complexen Variabeln $x+yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein (für $\nu=1, 2\dots p$) $(u+vi)^+$ längs a_ν, b_ν, c_ν resp. gleich

$$A_\nu(u+vi)^- + A'_\nu,\quad B_\nu(u+vi)^- + B'_\nu,\quad (u+vi)^- + \varDelta_\nu,$$

wobei die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Modul 1 besitzen, ist immer eine Constante, wenn die p Grössen $\varDelta_\nu$ Null sind und ferner von den $2p$ übrigen Constanten A'_ν, B'_ν alle die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu=1, B_\nu=1$ ist, ebenfalls den Werth Null haben". Der Beweis beruht darauf, dass das Integral $2i\iint\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right\}dx\,dy$ über die ganze Fläche T' erstreckt, unter den gemachten Voraussetzungen gleich Null ist. Die Bedeutung dieses Satzes für die Abel'schen Integrale, für welche die A_ν, B_ν sämmtlich gleich 1 sind, ist ersichtlich. In ihm liegt nämlich erst der Nachweis, dass wenn man aus irgend welchen p von einander unabhängigen Abel'schen Integralen das System der linear aus diesen zusammengesetzten allgemeinen Integrale (mit dem Periodicitätsmodul πi für den Schnitt a_ν und Null für die $p-1$ übrigen Schnitte) bilden will, die Determinante der willkürlichen Constanten der linearen Gleichungen nicht verschwindet.

Der zweite Satz enthält das Resultat, dass die Funktion $u+vi$ immer eine Constante ist, wenn die Quadrate der A_ν, B_ν alle gleich 1 sind und wenn die reellen Theile der A'_ν, B'_ν, folglich auch die reellen Theile der Δ_ν, den Werth Null haben. Aus ihm folgt ein Satz, welcher nur für die 2^{2p} Gruppen complexer Funktionen gilt, deren Charakteristiken aus dem Symbol

$$\begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots A_p \\ B_1, B_2, \ldots B_p \end{pmatrix}$$

hervorgehen, wenn man für die A_ν, B_ν nur reelle Grössen mit dem Modul 1 setzt. Für die allenthalben endlichen Funktionen spricht der Verfasser diesen Satz aus. Er ist analog dem Satze, den Riemann (Abel'sche Funktionen p. 20) für die Gruppe

$$\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots 1 \\ 1, 1, \ldots 1 \end{pmatrix}$$

gegeben hat. M.

H. A. Schwarz. I. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ für die Fläche eines Kreises. Wolf J. XV. 113-128. 1870.

H. A. Schwarz. II. Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. Wolf J. XV. 272-286. 1870.

H. A. Schwarz. III. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Berl. Monatsber. 767-795. 1870.

I. Für die Integration der angegebenen Differentialgleichung sind folgende Bedingungen vorgeschrieben: Das Gebiet der Veränderlichen x, y soll eine einfache Kreisfläche S vom Radius 1 sein, die Werthe von u sollen innerhalb und auf der Grenze von S endlich und stetig, längs der Grenze von S aber gegeben sein. Das Integral

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\psi$$

genügt allen diesen Bedingungen, wenn r und φ die Polarcoor-

dinaten von x, y in Bezug auf den Mittelpunkt von S als Pol, und $f(\psi)$ den gegebenen Werth von u für $r=1, \varphi=\psi$ bedeutet.

II. Ist für die Veränderlichen x, y ein solcher Bereich T gegeben, dass er aus zwei einfacheren Bereichen T_1 und T_2 zusammengesetzt werden kann, die ein Gebiet T^* gemeinsam haben, existirt ferner für jeden einzelnen der beiden Bereiche T_1 und T_2 allemal eine Funktion u, welche im Innern des Bereiches endlich ist, an der Grenze desselben aber beliebig vorgeschriebene, einer oder mehreren stetigen Folgen angehörige, endliche Werthe annimmt, und der Gleichung $\Delta u=0$ genügt, dann lässt sich durch den genannten Grenzübergang die Existenz einer Funktion u von denselben Eigenschaften für den Bereich $T=T_1+T_2-T^*$ nachweisen.

Das Verfahren ist in Kürze folgendes. Die Begrenzungen von T_1 und T_2 theilen sich gegenseitig in vier Gruppen von Strecken L_0, L_1, L_2, L_3, in der Weise, dass L_0 und L_2 die Begrenzung von T_1, L_1 und L_3 die von T_2 bilden, während L_0 und L_3 das Gebiet T vollständig einschliessen, L_1 und L_2 dagegen innerhalb T liegen. Nach der Voraussetzung existiren nun zwei Reihen von Funktionen $u_1, u_3, \ldots u_{2n+1} \ldots$ und $u_2, u_4, \ldots u_{2n} \ldots$, welche für die Gebiete T_1 resp. T_2 definirt sind, der Gleichung $\Delta u=0$ genügen und in folgender Beziehung zu einander stehen. u_{2n+1} hat längs L_0 die der gesuchten Funktion u vorgeschriebenen Werthe und stimmt längs L_2 mit u_{2n} überein; u_{2n} hat längs L_3 die vorgeschriebenen Werthe und stimmt längs L_1 mit u_{2n-1} überein. Der Werth von u_1 längs L_2 kann dabei beliebig gewählt werden. u_{2n+1} und u_{2n} nähern sich nun mit wachsendem n zwei Grenzfunktionen u' und u'', welche für T_1 resp. T_2 definirt sind und innerhalb T^* übereinstimmen.

Daraus folgt aber unmittelbar die Existenz einer Funktion $u=u'=u''$ von den verlangten Eigenschaften für den ganzen Bereich $T=T_1+T_2-T^*$.

III. Der Verfasser theilt in diesem Auszuge ein Verfahren mit, die bekannten Riemann'schen Sätze über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u=0$ abzuleiten, ohne dass dabei das Dirichlet'sche Princip zur Anwendung kommt.

Die Hauptschwierigkeit liegt hierbei darin, dass zunächst

ein Beweis für die Existenz der Funktion u geliefert werden muss. Der Beweis wird im Wesentlichen auf folgende Schlüsse gestützt.

Wenn sich zwei Bereiche conform auf einander abbilden lassen, in der Art, dass die erste Ableitung der die Abbildung vermittelnden analytischen Funktion im Innern der Bereiche niemals gleich 0 oder ∞ wird, wenn ferner für den einen Bereich die Gleichung $\Delta u = 0$ unter beliebigen Grenzbedingungen integrirt werden kann, so ist damit dieselbe Integration auch für den andern Bereich geleistet. Für eine einfache Kreisfläche ist jene Integration leicht auszuführen (siehe I.); dasselbe gilt für die von zwei Kreisbogen begrenzte Mondfigur und das Kreissegment, für das ebene Dreieck, für das Kreisbogendreieck, in welchem zwei Eckenwinkel rechte sind, und für den Kreissector, da sich diese Bereiche auf den Kreis conform abbilden lassen. Jeder von geraden Strecken und Kreisbogen begrenzte Bereich kann aus diesen einfacheren Bereichen so zusammengesetzt werden, dass die Voraussetzungen des in II. angedeuteten Verfahrens erfüllt sind; damit ist dann die Existenz einer Funktion von den angegebenen Eigenschaften auch für diesen zusammengesetzten Bereich begründet.

Dieser Satz kann nun auf einen von einer endlichen Anzahl analytischer Linien umschlossenen Bezirk durch folgendes Hülfsmittel ausgedehnt werden. Es lässt sich, wenn eine beliebige analytische Linie gegeben ist, stets ein Gebiet abgrenzen, welches ein Stück dieser Linie enthält und in der Art auf eine von zwei Kreisbogen begrenzte Mondfigur abgebildet werden kann, dass jenem Stück der Linie die Sehne der Mondfigur entspricht. Das hier angegebene Verfahren gilt auch noch, wenn der gegebene Bereich auf einer von ebenen oder sphärischen Flächen gebildeten Polyederoberfläche ausgebreitet ist.

Am Schlusse der Mittheilung zeigt der Verfasser noch, wie man durch, den vorhergehenden ganz analoge, Mittel auch noch den Fall erledigen kann, dass die Funktion u im Innern des gegebenen Bereiches gewisse vorgeschriebene Unstetigkeiten besitzen soll. Die Behandlung dieser Unstetigkeiten lässt hinreichend erkennen, dass die angegebenen Beweismethoden für

die Theorie der Abel'schen Integrale dasselbe leisten, was Riemann mit Hülfe des Dirichlet'schen Princips abgeleitet hat.

B.

H. Weber. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+k^2u=0.$$

Clebsch Ann. I. 1-36. 1869.

Es werden in dieser Abhandlung die Eigenschaften einer Funktion u, welche jener Gleichung genügt, gründlich untersucht, und die Bedingungen festgestellt, denen k^2 unterworfen ist, wenn die Funktion geforderte Grenzbedingungen erfüllen soll. — Auf Einzelheiten lässt sich hier ohne grosse Ausführlichkeit nicht eingehen. Die wirkliche Ausführung der Integration durch eine stetige Funktion gelingt bei folgenden Grenzgestalten der Integrationsfläche: Rechteck, Kreis, confocale Parabeln, confocale Ellipsen. Im letzteren Falle bleibt aber noch die Integration der Gleichungen

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}-(A^2K^2\sin{}^2i\xi-\lambda)X=0,$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}+(A^2K^2\cos{}^2\eta-\lambda)Y=0$$

zu leisten übrig, was dem Verfasser in übersichtlicher Form nicht gelingt. Mathieu hat in Liouville J. die ersten Glieder der auflösenden Reihen berechnet, ohne das allgemeine Gesetz zu bestimmen.

Wy.

E. Heine. Ueber trigonometrische Reihen. Borchardt J. LXXI. 353-365. 1870.

Man stützte bisher den Beweis des Satzes: „Eine zwischen $x=-\pi$ und $x=+\pi$ gegebene endliche Funktion $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form

$$\alpha)\quad f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$

entwickeln", auf die Voraussetzung, dass das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrations-

grenzen endlich sind, gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder sei. Diese Voraussetzung ist aber, wie Herr Weierstrass gezeigt hat, nur dann gültig, wenn die Reihe in den Integrationsgrenzen in gleichem Grade convergent ist. Durch die Arbeiten von Dirichlet, Lipschitz und Riemann ist also noch nicht entschieden, auf wie viele Arten sich eine Funktion in eine Reihe mit bekannten Coefficienten entwickeln lasse. Deshalb hat Herr Heine an die Stelle des obigen Satzes einen andern gesetzt und bewiesen, der so lautet: „Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Funktion $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe α) entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im Allgemeinen in gleichem Grade zu convergiren. Die Reihe stellt die Funktion im allgemeinen von $-\pi$ bis $+\pi$ dar". Der Ausdruck „im allgemeinen" bedeutet, dass auf die Uebereinstimmung in einer endlichen Anzahl von Punkten verzichtet wird. Dieser Satz entscheidet also die Frage, ob die Fourier'sche Entwicklung die einzige ist, noch nicht, ist aber für viele Anwendungen ausreichend. M.

G. Cantor. Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. Borchardt J. LXXII. 130-138. 1870.

G. Cantor. Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. Borchardt J. LXXII. 139-142 1870.

In der ersteren der beiden Arbeiten beweist Herr Cantor den Satz: „Wenn zwei unendliche Grössenreihen $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ und $b_1, b_2, \dots b_n, \dots$ so beschaffen sind, dass die Grenze von $a_n \sin nx + b_n \cos nx$ für jeden Werth von x, der in einem gegebenen Intervalle ($a < x < b$) des reellen Grössengebietes liegt, mit wachsendem n gleich Null ist, so convergirt sowohl a_n wie b_n mit wachsendem n gegen die Grenze Null". Dieser Satz führt zu einem Criterium für die Convergenz einer trigonometrischen Reihe

$$\frac{1}{2} b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \dots,$$

das Riemann („Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867") unter der Voraussetzung der Integralform $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt$ und $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt$ für a_n und b_n bewiesen hat.

Dieser Satz dient auch zu dem in der zweiten Arbeit gegebenen Beweise, dass es nur eine Darstellung von $f(x)$ in Form einer für jeden Werth von x convergenten trigonometrischen Reihe giebt. M.

Capitel 2.

Besondere Funktionen.

O. Schlömilch. Ueber den Werth von arctg $(\xi+i\eta)$. Schlömilch Z. XIV. 77-80. 1869.

Setzt man $\operatorname{arctg}(\xi+i\eta)=x+iy$, wo ξ und η die gegebenen, x und y die gesuchten reellen Grössen bezeichnen, so ergiebt sich, dass der Werth für $\operatorname{arctg}(\xi+i\eta)$ nach der Beschaffenheit von ξ und η ein doppelter ist, nämlich:

$$m\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)}+\frac{i}{4}l\left\{\frac{\xi^2+(\eta+1)^2}{\xi^2+(\eta-1)^2}\right\},$$

wenn $\xi^2+\eta^2<1$;

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}+\frac{i}{4}l\left\{\frac{\xi^2+(\eta+1)^2}{\xi^2+(\eta-1)^2}\right\},$$

wenn $\xi^2+\eta^2>1$ ist.

Am Schlusse wird noch gezeigt, dass

$$\operatorname{arctg}(\xi+i\eta)=m\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{i}{4}l\left\{\frac{1+\eta}{1-\eta}\right\}$$

ist, wenn $\xi^2+\eta^2=1$ ist, wo das obere, beziehungsweise das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem ξ positiv oder negativ ist. T.

W. H. L. Russell. Report on recent progress in elliptic and hyperelliptic functions. Rep. Brit. Ass. 1869. 1870.

Der Verfasser behandelt zunächst die elliptischen Funktionen und theilt seine Arbeit in 4 Theile.

1) Neue Untersuchungen auf diesem Felde, welche den Begriff der Periodicität nicht erfordern.

2) Neue Untersuchungen über die Jacobi'sche Funktion Θ und die zugehörigen Reihen.

3) Modulargleichungen und einige andere Untersuchungen ähnlicher Art.

4) Einige der wichtigsten geometrischen und physikalischen Anwendungen der elliptischen Funktionen. Csy. (O.)

A. Steen. Om Ondrengen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af förste Art. Skrifter v. Kopenh. IV. 1869.

Siehe Abschnitt VI. Cap. 3. p. 144.

J. Thomae. Abriss einer Theorie der complexen Funktionen und der Thetafunktionen einer Veränderlichen. Halle. 1870.

Dieses Lehrbuch soll Denjenigen, welche eine grössere Vorlesung über elliptische Funktionen hören wollen, als Einleitung in die Theorie derselben dienen. Zu dem Ende werden im ersten Theile die Fundamente der Theorie der complexen Funktionen, zunächst der eindeutigen auseinander gesetzt. Auf die Gauss'sche Darstellung der complexen Zahlen folgt die Riemann'sche Charakteristik der Ebenenstücke in Bezug auf die Ordnung ihres Zusammenhanges, seine Definition einer Funktion einer complexen Variabeln durch eine partielle Differentialgleichung, und die aus dem Wesen der complexen Funktion fliessende conforme Abbildung. Hierauf geht der Verfasser zu den Integralen einer complexen Funktion über und giebt den Begriff eines über eine gegebene Linie erstreckten Integrals und seine Giltigkeit. Nun wird für eine Funktion $\omega(x)$, welche im Innern eines einfach-zusammenhängenden Flächenstückes S nur einen Punkt u hat, für welchen sie so unendlich oder unstetig wird, dass $\omega(x).(x-u)$ für $x=u$ verschwindet, und nur eine Linie, längs welcher sie zwar stetig ist, aber der Differentialgleichung $i\frac{d\omega(x)}{dy}=\frac{d\omega(x)}{dz}$ nicht genügt, der Cauchy'sche Satz bewiesen,

d. h. gezeigt, dass das über die ganze Begrenzung von S erstreckte Integral den Werth Null hat. Angewendet wird der Satz auf die über die Begrenzung von ξ erstreckten Integrale

$$\int\frac{dx}{x-\xi}=2\pi i \text{ und } \int\frac{\omega(x)\,dx}{(x-\xi)2\pi i}=\omega(x).$$

Ebenso lassen sich die Differentialquotienten des $\omega(x)$ durch ein Begrenzungsintegral ausdrücken, und man wird so auf die Entwickelung der Funktion $\omega(x)$ geführt. Es folgt der Taylor-sche Satz und die Bedingungen der Convergenz. An die Entwickelbarkeit in eine auf- und absteigende Reihe (Laurent'scher Satz) schliesst sich die Entwickelbarkeit in trigonometrische Reihen. Um die Entwickelung einer Funktion nach der Fourier'-schen Reihe abzuleiten, sieht der Verfasser eine reelle Funktion $h(\varphi)$, die für $\varphi=0\ldots 2\pi$ gegeben und so beschaffen ist, dass $h(2n\pi+\varphi)=h(\varphi)$ ist, als Funktion der Punkte der Peripherie eines um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises an und setzt

$$h(\varphi)=H(y,z)=H(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi).$$

Unter der Voraussetzung, dass $h(\varphi)$ nur für einzelne Werthe φ und zwar in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Potenz unendlich gross und dass sie nur für einzelne Werthe von φ unstetig werde, wird das Integral $\int\frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}}\cdot\frac{dx}{2\pi i}$ betrachtet. Nähert sich $h(\alpha+\delta)-h(\alpha)$ mit abnehmendem δ so der Null, dass diese Differenz mit δ^{a} dividirt, oder mit $\log\delta$, oder $(\log\delta)^2$ oder $\lg\lg\lg\delta=\lg{}^3\delta$ etc. multiplicirt, jedenfalls endlich bleibt, so nennt der Verfasser den Exponenten α oder die Funktionszeichen $\lg{}^n\delta$ bez. das Maass der Stetigkeit der Funktion $h(\varphi)$ an der Stelle α. Versteht man ferner unter einer gleichmässig convergenten Reihe eine unendliche Reihe, deren n erste Glieder sich mit wachsendem n einem bestimmten Grenzwerthe so nähern, dass eine bestimmte Zahl N angegeben werden kann, über welche n niemals zu steigen braucht, damit der Rest für alle Werthe der Variabeln der Reihe seinem absoluten Betrage nach kleiner als eine bestimmte Zahl ε bleibe, so kann das Fourier'sche Theorem folgendermaassen ausgesprochen werden: „Ist $h(\varphi)$ eine reelle Funktion von φ, welche in dem Intervall

von 0 bis 2π gegeben ist, und nur für einzelne Werthe von φ unstetig oder in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Ordnung unendlich ist, so lässt sich in diesem Intervall $\frac{1}{2}[h(\vartheta+0)+h(\vartheta-0)]$ überall da, wo dieser Ausdruck den Sinn einer bestimmten endlichen Zahl hat, und wo das Maass der Stetigkeit der Funktionen $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ oder $h(\vartheta-\psi)-h(\vartheta-0)$ für abnehmende ψ in dem Falle mindestens das der Funktion $\frac{d}{d\psi}(\lg{}^m\psi)^\alpha$ $(\alpha<0)$ ist, wenn eine dieser beiden Funktionen für abnehmende ψ unendlich viele Maxima und Minima haben sollte, in eine unendliche convergente, nach cos und sin ganzer Multipla des Bogens ϑ fortschreitende Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_\mu \cos\mu\vartheta\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos\mu\varphi\,d\varphi+$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_\mu \sin\mu\vartheta\int_0^{2\pi} h(\varphi)\sin\mu\varphi\,d\varphi$$

entwickeln, und zwar in eine für alle ϑ gleichmässig convergente Reihe, welche nicht in unmittelbare Nähe einer Unstetigkeitsstelle fallen, oder in die unmittelbare Nähe einer Stelle, wo $h(\varphi)$ unendlich viele Maxima und Minima hat und gleichzeitig das Maass der Stetigkeit unter das der Funktion

$$\frac{d}{d\psi}(\lg{}^m(\psi))^\alpha,\ (\alpha<0)$$

herabsinkt". Die gleichmässige Convergenz der Fourier'schen Reihe da, wo sie eine stetige Funktion darstellt, hat Herr E. Heine nachgewiesen (vgl. p. 217). Derselbe hat auch die Frage, ob sich $h(\vartheta)$ nur auf eine Weise durch eine für endliche Werthe von $\frac{1}{2}h(\vartheta+0)+\frac{1}{2}h(\vartheta-0)$ convergente trigonometrische Reihe darstellen lässt, durch folgenden Satz beantwortet, der in dem vorliegenden Werke abgedruckt ist: „Eine im Allgemeinen stetige und einwerthige, nicht nothwendig überall endliche Funktion $f(\vartheta)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine nach cos und sin ganzer Multipla des Bogens ϑ fortschreitende Reihe entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im Allgemeinen gleichmässig zu convergiren. Die

Reihe ist nicht überall, sondern nur im Allgemeinen gleich dem Werth der entwickelten Funktion". — Nach diesen Sätzen über die Fourier'sche Reihe kehrt der Verfasser wieder zu den complexen Funktionen zurück, charakterisirt die ganzen complexen Funktionen, ferner die rationalen complexen Funktionen aus den Unstetigkeiten und giebt die Partialbruch- und Produktentwickelung complexer Funktionen. Die Schlussparagraphen des ersten Theiles behandeln die mehrdeutigen complexen Funktionen nach Riemann's Methode. Als Beispiel einer mehrdeutigen algebraischen Funktion dient die zweiwerthige Funktion $R(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, und die Behandlung eines Integrals algebraischer mehrdeutiger Funktionen wird an dem Beispiel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gezeigt. Darauf folgt die Erläuterung einer Riemann'schen Fläche und deren Abbildung auf ein Parallelogramm. Am Schluss finden sich die Formeln zur Reduktion der allgemeinen Funktion dritten oder vierten Grades auf die canonische Form $(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$. Ein Anhang zu diesem Theil deutet die Reduktion der Integrale rationaler Funktionen von x und $R(x)$ auf die 3 Legendre'schen Gattungen an.

Der zweite Theil des Lehrbuches enthält die Theorie der Thetafunktionen einer Veränderlichen oder der Reihe $\sum_{n}^{+\infty}_{-\infty} e^{an^2+2nv}$. In Art. 1 definirt der Verfasser die ϑ-Funktionen durch die beiden Funktionalgleichungen

$$\vartheta_{hg}(v+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\,\vartheta_{hg}(v),$$
$$\vartheta_{hg}(v+ka) = (-1)^{gk}\,e^{-ak^2-2kv}\,\vartheta_{hg}(v),$$

worin h, g, k, λ beliebige ganze Zahlen sind, mit der Bedingung, dass die ϑ-Funktionen für alle endlichen Werthe von v endliche einwerthige Funktionen der complexen Variabeln v sind. Aus der Convergenz der durch die Substitution $v = \lg t$ gewonnenen Reihe wird die Existenz der ϑ-Funktionen gefolgert, und es werden die Punkte bestimmt, für welche $\vartheta(v)$ verschwindet. Art. 2 enthält die wichtigsten Beziehungen zwischen den Quadraten der vier ϑ-Funktionen und die Darstellung des Produktes $\vartheta_{hg}(u+v) \,.\, \vartheta_{hg}(u-v)$. In Art. 3 werden die elliptischen Funk-

tionen *sn*, *cn*, *dn* eingeführt und ihr Additionstheorem aufgestellt. Das Folgende (Art. 4 u. 5) behandelt die Differentialgleichungen der elliptischen und der ϑ-Funktionen und die Darstellung der elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung durch ϑ-Funktionen. Die Art. 6 u. 7 liefern die Entwickelung in einfach-unendliche Produkte, die sich leicht in die Jacobi'sche Form (Fundam.) bringen lassen. Die Constanten $\vartheta, \vartheta_{01}, \vartheta_{10}, \vartheta'_{11}$ werden mit Hülfe der Differentialgleichung $\frac{d^2\vartheta(v)}{dv^2} = \frac{4d\vartheta(v)}{da}$ in Produktform dargestellt. Im folgenden Artikel wird durch Umwandlung der einfach-unendlichen Produkte

$$\prod_0^\infty{}_m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi x}{\omega}}{\cos^2 \frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}}\right) \text{ u. ä.}$$

in doppelt-unendliche die Θ-Funktion als unbedingt convergentes zweifach-unendliches Produkt dargestellt:

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2kk'^2}{2\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk}} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{(2)}_{(m,m')} \left(1 - \frac{x}{u_{m,m'}}\right) e^{\frac{x}{u_{m,m'}} + \frac{x^2}{2u^2_{m,m'}}},$$

$$u_{m,m'} = \frac{2m+1}{4}\omega + \frac{2m'+1}{2}\omega'.$$

Art. 9 giebt eine zweifach-unendliche Partialbruchreihe für die reciproken Werthe der Thetafunktionen, ferner die Darstellung von $\frac{d}{dx} \lg \Theta(x)$ und endlich die der elliptischen Funktionen durch Partialbrüche.

Stellt man jedes einzelne Glied der Partialbruchentwickelung durch die Fourier'sche Reihe dar, so erhält man die Entwickelung der elliptischen Funktionen und der reciproken Werthe der Thetafunktionen in trigonometrische Reihen (Art. 10). Die folgenden Artikel (11—13) behandeln die lineare Transformation der ϑ-Funktionen, ihre Anwendung zur Ermittelung der Grenzwerthe der ϑ-Funktion für rein imaginäre Moduln, und die lineare Transformation der elliptischen Funktionen. Die ϑ-Funktionen hängen zusammen mit einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen, in denen

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(qx) - \varphi(x),\ \Delta^n\varphi(x) = \Delta^{n-1}\varphi(qx) - \Delta^{n-1}\varphi(x)$$

ist. Der Verfasser beschränkt sich (Art. 14) auf die Betrachtung der linearen Differentialgleichung

$$(1-x)\,\Delta\,\varphi(x)+x(q^{\alpha}-1)\,\varphi(x)=0,$$

deren Lösung die verallgemeinerte binomische Reihe ist, woraus eine Quelle neuer Darstellungen der ϑ-Funktionen fliesst (vgl. Jacobi, Crelle XXXII; Heine, ib. XXXIV, 285; Thomae, ib. LXX, 258). Zum Schluss (Art. 15) giebt der Verfasser eine Zusammenstellung der verschiedenen Darstellungen der in der Theorie der Thetafunktionen vorkommenden wichtigsten Constanten. M.

F. Grube. Ueber zwei bestimmte Integrale. Schlömilch Z. XV. 464-466. 1870.

Der Verfasser erinnert daran, dass d'Alembert („Sur les différentielles réductibles aux arcs des sections coniques". Opusc. math. VII. 1780), mit Hülfe des von Euler (Nov. Comment. Petr. VI. 1761) gefundenen Additionstheorems für die elliptischen Integrale zweiter Gattung, das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\log(1-nx^2)\,dx$$

auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung mit demselben Modul n zurückgeführt habe. In Legendre's Traité finden wir es nicht, auch nicht in neueren Werken über elliptische Funktionen. Noch einfacher lässt sich das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}}\log(1-nx^2)$$

auf ein elliptisches Integral — und zwar nur erster Gattung — zurückführen. Herr Grube benutzt dazu die bekannte particuläre Lösung $x=\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-nu^2}}$ der Euler'schen Differentialgleichung. (In der Arbeit sind irrthümlich Zähler und Nenner des x vertauscht.) M.

W. Walton. A demonstration of a property of elliptic functions. Quart. J. XI. 177-178. 1870.

Neuer Beweis der durch Lagrange's geometrische Deutung bekannten Relation

$$\cos\vartheta\,.\cos\varphi-\sin\vartheta\,.\sin\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\mu}=\cos\mu,$$

worin μ constant, und ϑ und φ durch die Gleichung $F(c,\vartheta)+F(c,\varphi)=F(c,\mu)$ verbunden sind. Hier wird die Differentialgleichung $\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}+\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=0$ umgewandelt in

$$dx^2-dy^2=c^2\{(xdy-ydx)^2-dy^2\},$$

wo $x=\cos\vartheta.\cos\varphi$ und $y=\sin\vartheta.\sin\varphi$. M.

B. MÖLLMANN. Die geometrische Bedeutung des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}$. Pr. Rostock. 1869.

Der Verfasser entwickelt zunächst sehr elementar das Differential eines Sectors und Bogens des Kreises, der Ellipse und Hyperbel (als Funktion der von den Brennpunkten gezogenen radii vectores). Auf das elliptische Differential führt erst die Herleitung des Differentials des Sectors einer Kegelfläche. Aus einem beliebigen Radius vector und zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden festen Linien wird eine dreiseitige Ecke gebildet. Das gesuchte Differential wird dann Funktion der beiden auf dem Radius vector zusammenstossenden Seiten (u, v) des zugehörigen sphärischen Dreiecks. Nun wird noch die Kegelfläche der Beschränkung unterworfen, dass 1) der Winkel zwischen u und v constant ist, und 2) die Begrenzungslinie der Kegelfläche zugleich auf der Fläche

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)=R^4 \text{ (const)}$$

liege. Dann ergiebt sich

$$dS=\frac{R^2}{2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2u}}=\frac{R^2}{2}\frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2v}}.$$

Um sich also die geometrische Bedeutung des elliptischen Differentials klar zu machen, muss man die Fläche

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)=R^4$$

construiren und über einem Winkel eine Kegelfläche beschreiben, welche einen gegebenen Winkel fasst. M.

A. ENNEPER. Bemerkungen über eine Differentialgleichung 2ter Ordnung. Schlömilch Z. XV. 56-64. 1870.

Legendre hat durch Differentiation der elliptischen Integrale

1ter und 2ter Gattung, $x=F(\varphi,k)$ und $y=E(\varphi,k)$, nach k die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d\left(kk'^2\frac{dx}{dk}\right)}{dk}-kx+\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$kk'^2\frac{d^2y}{dk^2}+k'^2\frac{dy}{dk}+ky-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=0$$

hergeleitet und ihre vollständigen Integrale ohne weitere Deduktion mitgetheilt (Traité des fonctions elliptiques).

Da das allgemeine Integral der ersteren Gleichung die Form $x=PK+QK'$ hat, so wendet Hr. Enneper zur Integration die Methode von Lagrange an und findet

$$x=K\left\{P_0-\frac{2}{\pi}\int_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'dk\right\}$$

$$+K'\left\{Q_0+\frac{2}{\pi}\int_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}Kdk\right\}.$$

Hieraus ergeben sich, mit Hülfe der bekannten Gleichungen

$$KE'+K'E-KK'=\frac{\pi}{2}$$

$$K'\frac{dK}{dk}-K\frac{dK'}{dk}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{kk'^2},$$

interessante Relationen zwischen bestimmten Integralen. M.

A. Genocchi. Rassegna d'alcuni scritti relativi all' addizione degl' integrali ellittici ed abeliani. Boncompagni Bull. III. 47-66. 1870.

Bei der Zusammenstellung der verschiedenen Methoden, durch welche man zu dem Additionstheorem der elliptischen und Abel'schen Funktionen gelangt ist, beginnt der Verfasser mit derjenigen Catalan's. Catalan hat (Bull. de Belg. (2) XXVII. 146 bis 151. 1869 s. p. 234) die Gleichung $\frac{du}{\sqrt{1-c^2\sin^2u}}\pm\frac{dv}{\sqrt{1-c^2\sin^2v}}=0$ durch die Substitutionen $u=\frac{\vartheta+\omega}{2}$, $v=\frac{\vartheta-\omega}{2}$, $\cos\vartheta=\frac{x+y}{k}$, $\cos\omega=\frac{y-x}{k}$ zurückgeführt auf eine Differentialgleichung von

der Form $y=px+F(p)$, wo $p=\frac{dy}{dx}$ ist, und erhält als allgemeines Integral

$$y=mx\pm\frac{k}{c}\sqrt{m^2-b^2},$$ wo c eine Constante und $b^2=1-c^2$.

Hieraus ergiebt sich sofort die bekannte Relation für die Addition der elliptischen Integrale. Die Methode Catalan's lässt sich auch auf die elliptischen Integrale 2ter Gattung ausdehnen, da sich durch dieselbe Substitution die Gleichung $\sqrt{1-c^2\sin^2 u}\,.\,du = \sqrt{1-c^2\sin^2 v}\,.\,dv$ auf die Form $y=\frac{x}{p}\pm\sqrt{1-b^2p^2}$ bringen lässt.

Der Verfasser erwähnt hierauf Laguerre's geometrische Betrachtungen (Bull. de l. Soc. phil. IV. 1867 und C. R. LXVII. Vgl. Fortschr. I. 119), mustert die Bestrebungen Euler's (Instit. calc. int. III. Suppl. 1770), Lagrange's (Miscell. taur. IV.) und Anderer, das Euler'sche Theorem zu verallgemeinern; reiht daran die Verallgemeinerung Jacobi's (Crelle VIII.) auf Doppelintegrale, das Theorem der associirten Ellipsoide von Le Besgue (Mém. de Bordeaux II.), welches auf zwei den elliptischen Integralen 2ter Gattung entsprechende Doppelintegrale mit algebraischer Differenz führt, und die Verallgemeinerung des Additionstheorems der dritten Gattung, die Verfasser (Schlömilch Z. II.) durch Untersuchung der Funktion

$$W(k,\varphi)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1-k^2\sin^2\varphi\,.\,\sin^2\vartheta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\vartheta$$

gefunden. — In der Uebersicht über die Arbeiten, welche die Addition der Abel'schen Funktionen betreffen, verweilt der Verfasser nur bei den Arbeiten von Mainardi (Giorn. dell' Ist. Lomb. VII. 1855), von Jacobi (Brief an Hermite, Opusc. math. I. 360), von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Funktionen) und Cremona (Rend. Bol. 1868-69. 68), und bei Brioschi's Ausdehnung des Abel'schen Theorems auf vielfache Integrale (Giornale del Ist. Lomb. VIII). M.

F. Siacci. Sul teorema del Conte di Fagnano. Boncompagni Bull. III. 1-26. 1870.

Das berühmte Theorem ist von Fagnano selbst viel allge-

meiner ausgesprochen, als es gewöhnlich citirt wird. Es findet sich zuerst in dem Giornale dé Letterati d'Italia. T. XXVI. 1716, 266-279, ist wieder abgedruckt 1750 in den Produzioni matematiche del Conte Giulio Carlo di Fagnano II. 336-342, und lautet: „Bezeichnen in den Polynomen

$$X = \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}} \text{ und } Z = \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}$$

und in der Gleichung

$$(fhx^2z^2)^s + (flx^2)^s + (flz^2)^s + (gl)^s = 0$$

h, l, f, g Constanten, so ist 1) wenn $s = +1$ ist, das Integral von $X+Z$ gleich $\frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$, und 2) wenn $s = -1$ ist, das Integral von $X+Z$ gleich $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$". Herr Siacci recapitulirt den von Fagnano gegebenen Beweis und die Anwendung des Theorems auf Ellipse, Hyperbel, Hypocycloide und Epicycloide. Die citirte Schrift F.'s schliesst mit dem Satze: „Setzt man $z = \frac{1}{x}\frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{fh}}$, so ist das Integral aus $X+Z$ gleich $\frac{1}{f}\sqrt{fx^2+g}\sqrt{h+\frac{l}{x^2}}$".

Fagnano hatte sich schon früher (Giornale dé Lett. XXII. 229-262. 1715) mit der Integration der Gleichung:

$$\frac{x^{n-1}\,dx\,(x^n+p)^{m-1}}{[(x^n+p)^2+q(x^n+p)+r]^m} + \frac{z^{n-1}\,dz\,(z^n+p)^{m-1}}{[(z^n+p)^2+q(z^n+p)+r]^m} = 0$$

beschäftigt und verschiedene particuläre Integrale derselben gefunden. — Herr Siacci zeigt, auf welchem Wege Euler (Novi Comm. Petr. VI. u. VII.) und andere nach ihm (Lagrange: Miscell. Taurin. IV.) zur Integration der in der vorigen enthaltenen Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(fx^2+g)(hx^2+l)}} + \frac{dz}{\sqrt{(fz^2+g)(hz^2+l)}} = 0$$

gelangt sind; und führt die verschiedenen Formen, unter denen Legendre (Exercices, Traité des fonct. ell., Histoire de l'Ac. 1786), Grunert (Suppl. zu Klügel's Wörterbuch der reinen Mathematik, Archiv XXVI.), G. Wallace (Trans. of Edinb. V.) und Cauchy (Leçons s. l. applications du calc. infin. à la géométrie) das

Theorem ausgesprochen haben. Zum Schluss giebt der Verfasser eine Uebersicht über die an das Theorem sich knüpfenden geometrischen Constructionen von Euler (Nov. Acta Erud. 1757, Nov. Comm. Petrop. VI.), Verhulst (Traité élém. des fonct. ell.), G. Brinklei (Trans. of Irish Ac. IX.), P. Serret (Des méthodes en géométrie), Chasles (C. R. XVII.) und Küpper (Borchardt J. LXIII). M.

J. Lieblein. Ueber den Zusammenhang verschiedener Transformationsformeln für elliptische Integrale mit einem Problem der Geometrie. Prag. Abh. (6) III. 1-14. 1870.

Es ist die Curve zu finden, auf welcher ein gegebener Kreis (mit dem Radius ϱ) ohne zu gleiten rollen muss, wenn ein mit ihm fest verbundener Punkt (P) seiner Ebene wieder einen Kreis (mit dem Radius R) beschreiben soll. Bezeichnen wir mit d den Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt C des Wälzungskreises, und nehmen $d<\varrho$; sind ferner r, Θ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Basis, $MP=u$ und ψ der Centriwinkel des bereits abgewälzten Kreisbogens, so erhält man:

1) $\varrho d\psi = d\Theta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2}$,

2) $\pm r = R - eu$ ($e=\pm 1$, für die beiden der Aufgabe genügenden Curven),

3) $u^2=\varrho^2+d^2\mp 2d\varrho\cos\psi$.

Je nachdem man nun u oder ψ eliminirt, ergeben sich hieraus die Gleichungen:

4) $d\Theta = \frac{(\varrho^2-d^2+u^2)du}{(R-eu)W}$,

$$W=\sqrt{(-1)(u-\varrho-d)(u-\varrho+d)(u+\varrho-d)(u+\varrho+d)},$$

5) $d\Theta = \frac{\varrho(\varrho\mp d\cos\psi)d\psi}{(R-e\sqrt{\varrho^2+d^2\mp 2d\varrho\cos\psi})\sqrt{\varrho^2+d^2\mp 2d\varrho\cos\psi}}$.

Die verschiedenen Beziehungen zwischen elliptischen Integralen ergeben sich nun, wenn man die 4 Gleichungen, in welche jede der beiden letzten Gleichungen zerlegbar ist, integrirt und die 4 für eine jede der beiden Curven resultirenden Gleichungen

mit einander verbindet. Die Substitution muss so gemacht werden, dass die Amplituden der elliptischen Integrale, zu welchen man gelangt, gleichzeitig mit Θ wachsen. Der Verfasser setzt

$$u = (\varrho \mp d)\frac{\varrho \pm d \sin \delta}{\varrho \mp d \sin \delta},$$

je nach den Zeichen in 4), und je nach den Zeichen in 5)

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\varrho - d}{\varrho + d}\operatorname{tg}\varphi \quad \text{oder} \quad \cos\psi = 1 - 2\sin^2\varphi;$$

ferner

$$R = \frac{d}{\varrho},\ n = \mp k \frac{\frac{R}{\varrho} \pm (1 \mp k)}{\frac{R}{\varrho} \mp (1 \mp k)}.$$

Die aus 4) sich ergebenden Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 haben dann die Form:

7) $$\Theta_\nu = \mp \operatorname{arctg}\frac{(1 \mp k)\operatorname{tg}\delta}{\Delta\delta} \pm \frac{1 + n_\nu}{n_\nu}F \mp \frac{n_\nu^2 + 2k^2 n_\nu + k^2}{n_\nu k}\Pi_1(n_\nu),$$

und zwischen den Parametern n_1, n_2, n_3, n_4 bestehen die Gleichungen:

13) $n_1 n_3 = n_2 n_4 = k^2$, $(n_1 + 1)(n_2 + 1) = (n_3 + 1)(n_4 + 1) = 1 - k^2$.

Aus 5) erhält man für die 4 Θ folgende Form:

14) $$\Theta_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu + k^2}{m_\nu}}F(k, \varphi) \mp \left(1 - \frac{m_\nu}{1 - k'}\right)\sqrt{\frac{m_\nu + k^2}{m_\nu}}\Pi_1(m_\nu, k, \varphi) \pm$$

$$\frac{\psi}{2} + C_\nu \int_0^\psi \frac{d\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1 + D_\nu \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}},$$

wo

$$k = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k},\ m_0 = m_3 = -k^2 \frac{\frac{R^2}{\varrho^2}}{\frac{R^2}{\varrho^2} - (1 + k)^2},$$

$$m_1 = m_4 = k^2 \frac{(1 + k)^2}{\frac{R^2}{\varrho^2} - (1 + k)^2},$$ und C_ν, D_ν ähnliche

Constanten. Verbindet man nun ψ und δ durch die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{(1 - k)\operatorname{tg}\delta}{\Delta\delta},$$

und vergleicht die Werthe für die Differenzen von je 2 dieser

Θ aus 7) und 14), so gelangt man zu den beiden Legendre'schen Gleichungen (Traité des fctns. ell. I., chap. 15), welche zeigen, dass Integrale 3ter Gattung, deren Parameter den Gleichungen 13) genügen, sich durch einander ausdrücken lassen. Daraus folgt für die beiden gesuchten Curven der Satz: Wenn die Θ_ν demselben Drehungswinkel zugehören, so lassen sich die Differenzen von je 2 dieser Winkel durch cyclometrische oder logarithmische Funktionen ausdrücken. Diese Eigenschaft führt sogleich zu einem speciellen Falle des Additionstheorems.

Die Betrachtung des speciellen Falles $R=\varrho\pm d$ führt zu den bekannten Transformationsformeln:

$$\int_0^\delta \frac{d\delta}{\cos^2\delta.\Delta\delta}=\frac{1}{k'^2}\operatorname{tg}\delta\Delta\delta+F(\delta)-\frac{1}{k'^2}E_1(\delta),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{\sin^2\delta.\Delta\delta}=\cot\delta.\Delta\delta+F\left(\frac{\pi}{2}\right)-E_1\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(\delta)+E_1(\delta),$$

$$\Pi_1(-k^2)+\Pi_1(-1)=F(\delta)+\frac{\operatorname{tg}\delta}{\Delta\delta},$$

$$\int_0^\delta \frac{d\delta}{\Delta^3\delta}=-\frac{k^2}{k'^2}\frac{\sin\delta\cos\delta}{\Delta\delta}+\frac{1}{k'^2}E_1(\delta).$$

Der Fall $R=\infty$ ergiebt:

$$Z(k,\varphi)=k\sqrt{k}\sin\delta\cos\varphi+\frac{k}{\sqrt{k}}Z(k,\delta),$$

also die von Gauss (Det. attract.) gegebene Transformation übertragen auf $Z(k,\varphi)$. Zu derselben Transformation, angewendet auf elliptische Integrale 3ter Gattung, endlich gelangt man durch Vergleichung von 7) und 14). Man erhält

$$\Pi(m,k,\varphi)=(1\mp a)F(k,\delta)\mp 2a(1+k)\Pi(n,k,\delta)+\frac{2a}{k'a}\int_0^\delta \frac{d\frac{\alpha\operatorname{tg}\delta}{\Delta\delta}}{1\pm\alpha^2\frac{\operatorname{tg}^2\delta}{\Delta^2\delta}}.$$

(Vgl. Legendre, traité d. fctns. ell., Zusatz zu Cap. XXII.)

M.

L. Schläfli. Sullo sviluppo del periodo imaginario, pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo. Brioschi Ann. (2) III. 243-248. 1870.

Weierstrass hat (Theorie der Abel'schen Funktionen, Crelle LII. 76) die Entwickelung der imaginären Periode für den Fall,

dass der Modul der elliptischen Funktionen hinlänglich klein ist, bereits gegeben, aber in Betreff des Beweises auf ein späteres Capitel verwiesen, welches nicht erschienen ist. Herr Schläfli giebt hier einen Beweis für diese Entwickelung. Zunächst erhält man, wenn $2iL$ die imaginäre Periode für den Modul k bezeichnet, aus dem Integral $L=\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$:

$$L=2\sum_0^\infty {}_n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{z^{2n}\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

und durch Entwickelung von $z^2(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$L=2\sum_0^\infty {}_n\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\left(\log\frac{2}{\sqrt{k}}-A_n\right)k^{2n},$$

wo

$$A_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

Der Verfasser giebt nun einen Weg an, auf dem die Doppelsumme und die ziemlich mühsame Bestimmung der Integrationsconstante umgangen wird. M.

Ch. Hermite. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques, en fonction du quotient des deux périodes. Brioschi Ann. (2) III. 81-82. 1869.

Für den Modul k als Funktion von $\omega=\frac{ik'}{k}$ hat man bekanntlich die Gleichung

$$k^2=f(\omega)=\left[\frac{2e^{\frac{i\pi\omega}{4}}+2e^{9\frac{i\pi\omega}{4}}+\cdots}{1+2e^{i\pi\omega}+2e^{4i\pi\omega}+\cdots}\right]^4,$$

wo ω unter transcendenter Form erscheint. Der Verfasser hat früher gezeigt, dass wenn man auf die Funktion $f(i+\omega)$ die Maclaurin'sche Reihe anwendet, man eine in ω algebraische Entwickelung erhält, deren Coefficienten aber nicht rational, sondern mit der numerischen Transcendente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

behaftet sind. Hier giebt nun der Verfasser eine neue algebraische Entwickelung, worin die Coefficienten rein rational sind, welche ausserdem eine für die Transformation wichtige Eigenschaft besitzt. M.

E. CATALAN. Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. Bull. de Belg. (2) XXVII. 145-150. 1869.

Legendre hat zuerst den Zusammenhang des algebraischen Integrals der Euler'schen Differentialgleichung mit der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie bemerkt (Traité des fonctions elliptiques. I. 21). Herr Catalan giebt eine andere geometrische Interpretation dieses Integrals. Die Differentialgleichung
$$\frac{du}{\sqrt{1-c^2\sin^2 u}}+\frac{dv}{\sqrt{1-c^2\sin^2 v}}=0$$
geht nämlich durch die Substitutionen $u=\frac{\vartheta+\omega}{2}$, $v=\frac{\vartheta-\omega}{2}$ und $\cos\vartheta=\frac{x+y}{k}$, $\cos\omega=\frac{y-x}{k}$ über in die Gleichung
$$(k^2-c^2x^2)\,dy^2+2c^2xy\,dx\,dy-(b^2k^2+c^2y^2)\,dx^2=0,$$
deren Integral ist $y=mx\pm\frac{k}{c}\sqrt{m^2-b^2}$, wo m eine willkürliche Constante bezeichnet. Dies ist aber die Gleichung einer Schaar von Geraden, deren Umhüllende die Hyperbel $y^2-b^2x^2=-\frac{b^2}{c^2}k^2$ ist. Durch die Substitution $x=\frac{k}{c\cos\varphi}$, $y=\frac{bk}{c}\operatorname{tg}\varphi$ wird man, wenn man u und v wieder einführt und μ durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{b}{c\cos\mu}$ bestimmt, auf die Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie geführt. (S. S. 227.) M.

F. J. RICHELOT. Die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Funktionen. Aus einer Correspondenz mit Herrn Prof. Schröter. Königsberg 1868*).

In seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen hat Herr Richelot aus der Landen'schen Transformation die Entwickelung der elliptischen Funktionen in unendliche Produkte hergeleitet, und seine Methode ist von H. Durège (Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1861) veröffentlicht worden. Durch ein Schreiben des Herrn Prof. Schröter wird Herr Richelot veran-

*) Da durch ein Versehen diese Arbeit im vorigen Bande nicht berücksichtig worden ist, so fügen wir das Referat darüber hier nachträglich ein.

lasst, nun auch die Anwendung der Landen'schen Transformation auf die Entwickelung der elliptischen Funktionen in unendliche Reihen mitzutheilen, wie er sie bereits vor Jahren ebenfalls in seinen Vorlesungen vorgetragen hat. Zunächst wird aus einer älteren Vorlesung mitgetheilt, auf welche Weise die Landen'sche Transformationsformel $\sin(2\varphi'-\varphi)=k\sin\varphi$, wenn sie in die elliptische Funktionsgleichung

$$\operatorname{sn}(u,k)=\frac{K_1}{K'_1}\cdot\operatorname{sn}\left(\frac{K'_1}{K_1}u,k'\right)\cdot\operatorname{sn}\left(\frac{K'_1}{K_1}u+K',K'\right),$$

wo $\frac{K'_1}{K_1}=\frac{K'}{2K}=\frac{1+k}{2}$, übergeführt ist, wiederholt angewendet die Entwickelung von $\sin\operatorname{am}u$ in ein unendliches Produkt liefert, aus dem dann auch die Entwickelungen von $\cos\operatorname{am}u$ und $\Delta\operatorname{am}u$ folgen. In einer späteren Vorlesung wird die Entwickelung in unendliche Reihen für jede der 3 Funktionen einzeln durchgeführt. Aus den 3 zur Landen'schen Transformation gehörigen Formeln:

$$\sin\varphi=(1+k'_1)\frac{\sin\varphi'\cdot\cos\varphi'}{\Delta(\varphi',k')},$$

$$\cos\varphi=\frac{1-(1+k'_1)\sin^2\varphi'}{\Delta(\varphi',k')},$$

$$\Delta(\varphi,k)=\frac{1-(1-k'_1)\sin^2\varphi'}{\Delta(\varphi',k')},$$

von denen die beiden letzten eine Folge der ersteren sind, ergeben sich leicht die analogen in Form elliptischer Funktionen, und aus ihnen kann man direkt die Zerlegung der 6 Funktionen $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$, $\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}$, $\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}$, $\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$ und ihrer Reciproken in stets convergente Reihen von Partialbrüchen herleiten. —

Das mitgetheilte Antwortschreiben des Herrn Schröter enthält die Reihenentwickelung, wie er sie direct aus der Gauss'schen Transformation (S. determinatio attractionis):

$$\sin\varphi=\frac{2\sin\varphi_0}{1+k_1+(1-k_1)\sin^2\varphi_0}$$

gewonnen. Mit Hülfe derselben lässt sich nämlich

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)}$$

in die Summe zweier ähnlichen Funktionen mit kleinerem Modul zerlegen.

Im Folgenden giebt Herr Richelot aus einer Vorlesung vom Jahre 1860 die Benutzung der Landen'schen Transformation zur Entwickelung der 2ten Gattung und der aus ihr folgenden Transcendenten. Er führt das durch die Gleichungen

$$\sin\psi' = \frac{\cos\varphi'}{\Delta(\varphi', k')}, \quad \cos\psi' = \frac{k'_1 \sin\varphi'}{\Delta(\varphi', k')}$$

definirte Argument ψ' in die Landen'sche Transformation ein und gelangt zu den Gleichungen

$$Z(\varphi, k) = \frac{\sqrt{k}}{k'}\{Z(\varphi', k') - Z(\psi', k')\},$$

$$k \sin\varphi = \frac{\sqrt{k}}{k'}\{Z(\varphi', k') + Z(\psi', k')\},$$

die dann in elliptische Funktionsgleichungen übergeführt werden.

Ausser der Gauss'schen Transformation giebt es noch 4 andere Transformationen der 2ten Ordnung, welche gleichfalls die Entwickelung der 12 elliptischen Grundfunktionen liefern. Die 6 Transformationen entstehen aus jeder unter ihnen durch die sogenannten 6 Grundtransformationen, bei denen beide Argumente von Null anfangen. Dies macht der Verfasser dadurch deutlich, dass er sämmtliche Formeln der Gauss'schen Transformation aus der Landen'schen ableitet. Sämmtliche Entwickelungen gewinnt man aber weit einfacher und natürlicher durch geeignete Aenderungen des Argumentes der ganzen Integralwerthe und der daraus folgenden, der Grösse q entsprechenden. Zu dem Zwecke hat Herr Richelot eine vollständige Tafel der 6 Grundfunktionen entworfen. Sie bestätigt gleichsam die von Jacobi in seiner ersten Vorlesung über elliptische Funktionen vom Jahre 1829 angedeutete Klasseneintheilung. —

Die „Anmerkung" enthält eine freie Wiedergabe der Abhandlung von Landen in den Philos. Transact. 1775, p. 283, wo seine Transformation zuerst veröffentlicht ist, mit einer Reihe daran sich knüpfender geometrischer Betrachtungen. M.

L. Königsberger. Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Borchardt J. LXXII. 176-254. 1870.

Nach denselben Principien, nach welchem der Herr Ver-

fasser in seinem Werke „Die Transformation, die Multiplikation und die Modulargleichungen der elliptischen Funktionen. Leipzig 1868" (s. Fortschr. d. M. I. p. 134) die Theorie der Modulargleichungen entwickelt hat, führt er hier die allgemeine Theorie zweier anderen, für zahlentheoretische und algebraische Untersuchungen wichtigen Gattungen von Gleichungen durch, auf deren Analogie mit den Modulargleichungen zuerst Joubert („Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques". C. R. XLVII.) aufmerksam gemacht hat. Es sind dies die Gleichungen für das Produkt des transformirten Moduls in dessen complementären und die für die Multiplicatoren der Transformation. Joubert hat (l. c.) für beide Gleichungen zwei Eigenschaften mitgetheilt, die sich auf die Vertauschung des Integralmoduls beziehen, und hat die Formen für die Transformation 3ten, 5ten und 7ten Grades aufgestellt. Hermite hat in seiner Arbeit „Sur la résolution de l'équation du quatrième degré" diese Formen für die Transformation 3ten Grades zur Auflösung der Gleichungen 4ten Grades mit Hülfe der elliptischen Funktionen benutzt. Der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit enthält eine Zusammenstellung der Transformationsformeln für einen unpaaren Transformationsgrad. Der Gang, welchen Herr Königsberger in dem zweiten und dritten Abschnitt befolgt, ist ganz analog demjenigen, den er in dem citirten Werke über die Transformation eingeschlagen hat. So wird zuerst die Existenz einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen $\sqrt[4]{kk_1}$ und $\sqrt[4]{cc_1}$ für eine Transformation vom Primzahlengrade nachgewiesen, darauf die einer solchen Gleichung für einen ungraden Transformationsgrad ohne quadratischen Faktor. Ihr folgt die Bestimmung des letzten Gliedes in dieser Gleichung, die Eigenschaft der letzteren hinsichtlich der Vertauschung beider Moduln, ihre Irreduktibilität und die linearen Transformationen, welche auf beide Argumente gleichzeitig ausgeübt werden können. Den Schluss bildet die wirkliche Entwickelung der Gleichung für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler. Die Theorie der Gleichungen, welche zwischen dem Multiplikator M und dem Integralmodul des zu transformirenden

Integrals bestehen, wird im dritten Abschnitt ganz analog durchgeführt. M.

L. Königsberger. Die linearen Transformationen der Hermite'schen φ-Funktionen. Clebsch Ann. III. 1-10. 1870.

L. Schläfli. Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunktionen. Borchardt J. LXXII. 360-369. 1870.

Bezeichnet k^2 den Modul eines elliptischen Integrals, k'^2 sein Complement und ω den Modul der zugehörigen ϑ-Funktion, so lassen sich, wie Jacobi (fundamenta p. 89) gezeigt hat, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[12]{kk'}$ durch $q = e^{\pi i\omega}$ darstellen in der Form:

$$\sqrt[4]{k} = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i\omega}{8}} \frac{\Pi(1+q^{2n})}{\Pi(1+q^{2n+1})}, \quad \sqrt[4]{k'} = \frac{\Pi(1-q^{2n+1})}{\Pi(1+q^{2n+1})}, \quad \sqrt[12]{kk'} = \frac{2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{\pi i\omega}{24}}}{\Pi(1+q^{2n+1})}.$$

Hermite hat diese drei Grössen, als Funktionen von ω betrachtet, bezeichnet mit resp. $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ und ihre Bedeutung für zahlentheoretische und algebraische Untersuchungen dargelegt. In seinem Werke „Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. 1859", p. 4 und 15, giebt er — ohne Beweis — zwei Tabellen für die Werthe, welche die Funktionen $\varphi(\omega)$ und $\chi(\omega)$ bei linearer Transformation der elliptischen Funktion annehmen. Später hat Herr Königsberger (Die Transformation etc. 1868, p. 34) 4 Relationen zwischen den φ und ψ bewiesen, aus denen, wie er dort sagt, die erste Hermite'sche Tabelle sich ableiten lässt.

In der vorliegenden Arbeit führt er den Beweis für diese Tabelle genauer durch. Dieser Beweis beruht auf dem Satze, dass jede Transformation $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ durch Anwendung einfacher linearer Transformationen auf die einfachste Transformation $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ zurückgeführt werden kann, was in anderer Form bereits von Herrn Kronecker (Berl. Monatsber. 1860) ausgesprochen worden ist. Die Richtigkeit der Hermite'schen Formeln wird zunächst für den Fall bewiesen, dass sich $\frac{a_1}{a_0}$ in einen Kettenbruch von

nur drei Elementen entwickeln lässt, und das Resultat auf beliebige Werthe von a_0 und a_1 durch den Schluss von n auf $n+1$ ausgedehnt.

Herr Schläfli giebt einen Beweis für beide Hermite'sche Tafeln. Er trennt die Hauptgattung der Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, in der k^2 von einem zwischen 0 und 1 liegenden Punkte nach einer Anzahl von Umläufen um 0 und 1 in denselben Werth zurückkehrt, von den fünf übrigen Gattungen, indem er eine Kettenbruchentwickelung anwendet, wo alle Theilnenner $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots a_n, b_n$ gerade, positive oder negative, Zahlen sind. Eine solche ist immer möglich, wenn Zähler und Nenner der zu entwickelnden Rationalzahl $\frac{\delta}{\beta}$ incongruent mod. 2 sind. Die Summen $a_1+a_2+\cdots a_n$ und $b_1+b_2+\cdots b_n$ werden mod. 16 durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so dargestellt, dass sie bei Verwandlung dieser Substitutionselemente in die entgegengesetzten ungeändert bleiben. Die transformirten φ, ψ, χ ergeben sich dann mit Hülfe dreier Relationen, welche in Hermite'scher Bezeichnungsweise (Herr Schläfli hat ψ und χ vertauscht), also lauten:

$$\varphi(1+\omega)=\varrho\frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)},\ \psi(1+\omega)=\frac{1}{\psi(\omega)},\ \chi(1+\omega)=\varepsilon\frac{\chi(\omega)}{\psi(\omega)},$$

$$\text{wo } \frac{i\pi}{8}=\log q,\ \frac{i\pi}{24}=\log\varepsilon.$$

Zum Schluss giebt der Verfasser Relationen zwischen $\chi(\omega)$ und $\chi(n\omega)$, welche für $n\equiv 1$ oder 2 mod. 3 einfacher sind als die entsprechenden zwischen $\varphi(\omega)$ und $\varphi(n\omega)$. M.

L. Kiepert. De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. Diss. inaug. Berlin. 1870.

Das Problem „Alle Curven zu finden, deren Bogen sich — wie die der Lemniscate — durch elliptische Integrale erster Gattung ausdrücken lassen, welche also die Eigenschaft der Kreisbogen besitzen, dass sie addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden können", hat vielfach das Interesse der Mathematiker erregt. Legendre (Traité des fonctions elliptiques. II. 590) fand eine Curve sechster Ordnung, deren Bogen sich darstellen

liess als Summe eines elliptischen und eines Abel'schen Integrals erster Gattung. Gudermann und Roberts fanden eine Gattung sphärischer Kegelschnitte, welche die im Problem geforderte Eigenschaft besassen. Des Ersteren Arbeiten sind nicht veröffentlicht, die des Letzteren siehe Liouville J. (2) IX. 155, X. 297, VIII. 263. Serret wies nach, dass die Anzahl solcher Curven schon in der Ebene eine unendliche sei (Liouville J. (2) X. 256-295). Doch ist es bis jetzt weder ihm noch einem Andern gelungen, das besagte Problem allgemein zu lösen. Herr Kiepert gelangt in der vorliegenden Arbeit zu einer Verallgemeinerung der von Serret gefundenen Curven, indem er specielle Fälle derjenigen Form untersucht, in welcher Herr Weierstrass (in seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen) alle doppeltperiodischen Funktionen durch die von ihm eingeführte σ-Funktion darstellt. Definirt man nämlich eine Funktion $p(u)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{dpu}{du}\right)^2 = 4p(u)^3 - g_2 . p(u) - g_3, \; [u=0, p(u)=\infty],$$

worin g_2, g_3 die Invarianten der allgemeinen biquadratischen Form sind, und führt die Funktion $\sigma(u)$ durch die Gleichung

$$\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = -p(u)$$

ein, so ist jene allgemeine Form jeder doppeltperiodischen Funktion:

$$C + \sum_1^{k_1}{}_\nu c_{1,\nu} \frac{d^\nu}{du^\nu} \log \sigma(u-a_1) + \sum_1^{k_2}{}_\nu c_{2,\nu} \frac{d^\nu}{du^\nu} \log \sigma(u-a_2) + \cdots$$
$$+ \sum_1^{k_r}{}_\nu c_{r,\nu} \frac{d^\nu}{du^\nu} \log \sigma(u-a_r)$$

mit der Bedingung: $c_{1,1} + c_{2,1} + \cdots + c_{r,1} = 0$. Die Eigenschaften der Funktion σ und ihrer logarithmischen Ableitung geben nun das Mittel an die Hand, aus den vom Verfasser zunächst betrachteten Beispielen:

$$\varphi(u) = \frac{dx + idy}{du} = \sum_1^{m}{}_\nu c_{1,\nu} \frac{d^{2\nu+1}}{du^{2\nu+1}} \log \sigma(u-a_1) +$$
$$\sum_1^{m}{}_\nu c_{2,\nu} \frac{d^{2\nu+1}}{du^{2\nu+1}} \log \sigma(u-a_2)$$

und

$$\varphi(u)=\frac{dx+idy}{du}=\sum_1^m{}_\nu c_{1,\nu}\frac{d^{2\nu}}{du^{2\nu}}\left\{\log\sigma\left(u+\frac{\omega'}{2}\right)-\log\sigma\left(u-\omega+\frac{\omega'}{2}\right)\right\}$$
$$+\sum_1^n{}_\nu c_{2,\nu}\frac{d^{2\nu+1}}{du^{2\nu+1}}\left\{\log\sigma\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\log\sigma\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\right\},$$

wo 2ω und $2\omega'$ die Perioden der Funktion $\sigma(u)$ sind, Gleichungen zur Bestimmung der Constanten zu gewinnen. Durchgeführt wird nur das letztere Beispiel für den Fall $m=n=1$, der die Curve 6ten Grades:

$$x^4-y^4=\frac{32}{243\bar{e}_1^2}(x^2+y^2)^3+\frac{27}{16}\bar{e}_1^2(x^2+y^2)-\frac{243\sqrt{3}}{512}\bar{e}_1^4$$

liefert, worin $\bar{e}_1$ eine beliebige positive Zahl ist. — Ein ferneres Beispiel liefert die Curve

$$\varphi(u)=\frac{dx+idy}{du}=p\left(u+\frac{2\omega}{3}-\frac{2\omega'}{3}\right)+\varepsilon p\left(u-\frac{2\omega}{3}\right)+\varepsilon^2 p\left(u+\frac{2\omega'}{3}\right),$$

wo ε primitive Wurzel der Gleichung $z^r=1$. —

In dem zweiten Theile der Arbeit weist der Verfasser an dem Beispiel der Lemniscate nach, dass alle ebenen Curven der im Problem verlangten Eigenschaft nur specielle Fälle von Curven doppelter Krümmung sind. Ihre Bogen lassen sich — wie das Additionstheorem der elliptischen Funktionen lehrt — mit Hülfe von Lineal und Cirkel theilen. M.

E. Schering. Mittheilung über den III. Band von Gauss' Werken. Clebsch Ann. I. 139-140. 1869.

Einigen Bemerkungen über den Inhalt des III. Bandes von Gauss' Werken folgt eine Notiz über die Dreitheilung der Jacobi'schen Funktionen. Der Herr Verfasser hat nämlich aus den von Gauss und Jacobi gefundenen algebraischen Gleichungen zwischen $\theta(0,q)$, $\theta_2(0,q)$, $\theta_3(0,q)$ und $\theta(0,q^3)$, $\theta_2(0,q^3)$, $\theta_3(0,q^3)$ die Relation

$$0=\sqrt{\frac{\theta_3(0,q^3)^3}{\theta_3(0,q)}}-\sqrt{\frac{\theta(0,q^3)^3}{\theta(0,q)}}+\sqrt{\frac{\theta_2(0,q^3)^3}{\theta_2(0,q)}}$$

und andere ähnliche hergeleitet. M.

Th. Noth. Ueber die mit Hülfe der Jacobi'schen Funktion zu behandelnden Fälle der Centralbewegung. Jena 1869.

Siehe Abschnitt X. Cap. 4.

K. Seegers. Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Pr. Insterburg 1869.

E. V. Bonsdorf. Den geometriska theorie för complexa funktioner. (Théorie géométrique des fonctions complexes, appliquée à l'intégrale elliptique du premier ordre.) Diss. Helsingfors 1870.

M. Roberts. Sur les fonctions abéliennes. Brioschi Ann. (2) III. 70-80. 1869.

Es handelt sich darum nach Jacobi's Methode (Crelle XXIV. 28) Relationen zwischen Abel'schen Funktionen 3[ter] Gattung herzuleiten. Hat man zwischen den $m+1$ Variabeln $x_1, x_2, \dots x_m$ und t das System von Differentialgleichungen:

$$\sum_{\nu=1..m} \frac{dx_\nu}{\sqrt{f(x_\nu)}} = 0, \ \sum \frac{x_\nu\, dx_\nu}{\sqrt{f(x_\nu)}} = 0, \dots \sum \frac{x_\nu^{m-2}\, dx_\nu}{\sqrt{f(x_\nu)}} = 0, \ \sum \frac{x_\nu^{m-1}\, dx_\nu}{\sqrt{f(x_\nu)}} = dt,$$

worin $f(x)$ eine ganze rationale Funktion $(2m-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, so ist

$$\sum \frac{dx}{(1+nx_\nu)\sqrt{f(x_\nu)}}$$

das Differential einer logarithmischen oder Kreisfunktion von t. Diese Funktion stellt der Verfasser für die Abel'schen Funktionen, in denen $m=3$ und $f(x)=x(1-x)(1-k^2x)(1-k'^2x)(1-k''^2x)$ ist, wirklich her. Geht $f(x)$ durch die Substitution $x=\sin^2\vartheta$ in $\Delta(\vartheta)$ über, so ergeben sich zwischen

$$\int \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}, \int \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\Delta\vartheta}, \int \frac{\sin^4\vartheta\, d\vartheta}{\Delta\vartheta}, \int \frac{\sin^6\vartheta\, d\vartheta}{\Delta\vartheta}, \int \frac{1}{1+n\sin^2\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

bemerkenswerthe Relationen, deren einige auch für andere Werthe des m gelten. M.

Camille Jordan. Sur les équations de la division des fonctions abéliennes. Clebsch Ann. I. 583-591. 1869.

Diese Abhandlung bildet einen Abschnitt aus einem demnächst erscheinenden Werke über algebraische Gleichungen. Ersetzt man p^n Grössen mit den Indices $x, y \dots$, die von 0 bis $p-1$ (p Primzahl) variiren können, durch solche mit den Indices $ax+by\dots, a'x+b'y+\cdots$ etc. (mod. p), so erhält man eine „Sub-

stitution", wenn die Determinante aus den $a, b, \ldots a', b', \ldots$ nicht durch p theilbar. Die Gesammtheit dieser Substitutionen nennt Herr Jordan eine „lineare Gruppe vom Grade p^n". Eine „Abel'sche Gruppe" bilden diejenigen Substitutionen der linearen Gruppe vom Grade p^n, welche auf die $2n$ Variabeln $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$; $\xi_1, \eta_1, \ldots \xi_n, \eta_\nu$ zugleich ausgeübt, die Funktion

$$\varphi = \sum_1^n (x_\nu \eta_\nu - \xi_\nu y_\nu)$$

in φ. Const. verwandeln. Herr Jordan untersucht die Eigenschaften dieser Gruppen, ihre Zerlegung resp. Zusammensetzung und ihre Ordnung. Die Gleichungen für die Theilung der Perioden in den Abel'schen Funktionen haben Gruppen von der betrachteten Art (Kronecker). Dies führt zu dem Theorem: „Die Lösung der Gleichung, welche die Theilung der Perioden in den $2n$-fach periodischen Abel'schen Funktionen giebt, lässt sich zurückführen auf die Lösung einer Reihe einfacher Gleichungen, welche sämmtlich von einer Primzahlordnung (also Abel'sche Gleichungen) sind, eine ausgenommen, deren Ordnung

$$\frac{(p^{2n}-1)p^{2n-1}\ldots(p^2-1)p}{2}$$

oder das Doppelte dieser Zahl, je nachdem $p \gtreqless 2$ ist". M.

F. Casorati. Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di prima specie. Brioschi Ann. (2) III. 1-26. 1869.

Vorliegende Arbeit ist eine Umarbeitung des vierten Abschnittes (Periodicität) in dem Werke von Clebsch und Gordan: „Theorie der Abel'schen Funktionen (Leipzig 1866)". Mit Ausnahme einiger Eigenschaften der Verzweigungspunkte, die sich aus Puiseux's „Recherches sur les fonctions algébriques" ergeben, enthalten die beiden ersten Abschnitte vorliegender Arbeit dieselben Resultate, welche sich in § 22 und § 25 der „Theorie" finden, nur muss die Reduktion der Periodicitätsmoduln auf $2p$ erst dem § 23 folgen. Den Inhalt dieses Paragraphen und eine vereinfachte Herleitung der Schluss-Resultate des § 24 enthält der dritte und vierte Abschnitt. Ihm folgt der übrige Inhalt des § 24 mit den Verbesserungen, welche dazu führen, die voll-

ständige Reciprocität zwischen den beiden Klassen von Fundamentalpunkten in's Licht zu setzen. Die Vereinfachung tritt besonders im Folgenden, bei Herleitung der Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung, hervor. Die Endgleichung (5) § 26 $\Sigma A_i b_i = \Sigma [A_i](b_i)$ wird aus der Gleichung (1) $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_\nu}} A_\nu b_\nu = 0$ nicht durch drei, sondern nur durch zwei Transformationen gewonnen: nämlich erstens durch die, welche auch in der „Theorie" als erste benutzt wird, und zweitens durch die analoge in Bezug auf die Fundamentalpunkte der 2ten Art. So erspart man überdies die mühsame Herleitung der Form der gefundenen Relationen in § 27. Mit den obigen Vereinfachungen wird dann das Beispiel des § 28 ($n = 4, p = 3$) auch hier durchgeführt. M.

J. Thomae. Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Funktionen. Borchardt J. LXXI. 201-222. 1870.

Riemann hat in seiner Abhandlung über Abel'sche Funktionen (Borchardt J. LIV.) $2p-1$ Verzweigungspunkte einer $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche T, welche aber eine Ebene nur 2fach überall bedeckt, die „Moduln einer Klasse" gleichverzweigter Flächensysteme oder algebraischer Funktionen, welche wie jene verzweigt sind, genannt. Die vorliegende Arbeit stellt die Constante $\vartheta(0, 0 \dots 0)$ und mehrere andere Constanten als Funktion der Verzweigungswerthe der Fläche T, also als Funktion der Klassenmoduln vollständig dar. Sie ergänzt die Arbeit des Verfassers (Borchardt J. LXVI. 92), wo $d \log \vartheta(0, 0 \dots 0)$ als ein Differential der Klassenmoduln dargestellt wird, und eine zweite (Schlömilch Z. XI. 427), worin die Integration dieses Ausdrucks für $p = 2$ ausgeführt wird. M.

L. Cremona. Sugl' integrali a differenziale algebrice. Mem. di Bologna X. 1870.

Die vorliegende analytisch-geometrische Abhandlung ist in 3 Theile oder Capitel getheilt. Im ersten Capitel (Reduktion der Abel'schen Integrale auf 3 Arten) und im 3ten (Satz von Abel) hat der Verfasser das in den beiden ersten Paragraphen

der Theorie der Abel'schen Funktionen von Clebsch und Gordan Stehende behandelt, indem er dasselbe in einer Form erklärt, die der geometrischen Anschauung bei weitem näher liegt, wodurch er in einigen Punkten nennenswerthe Vereinfachungen erreicht. Der 2[te] Theil (Bildung der Integrale 2[ter] und 3[ter] Gattung) ist seinem Inhalte nach neu. Der Verfasser bildet die Form der normalen Integrale der 3[ten] Gattung in anderer Weise, als die Herrn Clebsch und Gordan und entnimmt daraus als speciellen Fall die Integrale 2[ter] Gattung, ohne auf die algebraischen Schwierigkeiten zu stossen, die pag. 28 der erwähnten Arbeit angedeutet sind. Jg. (O.)

A. Clebsch. Ueber die Curven, für welche die Klasse der zugehörigen Abel'schen Funktionen $p=2$ ist. Clebsch Ann. I. 170-172. 1869.

Eine neue Darstellung der Coordinaten eines Punktes der Curve 4[ter] Ordnung mit einem Doppelpunkt als rationale Funktionen von λ und $\sqrt{L}$, wo L eine ganze Funktion 6[ten] Grades des willkürlichen Parameters λ ist. (Vgl. Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Funktionen, § 21.) M.

H. Weber. Ueber das Additionstheorem der Abel'schen Funktionen. Borchardt J. LXX. 193-211. 1869.

Abel hat (Crelle J. IV. 260) durch Anwendung des nach ihm genannten Theorems das Additionsproblem für die elliptischen Integrale entwickelt, und Weierstrass hat (Borchardt LII. 285) dasselbe auf die hyperelliptischen Integrale ausgedehnt und die Lösung ebenfalls in ϑ-Funktionen gegeben. Auf ähnliche Weise löst Herr Weber das Additionsproblem für die allgemeinen Abel'schen Funktionen. Er legt das Abel'sche Theorem in der Form zu Grunde, welche Riemann (Borchardt J. LIV. 137) für die Integrale erster Gattung aufgestellt und für die übrigen Integrale angedeutet hat, und leitet unmittelbar aus Riemann's Resultaten Formeln her, welche das Umkehrproblem in der Jacobi'schen Fassung lösen. Es sind dieses im Wesentlichen dieselben Formeln, welche Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'-

schen Funktionen. Leipzig 1866. Abschnitt VI.) auf anderm Wege, nämlich durch Vermittlung von Integralen 3ter Gattung, entwickelt haben. Die für die erste Gattung gewonnene Lösung lässt sich mit Hülfe von ϑ-Funktionen, unter Anwendung der Riemann'schen Principien, durch die unabhängigen Variabeln des Umkehrproblems darstellen. Das Additionsproblem für die 2te und die 3te Gattung löst der Verfasser, indem er gewisse Summen von Integralen 2ter und 3ter Gattung, betrachtet als Funktionen der Integralsummen 1ter Gattung, als Transcendenten 2ter und 3ter Gattung einführt. Die sich ergebenden Additionsformeln haben grosse Aehnlichkeit mit den von Jacobi (Fundam. nova § 54 und 55) aufgestellten Additionsformeln für die elliptischen Integrale 2ter und 3ter Gattung. M.

H. Weber. Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale. Borchardt J. LXX. 314-345. 1869.

Die allgemeinen Lösungen des Jacobi'schen Umkehrproblems algebraischer Integrale, wie sie von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Funktionen) und Weber (s. die vorige Arbeit) gegeben worden sind, ermangeln der Einfachheit, welche die von Weierstrass für den Fall, wo sich die Irrationalität auf eine Quadratwurzel beschränkt, gegebene Lösung auszeichnet. Herr Weber hat nun gefunden, dass der Grund dafür allerdings in einer charakteristischen Eigenschaft der hyperelliptischen Funktionen liegt, sich aber zugleich die Aufgabe gestellt, auch die allgemeine Lösung in völlig entwickelter Gestalt darzustellen. Seine Resultate sind in der vorliegenden Arbeit enthalten.

M.

A. Winckler. Ueber die Relationen zwischen den vollständigen Abel'schen Integralen verschiedener Gattung. Wien. Ber. LXII. 49-124. 1870.

In dem ersten Theile der Arbeit giebt der Verfasser auf anderem Wege und in weiterem Umfang als bisher geschehen, Gleichungen zwischen linearen Verbindungen vollständiger Abel'scher Integrale verschiedener Gattung, und benutzt ein Ver-

fahren, das ihm bereits in einer früheren Arbeit (Ueber die vollständigen Abel'schen Integrale. Wien. Ber. LVIII. 967) gedient, die einfachsten Jacobi'schen Relationen (Crelle XIII. 55) zwischen ganzen Abel'schen Integralen zu beweisen (vgl. Fortschr. d. M. I. 137). Die Erweiterung dieser Relationen besteht einmal darin, dass der Zähler des Bruches unter dem Integral von beliebigem Grade ist, und der Nenner ausser der Quadratwurzel einer rationalen Funktion noch einen rationalen Factor enthält, zweitens dass diese Relationen auch den Fall umfassen, wo die Wurzelgrösse im Zähler steht. — Der zweite Theil der Arbeit löst die Aufgabe, die bekannten Gleichungen zwischen Produkten vollständiger Abel'scher Integrale verschiedener Gattung zu erweitern. Der einzuschlagende Weg ist analog dem, welchen Weierstrass gewählt hat, um zwei aus Abel'schen Integralen zusammengesetzte Doppelintegrale zu ermitteln, welche seiner Theorie der Periodicitätsmoduln zu Grunde liegen (Braunsberger Pr. 1849). Dieser Weg lässt sich auf vielfache Integrale anwenden durch Bildung der von Cayley „Pfaffian" genannten und von Jacobi bei der Darstellung der Pfaff'schen Integrationsmethode benutzten Summe $P^{(1,2,3\dots 2m)}$ von $1.3.5\dots(2m-1)$ Produkten aus je m Faktoren (Crelle J. XXIX. 237), und mittelst eines ähnlichen Ausdruckes $P^{(1)(1,2,3\dots 2m-1)}$, der mit dem Pfaff'schen gewisse Eigenschaften gemein hat. Die sich ergebenden Relationen zwischen einer Anzahl von Produkten aus $2m$ vollständigen Abel'schen Integralen haben die Form

$$\int_{a_{\mu_1}}^{a_{\mu_1+1}} dx_1 \dots \int_{a_{\mu_{2m-1}}}^{a_{\mu_{2m-1}+1}} dx_{2m-1} \int_{a_{\mu_{2m}}}^{a_{\mu_{2m}+1}} P^{(1,2,3\dots 2m)}\, dx_{2m} = 0$$

$$\text{oder } (\pi\sqrt{-1})^m$$

und enthalten u. A. als speciellen Fall die Gleichung

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \int_{a_3}^{a_4} dx_3 \dots \int_{a_{2m}}^{a_{2m+1}} \frac{\Delta\, dx_{2m}}{\sqrt{X_1}\cdot\sqrt{-X_2}\cdot\sqrt{X_3}\dots\sqrt{-X_{2m}}} = \frac{(2\pi)^m}{1.3.5\dots(2m-1)},$$

die von Jacobi (vgl. Crelle XIX. 312 und Hädenkamp. ib. XXII. 184) gefunden ist, und woraus sich für $m=1$ die Legendre'schen Relationen zwischen den vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung ergeben. Ebenso liefern unsere

Produktrelationen eine Verallgemeinerung der Formeln:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \int_{a_3}^{b} \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{\sqrt{X_1}\sqrt{-X_2}\sqrt{X_3}} dx_3 = \frac{4\pi}{3}\sqrt{(b-a_1)(b-a_2)(b-a_3)},$$

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{\sqrt{X_1}\sqrt{-X_2}} dx_2 = \frac{4\pi}{3}(a_1+a_2+a_3),$$

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} \frac{(x_2-x_1)x_2 x_1}{\sqrt{X_1}\sqrt{-X_2}} dx_2 = \frac{2\pi}{3}(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1),$$

worin $X=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$, welche Lamé (Liouville J. II. 167) mittelst elliptischer Coordinaten hergeleitet hat. M.

L. Fuchs. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Funktionen eines Parameters aufgefasst. Borchardt J. LXXI. 91-127. 1870.

Diese Abhandlung steht im engsten Zusammenhange mit den Arbeiten desselben Verfassers aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Bd. 66 u. 68 dieses Journ.). Während dort aus der Betrachtung der Differentialgleichungen das Verhalten der ihnen genügenden Integrale in der Nähe der Unstetigkeitspunkte dargelegt wurde, sollen hier die Haupteigenschaften einer Klasse von bestimmten Integralen, unter deren Form häufig die Lösungen der linearen Differentialgleichungen erscheinen, aus der Integralform selbst namentlich hinsichtlich ihrer Mehrdeutigkeit hergeleitet werden. Beide Untersuchungen ergänzen sich insofern wesentlich, als ihre combinirten Ergebnisse das Mittel darbieten, die bestimmten Integrale als homogene Funktionen der Integrale eines der vom Verfasser in den angeführten Abhandlungen definirten Fundamentalsysteme der betreffenden Differentialgleichung wirklich darzustellen.

Insbesondere werden die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale, als Funktionen eines Parameters aufgefasst, in dieser Weise behandelt und die linearen Differentialgleichungen, denen sie genügen, entwickelt.

Die Methode, welche sich, wie der Verfasser bemerkt, auf die Periodicitätsmoduln der allgemeinen Abel'schen Integrale anwenden lässt*), besteht im Wesentlichen in Folgendem:

*) Diese Verallgemeinerung ist inzwischen bereits ausgeführt. Bd. 72 d. J.

Es sei $s^2 = \varphi(x, u)$ eine ganze rationale Funktion von x und u vom Grade n in Beziehung auf x, und $a_1\, a_2 \ldots a_n$ seien die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x, u) = 0$ für x, $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x und u, so handelt es sich um die Untersuchung der $n-1$ Integrale $\int_{\mu-1}^{\mu} \frac{f(x)}{s}\, dx$ $(\mu = 1, 2 \ldots n)$, als Funktionen von u, deren doppelte Werthe die Periodicitätsmoduln des allgemeinen Integrals $\int \frac{f(x)}{s}\, dx$ in der zweiblättrigen x-Fläche T sind, durch welche ein durch die Verzweigungspunkte $a_1\, a_2 \ldots a_n$ hindurchgehender Schnitt geführt ist. Da nun ausser der Funktion s unter dem Integrale die Lage der Punkte a_μ selbst mit u sich ändert, so hat man sich über die ursprüngliche x-Fläche T_0, die der Lage $a_\mu = a_\mu^0$ für $u = u_0$ entspricht, nach einander eine Reihe von x-Flächen T ausgebreitet zu denken, die den folgenden Werthen von u der Art entsprechen, dass s auf einem Punkte in T denjenigen Werth erhält, in welchen sein ursprünglicher Werth auf dem darunter liegenden Punkte in T_0 durch die Aenderung von u umgewandelt ist. Für die Continuität dieser Umwandlung ist es nothwendig, dass u durch keinen der singulären Werthe $b_1\, b_2 \ldots b_\nu$ hindurchgeht, für welche mehrere Wurzeln a_μ einander gleich werden.

Ueber die Art, wie die Schnittstrecken zwischen den Verzweigungspunkten sich von T_0 in T fortsetzen, wird folgendermassen verfügt: Gehen $a_1^0\, a_2^0 \ldots a_n^0$ resp. längs der Curven $A_1\, A_2 \ldots A_n$ in $a_1\, a_2 \ldots a_n$ über, so besteht die Schnittstrecke $a_\mu\, a_{\mu+1}$ in T aus der rückwärts durchlaufenen Curve A_μ der Strecke $a_\mu^0\, a_{\mu+1}^0$ und der direkt durchlaufenen Curve $A_{\mu+1}$, geht also aus dem entsprechenden Schnitt in T_0 durch blosses Einschalten der Curven A hervor. Für den Integrationsweg wird noch festgesetzt, dass wenn er eine Curve A längs einer Linie überschreitet, welche dieser Curve vorangeht, ein Integrationsweg einzuschalten ist, welcher den nachfolgenden Theil der letzteren umgiebt. Es werden nunmehr folgende Sätze bewiesen:

1) Die Periodicitätsmoduln, sowie die Ableitungen derselben aller Ordnungen nach u sind in der Umgebung eines jeden von

den singulären Werthen b verschiedenen Werthes von u continuirlich und eindeutig.

2) $\frac{d^\lambda \eta}{du^\lambda} = \frac{1}{2}\int' \frac{d^\lambda y}{du^\lambda} dx$, wo η ein Periodicitätsmodul zwischen a_μ und a_ν, $y = \frac{f(x)}{s}$ und das Zeichen $\int'$ eine Integration über eine geschlossene Curve bedeutet, welche den Integrationsweg von η so umgiebt, dass er alle übrigen Verzweigungspunkte, durch welche η nicht hindurch führt, ausschliesst.

3) Macht u einen Umlauf um einen der Werthe b, so gehen die Periodicitätsmoduln in lineare homogene Funktionen mit ganzzahligen Coefficienten ihrer ursprünglichen Werthe über.

Dasselbe gilt im Allgemeinen, wenn u einen Umlauf um ∞ macht.

Die Art des hierbei einzuschlagenden Verfahrens wird an dem besonderen Fall erläutert, wo

$$\varphi(x, u) = (x - k_1)(x - k_2) \ldots . (x - u)$$

ist, und es werden die Relationen, welche bei einem Umlauf von u um k_λ zwischen den ursprünglichen und umgewandelten Werthen der η bestehen, vollständig angegeben.

Zur Herleitung der linearen Differentialgleichung, der die η genügen, dient folgende Betrachtung:

Die Zahl der von einander linear unabhängigen η sei p und die zu bildende Differentialgleichung laute:

$$\beta_p \frac{d^p \eta}{du^p} + \beta_{p-1} \frac{d^{p-1} \eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0 \eta = 0,$$

und es werde gesetzt:

$$Y = \beta_p \frac{d^p y}{du^p} + \beta_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0 y, \; y \text{ wie oben } = \frac{f(x)}{s}.$$

Dann folgt aus der ersten Gleichung, dass $\int Y dx$ beim Ueberschreiten eines der Querschnitte, welche die Fläche T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, ungeändert bleibt, und, für ein grades n, für $x = \infty$ nicht logarithmisch unendlich wird. Also ist $\int Y dx$ eine rationale Funktion von x und s und zwar, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, von der Gestalt $R.s$, wo R eine rationale Funktion von x ist.

Nun ergiebt aber ein von Weierstrass angegebenes Reduktionsverfahren für jeden Werth von λ:

$$\frac{d^\lambda y}{du^\lambda} = \sum_0^{n-2}{}_b \frac{\mathfrak{R}_{\lambda,b}\, x^b}{s} + \frac{d}{dx}[X_\lambda(x).s],$$

wo die Grössen $\mathfrak{R}_{\lambda,b}$ und die Coefficienten der rationalen Funktion $X(x)$ rationale Funktionen von u sind. Also ist $Y = \frac{d}{dx}(R.s)$ von der nämlichen Form:

$$Y = \sum_0^{n-2} \frac{\mathfrak{R}_{0,b}\, x^b}{s} + \frac{d}{dx}[X_0(x).s],$$

wo $\mathfrak{R}_{0,b} = \beta_p \mathfrak{R}_{p,b} + \beta_{p-1} \mathfrak{R}_{p-1,b} + \cdots + \beta_0 \mathfrak{R}_{0,b}$.

Es erfordert aber die Bedingung, dass $Y = \frac{d}{dx}(R.s)$, wie bewiesen wird, das Bestehen der $n-1$ Gleichungen:

$$\mathfrak{R}_{0,0} = 0,\ \mathfrak{R}_{1,0} = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-2,0} = 0,$$

welche in Beziehung auf die β linear und homogen sind. Indem nun die β mit höherem Index als $n-1$ gleich Null gesetzt werden, resultiren aus diesen Gleichungen im Allgemeinen bestimmte Werthe für die Verhältnisse der Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots \beta_1, \beta_0$, wodurch die gesuchte Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln η hergestellt ist, und sich zugleich ergiebt, dass die Ordnung derselben höchstens $= n-1$ ist. Sie ist $= p$, wenn β_p die erste der Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2} \ldots$ ist, durch deren Verschwinden obige Gleichungen mit einander unverträglich werden.

Die singulären Werthe der Differentialgleichung sind die Werthe b von u, für welche mehrere Wurzeln der Gleichung $\varphi(x, u) = 0$ einander gleich werden. Aus der Integralform für die η wird gezeigt, dass sie mit einer bestimmten Potenz von $u-b$ multiplicirt für $u = b$, und mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{u}$ multiplicirt für $u = \infty$ endlich bleiben.

Folglich muss die Differentialgleichung für die η, wie der Verfasser in der Abh. Bd. 66 d. J. nachgewiesen, von der Form sein, dass, wenn p ihre Ordnungszahl ist: $\frac{\beta_{p-i}}{\beta_p} = \frac{F_{(\varrho-1)i}(u)}{\psi^i}$, wo $F_\lambda(u)$ eine ganze rationale Funktion von u höchstens vom Grade λ, und $\psi(u) = (u-b_1)(u-b_2)\ldots(u-b_\nu)$.

Es zeigt sich ferner, dass die Exponenten, zu welchen die

Integrale eines einem singulären Punkte zugeordneten Fundamentalsystems gehören, sämmtlich rationale Zahlen sind.

Es ist nunmehr möglich, jeden Periodicitätsmodul auf die Form: $\eta_\lambda = c_{\lambda 1} v_1 + c_{\lambda 2} v_2 + \cdots + c_{\lambda p} v_p$ zu bringen, wo $v_1 v_2 \dots v_p$ die sämmtlichen Integrale eines zu einem singulären Punkte b zugehörigen Fundamentalsystems bedeuten. Denn bei einem Umlaufe von u um b gehen die v in eine lineare homogene Funktion ihrer ursprünglichen Werthe über, deren Coefficienten bekannt sind, ebenso gehen die η in eine lineare homogene Funktion ihrer ursprünglichen Werthe über, deren Coefficienten nach dem Obigen aus der Integralform zu ermitteln sind. Die Vergleichung liefert alsdann p^2 lineare homogene Gleichungen für die p^2 unbekannten Grössen $c_{\lambda 1}, c_{\lambda 2} \dots c_{\lambda p}$, $\lambda = 1, 2, \dots p$, wodurch dieselben bis auf einen gemeinsamen constanten Faktor bestimmt werden.

Für die Bestimmung der Coefficienten der Differentialgleichung fügt der Verfasser zu dem oben angegebenen Verfahren noch ein zweites hinzu, das für die Ausführung bequemer ist, und an dem besonderen Fall

$$\varphi(x, u) = A_0 (x - k_1)(x - k_2) \dots (x - k_{n-1})(x - u)$$

erläutert wird.

Zum Schluss wird für den Fall des elliptischen Integrals

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}$$

die Darstellung der Periodicitätsmoduln durch die Integralgruppen der zu $u = 0$, $u = 1$ und $u = \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme vollständig gegeben. Hr.

L. Fuchs. Ueber eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Borchardt J. LXXI. 128-136. 1870.

Diese Arbeit enthält eine interessante Anwendung der vorhergehenden Untersuchung auf die Darstellung einer gewissen rationalen Verbindung der Periodicitätsmoduln der zu $s^2 = \varphi(x)$ gehörigen hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, die von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig ist und somit eine Verallgemeinerung der bekannten Legendre'schen

Relation bildet. Sie tritt in Form einer Determinante auf, die dem Werthe nach mit dem von Haedenkamp (Bd. 22 dieses Journals p. 148 ff.) gegebenen vielfachen Integral übereinstimmt. Die entwickelte Relation hat jedoch den Vorzug vor der Haedenkamp'schen Gleichung, dass sie auch für complexe Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ und für complexe Integrationswege gültig bleibt. Wir müssen darauf verzichten, die übrigens sehr eleganten Entwickelungen hier wieder zu geben. Die in Rede stehende Determinante lautet:

$$\begin{vmatrix} \eta_{01} & \eta_{02} & \dots \eta_{0,n-1} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \dots \eta_{1,n-1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \eta_{n-2,1} & \eta_{n-2,2} & \dots \eta_{n-2,n-1} \end{vmatrix} = H,$$

wo $\eta_{\lambda 1}, \eta_{\lambda 2} \dots \eta_{\lambda, n-1}$ die zu den Integrationsgrenzen u und k_1, k_1 und $k_2, \dots, k_{n-2}$ und k_{n-1} gehörigen Periodicitätsmoduln des Integrals

$$\int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-u)(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_{n-1})}} = \int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

bedeuten. Es wird zunächst nachgewiesen, dass H von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ unabhängig ist und, da somit zur Bestimmung des Werthes von H für $\varphi(x)$ eine beliebige ganze Funktion von x mit ungleichen Faktoren genommen werden kann, so wird hierfür $\varphi(x)=x^n-1$ gewählt und es ergiebt sich dann nach einer kurzen Rechnung

$$\text{für ein ungrades } n\text{:} \quad H = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{4}} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4)\dots 3 \cdot 1},$$

$$\text{für ein grades } n\text{:} \quad H = \frac{(-1)^{\frac{n}{4}} \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \pi}{(n-2)(n-4)\dots 2}.$$

Hierbei wird gelegentlich ein in der Haedenkamp'schen Gleichung befindlicher Irrthum rektificirt. Hr.

L. Königsberger. Die Differentialgleichung der Perioden der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Clebsch Ann. I. 165-167. 1869.

Um die der Legendre'schen linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung für das vollständige elliptische Integral K analoge

lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung für die Perioden der hyperelliptischen Integrale 1ter Ordnung herzuleiten, combinirt der Verfasser die 3 Differentialgleichungen:

$$E=\frac{1}{k}\cdot\frac{dK'}{dk}-k\frac{dE}{dk},\ K'=\frac{1}{k}\cdot\frac{dK}{dk}-k\frac{dK'}{dk},\ E'=\frac{1}{k}\cdot\frac{dE}{dk}-k\frac{dE'}{dk},$$

für die vollständigen hyperelliptischen Integrale 1ter und 2ter Gattung

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{Rx}},\ K'=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{Rx}},\ E=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{Rx}},\ E'=\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{Rx}},$$

mit einer 4ten Differentialgleichung von der Form:

$$k\frac{dK}{dk}+K=PE'+QE+RK'+SK,$$

welche durch die Zerlegung des R in eine Summe von Potenzen von $\left(x-\frac{1}{k^2}\right)$, aus

$$d\frac{\sqrt{Rx}}{x-\frac{1}{k^2}}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{R'(x)}{x-\frac{1}{k^2}}-\frac{R(x)}{\left(x-\frac{1}{k}\right)^2}\right]\frac{dx}{\sqrt{Rx}}$$

gewonnen wird. Die benutzte Methode lässt sich auch anwenden zur Herstellung der Differentialgleichung für die Perioden der hyperelliptischen Funktionen beliebiger Ordnung. M.

L. Königsberger. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. Clebsch Ann. I. 161-164. 1869.

Umformung der sechs (Borchardt J. LXVII. 98) für die Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung vom Verfasser gegebenen Relationen zwischen den für die Nullwerthe der Argumente genommenen ϑ-Funktionen des vorgelegten und denen des transformirten hyperelliptischen Systemes in drei andere, die Stelle der Modulargleichungen vertretende Relationen, welche nur 3 der ϑ-Funktionen des vorgelegten und dieselben 3 des transformirten Systemes enthalten. Diese 3 Modulargleichungen haben eine der Modulargleichung dritter Ordnung für die elliptischen Funktionen

$$\sqrt{k}.\sqrt{\lambda}+\sqrt[4]{1-k^2}.\sqrt[4]{1-\lambda^2}=1$$

analoge Form. M.

A. Clebsch. Zur Theorie der binären Formen 6ten Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Funktionen. Göttingen, Dietrich 1869, Clebsch Ann. II. 193-197. 1870.

Siehe Abschnitt II. Cap. 2 p. 66.

F. Casorati. Sulli moduli di periodicità degli integrali Abeliani. Milano. Bernardoni 1869.

Carl Neumann. Ueber die Entwickelung einer Funktion nach Quadraten und Produkten der Fourier-Bessel'schen Funktionen. Leipz. Ber. 1869. 221-256. Leipzig 1870.

In der Schrift: „Theorie der Bessel'schen Funktionen. Leipzig 1867" hat Herr Neumann gezeigt, dass für zwei complexe Variable x und y

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varepsilon_n J^n(x)\,O^n(y)\quad[\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_{n>0}=2]$$

ist, sobald mod. $x <$ mod. y; und dass jede gegebene Funktion $f(z)$, welche eindeutig und stetig ist, so lange mod. z kleiner als eine reelle Constante R bleibt, sich darstellen lässt in der Form:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha_n J^n(z),$$

wo

$$\alpha_n=\frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\,O^n(z)\,dz,$$

und die Integration positiv über einen um $z=0$ mit $r<R$ beschriebenen Kreis erstreckt wird.

Die vorliegende Untersuchung wurde angeregt durch die von Herrn E. Lommel (Studien über die Bessel'schen Funktionen. Leipzig 1868 p. 50 s. Fortschr. d. M. I. p. 139) ausgesprochene Vermuthung, dass für eine g r a d e Funktion $f(z)$ auch eine Entwickelung möglich sein dürfte nach den Q u a d r a t e n der Bessel'schen Funktionen, — oder wie sie Herr Heine (Borchardt J. LXIX. 128, s. Fortschr. d. M. I. 146) nennt, Fourier-Bessel'schen oder Cylinder-Funktionen. Herr Neumann gelangt zu dem Resultat: dass für jede grade Funktion $f(z)$, welche eindeutig und stetig ist, so lange

mod. $z < R$ bleibt, eine solche nach den Quadraten der Fourier-Bessel'schen Funktionen fortschreitende Entwickelung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} k_n [J^n(z)]^2$$

existirt, welche gültig ist für alle der Bedingung mod. $z < R$ entsprechenden Werthe von z. Die allgemeine Methode, nach welcher der Verfasser die Coefficienten k_n einer derartigen Entwickelung bestimmt, beruht auf der Entwickelung des Bruches $\frac{1}{y^2 - x^2}$ nach den Funktionen $J^{(n)}(x)$ und anderen Funktionen $\Omega^n(y)$, welche definirt sind durch die Formel:

$$\Omega^n(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4n^2}{z^4} + \frac{1.2}{3.4} \cdot \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{z^6} + \frac{1.2.3}{4.5.6} \cdot \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{z^8} + \dots;$$

es ergiebt sich

$$k_n = \frac{E_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z)\, \Omega^n(z) \,.\, z dz.$$

Hieran schliessen sich einige Relationen für die Quadrate der Fourier-Bessel'schen Funktionen und weitere Untersuchungen über die durch Differentiation der für $\frac{1}{y^2 - x^2}$ gefundenen Summe, woraus dann Sätze für die Entwickelung ungrader Funktionen folgen, welche den oben für grade Funktionen hergeleiteten ganz analog sind. M.

Hermite. Sur la transcendante E_n. Brioschi Ann. (2) III. 83. 1869.

Der Verfasser setzt mit Cauchy die Bessel'sche Funktion

$$\frac{\varepsilon^n}{1.3.5 \dots 2n-1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n}\omega \,.\, \cos[\varepsilon \cos\omega] \,.\, d\omega = E_n,$$

und findet durch die Substitution $\varepsilon = n \sin\varphi$ für ein grosses n den Grenzwerth

$$E_n = \frac{\left(e^{\cos\varphi} \,.\, \mathrm{tg}\, \frac{\varphi}{2}\right)^n}{\sqrt{2n\pi \cos\varphi}}.$$

M.

R. Most. Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunktionen. Borchardt J. LXX. 163-168. 1869.

Es wird gezeigt, dass auch die höheren Ableitungen der Kugelfunktionen nach Kugelfunktionen entwickelt werden können. — Die ersten Ableitungen sind von Heine und Christoffel in dieser Weise dargestellt. Wy.

H. Hankel. Die Cylinderfunktionen erster und zweiter Art. Clebsch Ann. I. 467-501. 1869.

Heine hat (Fortschr. d. M. I. p. 146) die Fourier-Bessel'schen Funktionen oder Cylinderfunktionen als Grenzwerthe von Kugelfunktionen dargestellt. Hankel verweist auf Hansen (Abhandlungen der Sächsischen Gesellsch. d. W. 1855 p. 252), welcher

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{\Gamma(n+1)} F\left(\omega, \omega', n+1, -\frac{x^2}{4\omega\omega'}\right),$$

d. i. $J^n(x)$ als Grenzwerth der hypergeometrischen Funktion F für unendlich grosse ω und ω' ableitet, was zur Vervollständigung der im vorigen Jahrgang aufgeführten Literatur erwähnt sein mag.

Die Abweichung von der Continuität der Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)R = 0,$$

dass, wenn n eine ganze Zahl ist, $J^n(x)$ und $J^{-n}(x)$ nicht mehr zwei verschiedene particuläre Integrale darstellen, hebt der Verfasser dadurch, dass er $J^n(x)$ als erste und

$$\lim_{\varepsilon=0} \cdot \frac{(-1)^n J^{-(n-\varepsilon)}(x) - J^{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}$$

als zweite partikuläre Lösung nachweist, wodurch er ausserdem zu der Reihenentwickelung

$$Y^n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \left\{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \psi(n+p+1) - \psi(p+1)\right\}$$

für die zweite Lösung bei ganzen n gelangt, indem er

$$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$$

setzt.

Dann entwickelt er nach einem rationellen Princip eine Reihe von Integralausdrücken für die Cylinderfunktionen, bei denen er scharf zwischen den verschiedenen möglichen Voraussetzungen über die reellen Theile der Complexen x und n unterscheidet, leitet aus diesen semiconvergente Reihen für dieselben ab, welche grösstentheils neu sein dürften, und giebt einige beachtenswerthe Winke über die Natur solcher Reihen. Wy.

E. Lommel. Ueber die Anwendung der Bessel'schen Funktionen in der Theorie der Beugung. Schlömilch Z. XV. 141-169. 1870.

Es wird die praktische Bedeutung dieser Funktionen für die Untersuchung der Frauenhofer'schen Beugungserscheinungen in eleganter Weise illustrirt, wobei namentlich die Wichtigkeit der Integralausdrücke für die Funktionen erster Gattung und des Satzes über die Lage der Wurzeln hervortritt. Im Anhange befinden sich Tafeln, welche auch für andere Zwecke nutzbringend sein dürften. Das Interesse der Arbeit ist wesentlich ein physikalisches. Wy.

E. Lommel. Integration der Gleichung

$$x^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}} \mp y = 0$$

durch Bessel'sche Funktionen. Clebsch Ann. II. 624-635. 1870.

Die Gleichung ist von Liouville (J. de l'éc. pol. 1835) durch das m-fache Integral

$$y = \int^{m} dx^{m} \sum_{p=1}^{p=2m+1} C_p e^{2\lambda_p \sqrt{x}},$$

und von Spitzer (Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Wien 1860) durch

$$y = x^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \sum_{p=1}^{p=2m+1} C_p e^{2\lambda_p \sqrt{x}}$$

integrirt worden, wobei die C_p constant und die λ_p die Wurzeln der Gleichung $\lambda^{2m+1} = \pm 1$ sind.

Lommel erhält, indem er von den Differentialeigenschaften der Bessel'schen Funktionen ausgeht, fast ohne Rechnung die Auflösung

$$y = x^{\frac{2m+1}{4}} \sum_{p=0}^{p=2m} C_p \left[J^{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p \sqrt{x}) + i\, J^{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p \sqrt{x})\right],$$

wo unter den α_p die Wurzeln der Gleichung $\alpha^{2m+1} = \mp i$ verstanden werden.

Aus diesem Ausdruck, welcher die Wichtigkeit der J mit gebrochenem Parameter illustrirt, leitet er dann noch die folgenden ab, welche nur aus algebraischen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind:

„Als vollständiges Integral der Gleichung

$$x^{2m+\frac{1}{2}} \frac{d^{4m+1} y}{dx^{4m+1}} \mp y = 0$$

hat man auch

$$y = x^{m} \sum_{p=0}^{p=4m} C_p e^{2i\alpha_p \sqrt{x}} \sum_{q=0}^{q=2m} \frac{(2m+1)^{q|1} (2m)^{q|-1}}{4^{q|4}} \left(\frac{i}{\alpha_p \sqrt{x}}\right)^q,$$

wo $\alpha^{4m+1} = \mp i$ ist; während das vollständige Integral der Gleichung

$$x^{(2m+1)+\frac{1}{2}} \frac{d^{4m+3} y}{dx^{4m+3}} \mp y = 0,$$

wenn jetzt $\alpha^{4m+3} = \mp i$ bedeutet, durch

$$y = x^{m+\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{p=4m+2} C_p e^{-2i\alpha_p \sqrt{x}} \sum_{q=0}^{q=2m+1} \frac{(2m+2)^{q|1} (2m+1)^{q|-1}}{4^{q|4}} \left(\frac{i}{\alpha_p \sqrt{x}}\right)^q$$

dargestellt wird".

Theils um diese Transformation zu Stande zu bringen, theils um die in den vorjährigen (1868) „Studien etc." aufge-

führten Relationen zwischen den J zu vermehren, beweist der Verfasser, dass die Entwickelung:

$$J^{m+\frac{1}{2}}(z) = (-i)^{m+1}\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{q=0}^{q=m}\frac{(m+1)^{q|1}\,m^{q|-1}}{2^{q|2}}\cdot\frac{i^q}{z^q}$$
$$+\,i^{m+1}\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{q=0}^{q=m}\frac{(m+1)^{q|1}\,m^{q|-1}}{2^{q|2}}\cdot\frac{(-i)^q}{z^q}\cdots(\S\ 3)$$

nicht bloss für ganze positive, sondern auch für ganze negative m gilt, dass für jedes ganze m:

$$[J^{-m-\frac{1}{2}}(z)]^2+[J^{m+\frac{1}{2}}(z)]^2=$$
$$\frac{2}{\pi z}\sum_{r=0}^{r=m}\frac{(2m+1-2r)^{r|1}}{r!}\left(\frac{(m+1-r)^{m-r|1}}{2^{m-r}}\right)^2\frac{1}{z^{2m-2r}},$$

dass für jedes r und jedes ganze k:

$$\lim_{z=0} z[(J^r(z))^2+(J^{r+2k+1}(z))^2]=\frac{2}{\pi}\cdots(\S\ 4);$$

so wie dass stets:

$$\left.\begin{aligned}\frac{z}{\pi}&=\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{2p+1}{2}\left(J^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right)^2,\\ \frac{\sin 2z}{2\pi}&=\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\frac{2p+1}{2}\left(J^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right)^2\end{aligned}\right\}\cdots(\S\ 5)\text{ ist.}$$

Am Ende der Arbeit wird die in den „Studien etc." gegebene Auflösung

$$y=x^{\frac{m}{2}}\sum_{p=0}^{p=m-1}[A_pJ^m(2i\sqrt{a_px})+B_pY^m(2i\sqrt{a_px})],\ (a^m=\pm 1),$$

der Gleichung

$$x^m\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}\mp y=0$$

mit denjenigen Liouville's:

$$y={}^{m-\frac{1}{2}}\!\!\int dx^{m-\frac{1}{2}}\sum_{p=1}^{p=2m}C_pe^{2\lambda_p\sqrt{x}},\ (\lambda^{2m}=\pm 1)$$

und Spitzer's:

$$y=x^m\frac{d^{m+\frac{1}{2}}}{dx^{m+\frac{1}{2}}}\sum_{p=1}^{p=2m}C_pe^{2\lambda_p\sqrt{x}}$$

verglichen, um daraus bis auf die Bestimmung von Constanten abzuleiten, dass die Integrale und die Differentialquotienten von

der Ordnung $\left(m+\frac{1}{2}\right)$ von Exponentialfunktionen sich durch Bessel'sche Funktionen ausdrücken lassen müssen. Wy.

L. Schläfli. Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Funktionen.
Clebsch Ann. III. 134-159. 1870.

Da die Bessel'schen Funktionen gegenwärtig von vielen Analysten bearbeitet werden, so ist es nicht zu verwundern, dass Mehrere, ohne von einander zu wissen, denselben Ausgangspunkt wählen. So ist hier und in der oben besprochenen Arbeit Hankel's die Ableitung beider Integrale der Bessel'schen Gleichung dieselbe, auch wird des Werkes von Lommel aus dem Jahre 1868 nicht erwähnt, obgleich beide Autoren durch Erweiterung des Parameters a in $J^a(x)$ auf gebrochene Werthe von der ursprünglichen Betrachtungsweise abweichen.

Der Satz H. Neumann's, dass

$$J^0(x+y)=J^0(x)J^0(y)+2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda J^\lambda(x)J^\lambda(y)$$

ist, erfährt hier die Erweiterung:

$$(x+y)^a F(a,(x+y)^2)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{a-n}F(a-n,x^2).y^n F(n,y^2),$$

wobei

$$J^a(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^a F\left(a,-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

zu nehmen ist.

Für die Neumann'sche Funktion O^n, deren Differentialgleichung unter Voraussetzung eines graden oder ungraden n bei ihrem Erfinder verschieden lautet, wird die Collectivform angegeben:

$$x^2\frac{d^2O^n(x)}{dx^2}+3x\frac{dO^n(x)}{dx}+(x^2-n^2+1)O^n(x)=x\cos\frac{^2n\pi}{2}+n\sin\frac{^2n\pi}{2};$$

es wird

$$O^{-n}(x)=(-1)^n O^n(x)$$

eingeführt, und der Satz

$$O^n(x+y)=\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} O^{n-\lambda}(x)J^\lambda(y)$$

durch den folgenden erweitert:

$$S^a(x+y)=\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} S^{a-p}(x)\,J^p(y),$$

wo a eine ganze positive Zahl, und

$$S^a(x)=\frac{2}{a}\left(x\,O^a(x)-\cos^2\frac{a\pi}{2}\right)$$

bedeutet.

Dann wird die Gleichung

$$F(a,x).F(b,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi)^{a+b}\cos[(a-b)\varphi].F(a+b,4x\cos^2\varphi)d\varphi$$

abgeleitet, welche eine von H. Neumann ausgeführte Darstellung von $[J^n(x)]^2$ in sich enthält, und die Funktion Y aus vier Theilen $Y^n=\log x.J^n+G^n+H^n+E^n$ zusammengesetzt, die einzeln bestimmt werden.

Im Nachtrage zeigt der Verfasser, wie seine in Brioschi Ann. I. (s. Fortschr. d. M. I. p. 112) gegebene Formel

$$J^a(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x\sin\varphi-a\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-2x\sin\varphi-a\varphi}\,d\varphi$$

einfacher bewiesen werden könne, als dort geschehen ist.

Wy.

C. Neumann. Ueber Produkte und Quadrate der Bessel'schen Funktionen. Clebsch Ann. II. 192. 1870.

Eine kurze Notiz, in welcher angegeben wird, dass

$$(y^2-x^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varepsilon_n\,\Omega^n(y)\,[J^n(x)]^2$$

entwickeltwerden kann, wobei $\operatorname{mod} x<\operatorname{mod} y$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots=2$ bedeutet, und $\Omega^n(y)$ eine ganze rationale Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von y^{-2} darstellt.

Wie aus dieser Gleichung die Entwickelung einer graden Funktion nach den Quadraten $[J^n(x)]^2$ und der ungraden nach den Produkten $J^n(z).J^{n+1}(z)$ folgt, findet keine Ausführung, deren es auch kaum bedarf.

Wy.

G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Electricitätsvertheilung. Pr. Elbing 1870.

Verfasser behandelt die „Kugelfunktion"

$$K^\mu(-\cos\theta) = \frac{2\cos(\mu\pi i)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i - \cos\theta)}},$$

welche der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dK}{d\theta}\right)-\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)K=0$$

genügt. Das allgemeine Integral der letzteren ist

$$K = AK^\mu(\cos\theta) + BK^\mu(-\cos\theta).$$

Er zeigt den Zusammenhang der Funktion K^μ mit den Kugel- und Cylinderfunktionen und entwickelt dieselbe für ein zusammengesetztes Argument (Additionstheorem). Wy.

J. Thomae. Beitrag zur Theorie der Funktion

$$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma, \\ \alpha', \beta', \gamma',\end{pmatrix} x).$$

Schlömilch Z. XIV. 48-61. 1869.

Die Arbeit verfolgt den Zweck, direkt zu zeigen — was Riemann in der Abhandlung über die durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen (Göttingen 1857) nicht ausführt — dass das von einem der vier Werthe $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$ bis zu einem andern erstreckte Integral

$$\int x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}.(1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}.(1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma} ds$$

jede der sechs Funktionen $P^\alpha, P^{\alpha'}, \ldots P^{\gamma'}$ darstellt.

Nach einer für einzelne Fälle nöthigen, in vortheilhafter Weise gewählten Definition von $\int_a^b$, erschliesst sich der Zusammenhang mit den Euler'schen Integralen und den Gauss'schen Funktionen F und $\Pi(\lambda) = \int_0^\infty s^\lambda e^{-s} ds$ ohne Zwang.

Auf die Einzelheiten der Ausführung lässt sich ohne zu grosse Breite nicht eingehen. Es mag nur noch erwähnt werden, dass am Schluss die Werthe sämmtlicher 24 Constanten α_β durch Π-Funktionen ausgedrückt sind, welche in den 12 Gleichungen

$$P^\alpha = \alpha_\beta . P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'}$$

vorkommen. Wy.

Ascoli. Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse. Brioschi Ann. (2) IV. 31-35. 1870.

Kurzer Beweis des Satzes, dass die Reihe

$$F(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \cdots,$$

wenn sie zugleich mit ihren Gliedern in einem Flächenstück eine synektische Funktion darstellt, gliedweise differentiirt und integrirt werden darf. Wy.

P. du Bois-Reymond. Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Funktion zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt. Borchardt J. LXX. 10-45. 1869.

Es kann vorkommen, dass eine Funktion $F(x, y)$ für $x=0$, $y=0$ unbestimmt wird, während sie in der Nähe von $x=0, y=0$ stetig und bestimmt ist und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Dann lässt sich fragen, zu welchem Grenzwerthe oder zu welchen Grenzwerthen $F(x, y)$ herantritt, wenn x und y entweder nach einander oder gleichzeitig verschwinden. Um eine geometrische Anschauung unterzulegen, heisst dieses: Die z-Axe eines orthogonalen Coordinatensystems kann ganz oder theilweise in der Fläche $z = F(x, y)$ liegen. In diesem Falle wird die gedachte Fläche sich mit einer Cylinderfläche, die ebenfalls durch die z-Axe hindurch geht, in einer Curve schneiden, welche, je nachdem man die Gestalt der Cylinderbasis ändert, in verschiedenen Punkten — oder auch in einem und demselben

Punkte — an die z-Axe herantritt. Nimmt man sogleich hinzu, dass die Fläche $z = F(x, y)$ an der z-Axe faltig angeheftet sein kann, so dass man, auf ihr bei der z-Axe vorbeischreitend, über Berge und Thäler hinüber gelangt, welche an dieser Axe entweder endliche oder unendliche Höhe und Tiefe zeigen können, so sieht man ferner, dass die Durchschnitte mit den Cylinderflächen, selbst wenn diese sich in der z-Axe berühren, möglicher Weise zu ganz verschiedenen Punkten derselben führen, und erkennt, dass sich die Entscheidung hierüber aus den Gleichungen der Fläche $z = F(x, y)$ und der Cylinderfläche $\varphi(x, y) = 0$ ohne wesentliche Schwierigkeiten des Calculs treffen lässt.

Den fraglichen Punkt $(x = 0, y = 0)$ nennt der Verfasser „Stetigvieldeutigkeitspunkt" und die Grenzgestalt der Projection des Schnitts einer der z-Axe unendlich nahen Cylinderfläche und der Fläche $z = F(x, y)$ auf eine feste Fläche „Limitale".

Anwendung auf Integrale $\int_0^k \varphi(x, h)\,dx$, in denen k und h verschwinden, und viele andere Beispiele. Wy.

L. Pochhammer. Ueber hypergeometrische Funktionen n^{ter} Ordnung. Borchardt J. LXXI. 316-352. 1870.

Unter dieser Bezeichnung werden Funktionen verstanden, welche für $n=2$ in die bekannten Gauss'schen hypergeometrischen Funktionen übergehen und, auch hiervon abgesehen, ein ihnen analoges Verhalten zeigen.

Sie lassen sich durch die Differentialgleichung

$$\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=n-1}^{k=0} (-1)^{n-k}\Big\{(\lambda-k-1)_{n-k}\,\varphi^{(n-k)}(x) +$$

$$(\lambda-k-1)_{n-k-1}\,\psi^{(n-k-1)}(x)\Big\}\frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

definiren, in welcher $\varphi(x)$ eine ganze Funktion n^{ten}, $\psi(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und λ eine Constante bedeutet. Sie besitzen ausser $x=\infty$ noch n endliche singuläre (Unendlichkeits- und Verzweigungs-) Punkte $a_1, a_2, \dots a_n$, und ihre verschiedenen Zweige sind gleich Integralen von der Form:

$$\text{Const.}\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

wo g und h je zwei der $(n+1)$ Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ und x bedeuten. Für jeden der n singulären Punkte $a_1, a_2, \dots a_n$ existiren je $(n-1)$ wesentlich von einander verschiedene particuläre Integrale, welche convergent entwickelbar sind, und je ein n^{tes}, welches durch Division mit einer Potenz von $(x-a_\nu)$ eindeutig und von Null verschieden wird; ähnlich für $x=\infty$. Wy.

L. Fuchs. Bemerkungen zu der Abhandlung: „Ueber hypergeometrische Funktionen n^{ter} Ordnung", in diesem Journal LXXI. 316. Borchardt J. LXXII. 255-262. 1870.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande im Zusammenhange mit der Antwort des Herrn Pochhammer. Wy.

Erster Abschnitt (Nachtrag).

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

Jouglet. Le maître de Descartes; ses théories. C. R. LXX. 728-729. 1870.

Notiz über ein bisher unbekanntes Manuscript: „In universam logicam moralemque philosophiam commentarius autore celeberrimo professore Grandillonio" vom Jahre 1619, das sich in der Bibliothek von Tours findet und den Lehrer Descartes', „Grandillonius ex convictu regio Flexensi" zum Verfasser hat, nebst einer kurzen Bemerkung über die Anschauungen desselben und über das Jahr, in welchem Descartes das Institut zu La Flerté verlassen hat. O.

L. Figuier. Vies des savants illustres du XVIIme siècle.

L. Figuier. Vies des savants illustres du XVIIIme siècle. Paris, Libr. internat. 1869 u 1870.

Der erste der beiden Bände, der 4te des Gesammtwerkes, enthält nach einem Ueberblick über den Stand der Wissenschaften beim Beginn des 17ten Jahrhunderts die Lebensbeschreibungen von Keppler, Galilei, Descartes, Bacon, Huyghens, Pascal, Fermat, Désargues, Cassini, der zweite die von Newton, Leibniz, Euler, d'Alembert, Jacques, Jean und Daniel Bernoulli, endlich Condorcet. Des Nähern auf die einzelnen Arbeiten einzugehen, die sich meist mehr mit dem äusseren Lebensgange als mit der wissenschaftlichen Entwickelung beschäftigen, erlaubt der hier gestattete Raum nicht, zumal da die Darstellungen theilweise eine ernste Kritik erfordern würden. O.

Chasles, Le Verrier, Bertrand et cét. Newton, Pascal et Galilée. C. R. LXVIII. 17-42. 256-264. 710-713. 740-761. 774-778. 793-796. 807-808. 862-864. 885-894. 957-959. 969-973. 993-1006. 1071-1077. 1093-1095. 1239-1243. 1425-1433. 1533. — C. R. LXIX. 5-28. 62-95. 103-105. 145-152. 213-248. 305-315. 369-380. 391-392. 429-436. 646-650. 677-684. 1869.

Abdruck der von H. Chasles der Pariser Akademie vorgelegten Manuscripte Pascal's etc. nebst dem sich daran knüpfenden Streit über die Echtheit derselben. Einen Ueberblick über den Verlauf der Angelegenheit findet man bei Hankel, Schlömilch Z. XIV. 165-173 und Pisco, Newton und Pascal. Pr. Wien. 1869. Siehe p. 13. O.

J. Hoüel. Vie de Riemann. Mém. de Bordeaux. VIII. 6-8. 1869.

Notizen über das äussere Leben Riemann's, die theils aus den Göttinger Nachrichten 1867, theils aus Mittheilungen des Prof. Angelo Forti geschöpft sind. — Georg Friedrich Bernhard Riemann, geb. 17. Sept. 1826 zu Breselenz an der Elbe, studirte 1846—1849 zu Göttingen und Berlin, war 1849—1862 Docent in Göttingen; 1862—1865 aus Gesundheitsrücksichten in Italien, namentlich in Pisa; starb 20. Juli 1866 zu Selasca am Lago maggiore. — Verzeichnisse seiner Schriften finden sich in den Göttinger Nachrichten 1867 und in Boncompagni Bulletino III. 418. (1870.) Wn.

Bertrand et Combes. Discours prononcés aux funérailles de Lamé. Inst. 1. sect. XXXVIII. 175-176. 1870. Bull. Math. I. 183-194. 1870.

Während Herr Bertrand, ohne historische Daten zu geben, über die Methode Lamé's spricht, geht Herr Combes vorzugsweise auf Lamé's Arbeiten über Gegenstände der practischen Mechanik und auf seine Verdienste um die Elasticitätstheorie ein, wobei einige der hauptsächlichsten Arbeiten Lamé's angeführt werden. Wn.

E. de Beaumont. Éloge historique de Puissant. Inst. 1. sect. XXXVII. 201-206 209-214. 217-223. 225-231. 233-237. 241-244. 1869.

Eine Lebensbeschreibung Puissant's mit besonderer Hervorhebung seiner Verdienste um die Triangulation und Geodäsie. O.

(UN BIBLIOPHILE). Sur l'étymologie du mot Algorithme. Nouv. Ann. (2) VIII. 188-191. 1869.

Der Verfasser leitet das Wort Algorithmus her von dem Mathematiker Mohammed-ben-Moussa mit dem Beinamen Al-Kharizmi von seinem Geburtslande Kharizm oder Khovarezm. Er lebte im 9ten Jahrhundert und schrieb ausser einer Algebra ein Buch über indische Rechnungsmethoden. (Vgl. B. Boncompagni: Trattati d'Arithmetica. Rom 1857). M.

L. BÉZIAT. Notice sur Platon de Tivoli, traducteur du XIIe siècle. Nouv. Ann. (2) IX. 145-162. 1870.

Nach einer Notiz des Fürsten Boncompagni (Nouv. Ann. (2) IX. 286-287) nur ein Auszug aus seiner Schrift: Delle Versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo. Roma 1851 (auch Atti d. Acc. pont. dei Nuovi Lincei IV. 254-286). M.

J. HOÜEL. Notice sur la vie et les travaux de N.-J. Lobatschefsky. Bull. Math. I. 66-71. 324-328. 384-388. 1870.

Der erste Artikel enthält das Wichtigste aus dem Leben Lobatschefsky's, nach der Rede Janichefsky's, die von Potocki in's Französische übersetzt und in Boncompagni Bull. II. 223 veröffentlicht ist. (S. Fortschr. d. M. II. p. 22.) Im zweiten Artikel sind die Arbeiten L.'s zusammengestellt und mit kurzen Referaten versehen mit Ausnahme der geometrischen, welche im dritten Artikel ausführlicher besprochen sind. Herr Janichefsky zu Kazan veröffentlicht gegenwärtig eine neue Ausgabe der Oeuvres géométriques de N.-J. Lobatchefsky. M.

V. PUISEUX. Discours sur Lamé. Bull. Math. I. 194-195. 1870.

Die drei Reden, welche am 3. Mai 1870 am Sarge Lamé's von den Herren Bertrand, Combes (S. vor. Seite) und Puiseux gehalten worden sind, heben die Verdienste des Verstorbenen um die Mathematik und die mathemathische Physik hervor. Die Redaktion des Bulletin des sciences mathématiques etc. veröffentlicht im Anschluss daran eine kurze Uebersicht über die Haupt-

momente in Lamé's Leben und ein Verzeichniss seiner Schriften unter dem Titel: „Gabriel Lamé. Liste de ses travaux et des fonctions qu'il a occupées". Bull. Math. I. 224-228. 1870.

M.

Capitel 2.

Philosophie.

J. M. C. Duhamel. Sur les principes de la science des forces. C. R. LXIX. 773-779. 1869.

Der Verfasser legt die Grundsätze dar, nach welchen er sein Werk: Sur les Sciences de raisonnement, geschrieben hat. Von diesem waren die zwei ersten Theile, Science des nombres und Science de l'étendue, bereits erschienen. Der gegenwärtige Artikel begleitet das Erscheinen des dritten Theils, Science des forces.

Bedingung einer reinen Verstandeswissenschaft (science de raisonnement, welche der experimentellen Wissenschaft gegenüber gestellt wird) ist die Nothwendigkeit in der Folgerung aller Beziehungen zwischen den Gegenständen. Die wirkliche Welt hat keine Nothwendigkeit. Wir bedürfen erst vieler Beobachtung, ehe wir die erforderlichen Data gewinnen, aus denen die Theorie mit Nothwendigkeit abgeleitet werden kann. Eine absolute Gewissheit kommt diesen nie zu; doch können wir uns befriedigt finden. Die allgemeinsten und einfachsten Gesetze liefert die Bewegung; sie muss daher erster Gegenstand des Studiums der Materie sein. Durch sie werden die Begriffe der Zeit und der Causalität eingeführt. Die Zeit ist von Natur keine Grösse. Wir machen sie dazu, indem wir diejenigen Zeiten gleich setzen, in denen unter gleichen Bedingungen gleiche Bewegungen stattfinden. Bewegung ist stets relativ und bleibt es in aller Rechnung. Es ist daher unnütz, einen absolut ruhenden Raum anzunehmen, um ihn gleich nachher wieder fallen zu lassen.

Es wird dann weiter die Eintheilung der Mechanik in die Lehre vom Gleichgewicht und von den Bewegungsgesetzen besprochen und das Vorausgehen der ersteren gerechtfertigt, endlich von der Aufgabe, die Kräfte aus der Bewegung zu finden und von der Erleichterung, welche Newton durch Kepler's Entdeckung bei der Lösung zu Theil ward, gehandelt. Die Klarheit der Darlegung rechtfertigt die besten Erwartungen in Betreff des Werkes. H.

J. Hoüel. L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie. Nouv. Ann. (2) VIII. 278-281. 1869.

Notizen über die Discussion, die sich in Folge des Beschlusses der italienischen Regierung, den Euclid als Lehrbuch der Geometrie einzuführen, über die Zweckmässigkeit dieser Einführung erhoben hat. O.

B. Riemann. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. Trad. par J. Hoüel. Brioschi (2) III. 309-327. 1870.

Siehe Fortschr. d. M. I. p. 22. Wn.

Coffin. Métaphysique du calcul différential. Arras. 1869.

J. Bertrand. Sur la somme des angles d'un triangle. C. R. LXIX. 1265-1269 1869.

J. Bertrand. Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle. C. R. LXX. 17-20. 1870.

Im ersten Artikel theilt der Verfasser einen von Carton gelieferten Beweis für den Satz von der Summe der Dreieckswinkel mit. Dieser stützt sich auf zwei Sätze, welche nach seiner Behauptung bereits bewiesen sein sollen: Legendre habe bewiesen, dass die Summe der Dreieckswinkel nie $> 2R$ ist; Lobatschefsky, dass, wenn die Winkelsumme in einem Dreieck $2R$ oder in einem Viereck $4R$ beträgt, das gleiche von allen gilt. Es ist hierzu zu bemerken, dass schon der erstere Satz das Gebiet derjenigen Sätze überschreitet, welche für sphärische Flächen gelten,

die daher ohne specifische, die Ebene charakterisirende Annahmen beweisbar sind. Es kam daher vor allem darauf an, über Legendre's Annahmen Rechenschaft zu geben, was nicht geschehen ist.

Der zweite Artikel spricht von Einwürfen der Anhänger imaginärer Geometrie gegen Carton's Beweis, deren Discussion jedoch zu keinem klaren Ergebniss führt. Am Schluss findet sich die Notiz, dass Minarelli in den Ann. de Terquem 1849 einen ähnlichen Beweis aufgestellt hat. H.

Zweiter Abschnitt (Nachtrag).

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen.

C. JORDAN. Sur les équations de la géométrie. C. R. LXVIII. 656-659. 1869.

Die verschiedenen Lösungen geometrischer Probleme geben Beziehungen, welche eine Untersuchung der Gruppe der in Frage kommenden Gleichung möglich machen und umgekehrt: aus dem algebraischen Resultate können geometrische Eigenschaften abgeleitet werden. — Die merkwürdigsten Gleichungen dieser Art sind von „hyperelliptischem Typus"; sie sind vom Grade p^{2n} (p ist Primzahl); und wenn ihre Wurzeln $x_1, y_1, \dots x_n, y_n$ sind, so ist ihre Gruppe durch die Substitutionen

$$\left|\begin{array}{l} x_1,\ a'_1 x_1 + c'_1 y_1 + \cdots + a'_n x_n + c'_n y_n \\ y_1,\ b'_1 x_1 + d'_1 y_1 + \cdots + b'_n x_n + d'_n y_n \\ \cdots\cdots \end{array}\right|$$

gebildet, wobei

$$\sum_\mu a_\mu^{(r)} d_\mu^{(r)} - b_\mu^{(r)} c_\mu^{(r)} \equiv 1,\ \sum_\mu a_\mu^{(r)} d_\mu^{(s)} - b_\mu^{(s)} c_\mu^{(r)} \equiv 0,\ \sum_\mu a_\mu^{(r)} c_\mu^{(s)} - a_\mu^{(s)} c_\mu^{(r)} \equiv 0,$$

$$\sum_\mu b_\mu^{(r)} d_\mu^{(s)} - b_\mu^{(s)} d_\mu^{(r)} \equiv 0 \pmod p,$$

wie Hermite gezeigt hat. Am Schluss werden einige hierhergehörige Gleichungen besprochen. — Dieser, sowie der folgende Aufsatz steht in enger Beziehung zu dem Werke des Verfassers über Substitutionen und algebraische Gleichungen, auf welches wir erst im nächsten Jahrgange ausführlich werden eingehen können. No.

C. JORDAN. Théorèmes sur les équations algébriques. C. R. LXVIII. 257-258 1869.

Die Ordnung einer Gleichung ist die Anzahl der Substitutionen der Gruppe. Die Lösung zusammengesetzter Gleichungen kann auf diejenige einer Reihe einfacher zurückgeführt werden; die Ordnung der ersten ist gleich dem Produkt der Ordnungen der letzteren. Diese „Faktoren der Zusammensetzungen" können in verschiedener Aufeinanderfolge auftreten, sind aber stets dieselben. Der Gleichung $F(x)=0$ sind diejenigen irreductiblen Gleichungen $\varphi_{\mu\nu}=0$ „subordinirt", durch welche x_ν als Funktion von x_μ bestimmt wird; jeder Faktor der Zusammensetzung von $\varphi_{\mu,\nu}$ muss dann Theiler eines der Faktoren der Zusammensetzung von $\varphi_{\mu',\nu'}$ sein. No.

C. JORDAN. Théorèmes sur les équations algébriques. Liouville J. (2) XIV. 139-146. 1869.

Diese Theoreme finden sich am Schlusse des ersten Capitels vom 3. Buche in dem Werke des Herrn Verfassers über Substitutionen und Gleichungen. Bei der Besprechung dieser Schrift werden wir die Grundzüge auch dieses Theiles derselben geben.
No.

C. JORDAN. Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. C. R. LXVIII. 865-869. 1869.

C. JORDAN. Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre. C. R. LXX. 326-328. 1870.

C. JORDAN. Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré. Liouville J. (2) XIV. 147-166. 1869.

Hermite hat aus der Erniedrigung der Modulargleichungen für die Transformation 5ten, 7ten, 11ten Grades bemerkenswerthe Resultate gezogen, und Clebsch und Gordan haben eine ähnliche Erniedrigung für die Perioden-Gleichungen nachgewiesen, von denen die Zweitheilung der Abel'schen Funktionen abhängt.

Aehnliches wird hier durchgeführt für die Gleichung, welche die Dreitheilung der Abel'schen Funktionen giebt. Diese Gleichung ist vom 80ten Grade und lässt sich höchstens auf eine Gleichung vom 27ten Grade zurückführen, identisch mit der für die 27 Geraden der Fläche dritten Grades. In der zweiten Arbeit untersucht der Verfasser umgekehrt, welches ist die Combination der 27 Geraden, die, als unbekannt angesehen, von einer der Theilungsgleichung der Abel'schen Funktionen analogen Gleichung abhängt. In der dritten Arbeit ist der Beweis für die Unmöglichkeit der Reduktion der Gleichung 27ten Grades auf eine niedere vollständig durchgeführt. Alle hierher gehörigen Untersuchungen sind übrigens jetzt im Zusammenhange dargestellt in des Verfassers „Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870" (Livre III. Ch. III. § 5 und Ch. IV. § 3).

M.

L. KRONECKER. Sur le théorème de Sturm. C. R. LXVIII. 1078-1082. 1869.

Ist $F(x)=0$ vom n^{ten} Grade mit den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$; $F_1(x)$ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade; $F_2(x) \ldots F_n(x)$ durch den Algorithmus $F_{h-1}=(A_h x+B_h)F_h-F_{h+1}$ abgeleitet, so besteht die charakteristische Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{\nu} F_h(x_k)}{F'(x_k) F_1(x_k)}=0, \quad (0 \leqq \nu < n-h)$$

und aus dieser folgt für ungleiche h und i,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_i(x_k) F_h(x_k)}{F'(x_k) F_1(x_k)}=0.$$

Sind $Z_1, \ldots Z_n$ Veränderliche und setzt man $Z_k=\sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu F_\nu(x_k)$, so wird

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k^2}{F'(x_k) F_1(x_k)}=\sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{F_\nu(x_k) F_\nu(x_k)}{F'(x_k) . F_1(x_k)}=\sum_{\nu=1}^{n} \frac{Z_\nu^2}{A_\nu}.$$

Auf diese Gleichung wird die Methode Hermite's angewendet und das Resultat auf Grund einer Arbeit Kronecker's in den Berl. Monatsber. 1869 März (s. p. 203 u. f.), einer geometrischen Deutung unterzogen. Dasselbe Resultat liefert für $F_1=F'$ eine Beziehung zwischen der Zahl der reellen Wurzeln von F und den Zeichen der A_r.

No.

F. Brioschi. Sur les fonctions de Sturm. C. R. LXVIII. 1318-1321. 1869.

Anknüpfend an eine frühere Note in den Nouv. Ann. 1856 XV. leitet der Verfasser die eben besprochenen Resultate auf anderem Wege her. Bezeichnen wir $A_h x + B_h$ mit $Q_h(x)$, ferner die Nenner der Näherungswerthe von $\cfrac{1}{Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cdot_\cdot}}$ mit $D_1(x)$, $D_2(x) \ldots$, so ist $\sum_m D_s(x_m) \frac{F_1(x_m)}{F'(x_m)} = 0$, $\sum_m D_s(x_m) D_r(x_m) \frac{F_1(x_m)}{F'(x_m)} = 0$, $\sum_m \frac{F_1(x_m)}{F'(x_m)} = \frac{1}{A_1}$, $\sum_m D_s(x_m) \frac{F_1(x_m)}{F'(x_m)} = \frac{1}{A_{s+1}}$; ausserdem ist $F_{s+1}(x_m) = F_1(x_m) D_s(x_m)$, und hieraus folgen die oben abgeleiteten Gleichungen. No.

Parpaite. Note sur la règle des signes de Descartes. Nouv. Ann. (2) VIII. 269-272. 1869.

Eine Gleichung hat wenigstens $2n$ complexe Wurzeln: 1) wenn zwischen 2 Gliedern $2n$ ausgefallen sind; 2) wenn zwischen 2 Gliedern von entgegengesetzten Zeichen $2n+1$ ausgefallen sind; 3) wenn zwischen 2 Gliedern von demselben Zeichen $2n-1$ ausgefallen sind. No.

Le Besgue. Sur l'équation du 3. degré. Nouv. Ann. (2) IX. 529-530. 1870.

Wenn $a^2(p^2-3q) + a(pq-qr) + q^2-3pr = 0$ ist, so wird $x^3+px^2+qx+r=0$ für

$$3x+p = \sqrt[3]{(p^2-3q)(3a+p)} - \frac{p^2-3q}{\sqrt[3]{(p^2-3q)(3a+p)}}.$$ No.

Laguerre. Sur l'équation du troisième degré. Nouv. Ann. (2) IX. 342-347. 1870.

Bezeichnen $F(x)$ und $f(x)$ Polynome, welche in Beziehung auf x vom 3ten Grade sind, bezeichnet y eine beliebige Grösse und ist ferner $V=0$ die Discriminante der Gleichung: $F(x) + y \cdot f(x) = 0$, dann kann man stets (und zwar auf 4 Weisen) die

Gleichung $F(x)+y.f(x)=0$ mit Hülfe von drei der Wurzeln a, b, c, d der Gleichung $V=0$ in eine irrationale Form:

$$A\sqrt{\frac{y-a}{x-\alpha}}+B\sqrt{\frac{y-b}{x-\beta}}+C\sqrt{\frac{y-c}{x-\gamma}}=0$$

setzen. Betrachtet man x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, der sich in der Ebene bewegt, dann repräsentirt die Gleichung $A\sqrt{\frac{y-a}{x-\alpha}}+\cdots$ etc. $=0$ eine Curve, welche gleichzeitig die Curve $F(x)+y.f(x)=0$ und eine gleichseitige Hyperbel darstellt, deren Asymptoten Parallele zu den Coordinatenaxen sind. Ist die Gleichung $A\sqrt{\frac{y-a}{x-\alpha}}+\cdots=0$ gegeben, dann kann man stets eine Relation unter den Coefficienten der Gleichung angeben, so dass die durch die Gleichung dargestellte Curve in eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten parallel den Coordinatenaxen laufen, und in eine andere Curve zerfällt, deren Gleichung die Form $F(x)+y.f(x)=0$ hat. Diese Betrachtungen lassen sich auch auf Gleichungen ausdehnen, deren Grad höher als der dritte ist. T.

E. Catalan. Note sur l'article de M. Alexandre. Nouv. Ann. (2) IX. 379-380. 1870.

Die Resultate des Herrn Alexandre sind bereits in einem Briefe des Herrn Le Besgue vom 22. Februar 1838 enthalten.

M.

A. Roger. Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré. Nouv. Ann. (2) IX. 293-302. 1870.

Die Gleichung dritten Grades: $x^3+px^2+qx+r=0$ gestattet eine unmittelbare Auflösung, wenn die Bedingung $p^2-3q=0$ erfüllt ist. Um die Gleichung nun auch für den Fall aufzulösen, dass $p^2 \gtrless 3q$ ist, wird sie durch die Substitution $x=y+h$ in eine solche umgewandelt, welche in Beziehung auf $\frac{1}{y}$ als Wurzel der Bedingung $p^2-3q=0$ genügt, so dass diese neue also in Be-

ziehung auf $\frac{1}{y}$ zu lösen ist. Die Bedingungsgleichung liefert den bestimmten Werth für h, so dass also nun auch x bekannt ist. In den speciellen Fällen, dass einer der Coefficienten der Bedingungsgleichung für h verschwindet, werden die Resultate einfacher; einen dieser Fälle, nämlich $qr-pq=0$, kann man aber doch noch zur allgemeinen Lösung einer Gleichung dritten Grades benutzen. Denn ist in der ursprünglichen Gleichung die Bedingung $qr-pq$ nicht erfüllt, dann kann man sie stets durch Substitution in eine andere umformen, welche dieser Bedingung genügt. Die Annahme, dass in der ursprünglichen Gleichung $p=0$ sei, führt zur Cardani'schen Formel. (Litt.: Nouv. Ann. (2) V. 358 u. 527. Serret. Cours d'algèbre supérieure. 3. Ausg. I. n. 57 f. n. 63 n. 183 n. 191). T.

Darboux. Sur la méthode d'approximation de Newton; Note de Gerono. Nouv. Ann. (2) VIII. 17-27. 1869.

Nachweis, auf welche der beiden Grenz-Näherungswerthe einer Wurzel die Newton'sche Formel anzuwenden sei. In der Note ein numerisches Beispiel. No.

H. Montucci. Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinomes. C. R. LXX. 445-446. 1870.

Der Verfasser hatte eine Notiz über trinomische Gleichungen veröffentlicht, ohne die Gauss'sche Arbeit gekannt zu haben. Wir wiesen (S. 48) darauf hin. Hier folgt die Angabe, dass Verfasser von dem Gauss'schen Aufsatze Kenntniss genommen habe. No.

Hermann. Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendentes. Nouv. Ann. (2) IX. 180. 1870.

Cauchy hat zur numerischen Berechnung der kleinsten positiven Wurzel einer algebraischen Gleichung eine wichtige Näherungsformel gegeben, welche im Zusammenhange mit einigen Sätzen über Elimination vom Verfasser entwickelt, und deren

Anwendung von ihm Eliminationsmethode der Intervalle genannt wird. Ist nämlich $f(x)=0$ eine gegebene Gleichung, so wird sie geschrieben:

$$\varphi(x)-\psi(x)=0,$$

wo $\varphi(x)$ alle positiven, $\psi(x)$ alle negativen Glieder umfasst. Sind nun $f(a)$, $f(b)$ von gleichem Vorzeichen, z. B. positiv, und ist es ebenso mit $\varphi(a)-\psi(b)$, so hat die Gleichung keine Wurzel zwischen a und b. Diese Bemerkung reicht zur numerischen Auflösung von algebraischen Gleichungen hin, und kann auch mit einer gewissen Modifikation, die der Verfasser angiebt, zur numerischen Auflösung transcendenter Gleichungen angewandt werden.

Weiterhin zeigt der Verfasser, dass, wenn $f(a)$ und $f(b)$ gleiche Vorzeichen haben, und dieses Vorzeichen dasselbe ist, wie dasjenige einer der drei Funktionen:

$$\varphi(a)-\psi(b),\ \varphi'(a)-\psi'(b),\ \psi'(a)-\varphi'(b),$$

die Gleichung $f(x)=0$ keine Wurzel zwischen a und b hat. Ist aber das Vorzeichen jeder dieser drei Funktionen von $f(a)$ und $f(b)$ verschieden, so hat die Gleichung keine Wurzel zwischen

$$a+\frac{f(a)}{\psi'(b)-\varphi'(a)} \text{ und } b-\frac{f(b)}{\varphi'(b)-\psi'(a)}.$$

Diese Bemerkungen sind auf zwei numerische Gleichungen angewandt. Mz.

G. Darboux. Discussion de la fraction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x^2+c'}$. Nouv. Ann. (2) VIII. 81-86. 1869

Die Werthe dieses Ausdrucks werden in den 3 Fällen, wo $(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')<0, =0, >0$ betrachtet, was auf bekannte geometrische Sätze führt. M.

E. Pellet. Solution d'une question (869). Nouv. Ann. (2) IX. 420-422. 1870.

Ist $f_m(x)=1+\left(\frac{m}{1}\right)^2 x+\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2 x^2+\cdots+x^m$, so haben $f_1(x)=0, f_2(x)=0, \ldots f_m(x)=0$ reelle und verschiedene Wurzeln, und die Wurzeln von $f_m(x)=0$ liegen einzeln zwischen den einzelnen Wurzeln von $f_{m+1}(x)=0$. M.

E. Pellet. Solution d'une question (890). Nouv. Ann. (2) IX. 329-330. 1870.

Die Gleichungen $n(n+1)X_n^2-(1-x^2)X_n'^2=0$, in der X_n das Legendre'sche Polynom bezeichnet, hat nur reelle, ungleiche, zwischen $+1$ und -1 liegende Wurzeln. M.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, Invarianten, Covarianten und symmetrische Funktionen.

C. Jordan. Traité des substitutions algébriques. Paris 1870.

Das Referat folgt wegen verspäteten Eintreffens im nächsten Bande. Red.

R. Radau. Sur la résultante de 3 formes quadratiques ternaires. Nouv. Ann. (2) VIII. 358-362. 1869. C. R. LXVIII. 327-329. 1869.

Es sei $\Sigma\pm a_1 b_2 c_3=(a,b,c)$. Ist gegeben $a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2+f_1yz+g_1zx+h_1xy$; $a_2x^2+\cdots$; $a_3x^2+\cdots$ und bildet man (a,b,h) $(a, by+hx+fz, cz+gx)-(a,b,g)(a,b,hxy+fyz+\cdots)-(a,h,g)$ $(h,a,by^2+fyz+\cdots)$, so ist diese quadratische Form durch z theilbar. Bildet man die ähnlichen Ausdrücke, dividirt durch z, y, x bez., so erhält man die Resultante der obigen 3 Formen als 3zeilige Determinante. Diese ist $(P+\Delta.p, Q+\Delta.q, R+\Delta.r)$ für $\Delta=(a,b,h)$, wobei $(P,Q,R)=0$, $(pQR+qRP+rPQ)=\Delta^2(p,q,r)$ und $2\Delta(p,q,r)+(Pqr)+(Qrp)+(Rpq)=0$. No.

Abonné. Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants. Nouv. Ann. (2) VIII. 97. 1869.

Bekannte Determinantensätze nebst bekannten Anwendungen. No.

Gerono. Sur une application de la théorie des déterminants. Nouv. Ann. (2) IX. 392-398. 1870.

Mit Hülfe der Determinantensätze wird die rechtwinklige

Coordinaten-Transformation ausgeführt, und eine geometrische Deutung der Formeln gegeben. No.

F. Lucas. Sur une formule d'analyse. C. R. LXX. 1167-1168. 1870.

Mittheilung folgenden Satzes ohne Beweis:

„Sind $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_N$ beliebige Grössen, bezeichnet man ferner ihre Summe mit S und für einen beliebigen Index m $A_m = S - a_m$, so ist die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} -A_1+x \cdots & a_2 & \cdots & a_m & \cdots & a_N \\ a_1 & \cdots -A_2+x & \cdots & a_m & \cdots & a_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & \cdots & a_2 & \cdots -A_m+x & \cdots & a_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & \cdots & a_2 & \cdots & a_m & \cdots -A_N+x \end{vmatrix} = x(x-S)^{N-1}\text{“}.$$

O.

Dritter Abschnitt (Nachtrag).
Zahlentheorie.

Capitel 1.
Allgemeines.

André. Solution des questions 912 et 913 nebst einer Note von Gerono. Nouv. Ann. (2) VIII. 78-81. 1869.

2 Beweise des Satzes: „Entsprechen sich die Glieder zweier Reihen von n ganzen Zahlen a und b der Art, dass

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \cdots = a_n b_n = P,$$

so ist, wenn D_a, D_b resp. den grössten Theiler, M_a, M_b resp. das kleinste gemeinschaftliche Multiplum der n Zahlen der betreffenden Reihen bezeichnen,

$$M_a . D_b = M_b . D_a = P.$$ O.

J. Liouville. Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5$ (mod. 12). Liouville J. (2) XIV. 7-8. 1869.

Siehe Abschnitt III. (Nachtrag) Cap. 2.

Laisant et Beaujeux. Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques. Nouv. Ann. (2) IX. 221, 271, 302. 354. 1870.

Sind $r_1, r_2, ..$ die Reste von A_q, $A_q^2, ..$ bei der Division mit D, so folgen die Gleichungen $\alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_p q^p = D . m$ und $\alpha_0 r_n + \alpha_1 r_{n+1} + \cdots + \alpha_p r_{n+p} = D . m'$ gegenseitig aus einander. Hieraus wird eine Reihe von Schlüssen gezogen. No.

E. Catalan. Note sur la partition des nombres. Nouv. Ann. (2) VIII. 407-414. 1869.

Behandlung des Theorems: auf wieviel Arten kann man aus q ganzen, gleichen oder ungleichen Zahlen eine Summe n bilden? No.

GERONO. Note sur une démonstration de Legendre. Nouv. Ann. (2) VIII. 454. 1869.

Der Legendre'sche Beweis des Satzes, dass jeder Theiler, von der Form x^2+1, zweier Quadrate, welche theilerfremd sind, gleichfalls die Summe zweier theilerfremden Quadrate sei, ist fehlerhaft. No.

E. SANCHIS BARRACHINA. Note sur les racines des nombres. Nouv. Ann. (2) VIII. 265. 1869.

Die m^{ten} Wurzeln aller ganzen Zahlen, welche $mn, mn-1, \dots mn-(m-1)$ Ziffern haben, von denen die nicht identischen Zahlen von rechts gerechnet nicht die $(n-1)(m-1)^{\text{te}}$ Stelle überschreiten, unterscheiden sich um weniger als 1. No.

PEPIN. Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationnels. Liouville. J. (2) XV. 217-237. 1870.

Bezeichnet man mit p und q zwei Primzahlen, deren Formen bezüglich $18m+5$, $18m+11$ sind, so ist es unmöglich, die Zahlen von den Formen p^m, q^m, $2p^{3m+1}$, $2q^{3m+2}$, $4p^{3m+2}$, $4q^{3m+1}$, $9p^{3m+1}$, $9q^{3m+1}$, $9p^{3m+2}$, $9q^{3m+2}$, $5p^{3m+2}$, $5q^{3m+1}$, $25p^{3m+1}$, $25q^{3m+2}$ als Summe zweier rationaler Cuben darzustellen; m ist ganz, positiv oder 0. Dagegen ist das Doppelte einer Triangularzahl stets als Summe zweier Cuben darstellbar. Wenn die Summe oder die Differenz zweier Zahlen ein Cubus ist, so ist ihr Produkt die algebraische Summe zweier rationaler Cuben. No.

LE BESGUE. Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive. C. R. LXX. 1243-1251. 1870.

Der Beweis stützt sich auf folgende Theoreme: „Jede Wurzel r der Congruenz $x^m \equiv a$, wo $m=n'$ oder ein Theiler von n' ist, und a zum Exponenten $n=\frac{p-1}{n'}$ gehört, hat eine Periode von $m.n$ Gliedern, wenn keiner der Reste von $r, r^2 \dots r^{m-1}$ sich in der Periode von a findet". — „Ist $b^{\mathfrak{F}} \doteq a^i$, wobei b nicht in der Periode von a enthalten ist, und $\mathfrak{F}$ die kleinste Zahl ist, welche

dieser Congruenz genügt, so wird $x^{\mathfrak{F}} \equiv a$ befriedigt durch $x \equiv a^t b^u$, $t < n$, $u < \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}t + iu - 1 = nv$. Sind u und $\mathfrak{F}$ theilerfremd, und nur dann, so gehören die Wurzeln zum Exponenten $n\mathfrak{F}$". — „Wenn (immer bei denselben Bezeichnungen) alle Primtheiler von m auch n theilen, so haben die m Wurzeln von $x^m \equiv a$ eine Periode von mn Gliedern; sind die Primtheiler $q, r, \ldots$ von m keine Theiler von n, so haben nur $m\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\ldots$ Wurzeln eine Periode von mn Gliedern". No.

J. Bourget. Sur la théorie des racines. Nouv. Ann. (2) IX. 505-513. 1870.

Beweis, dass die Tausender einer Wurzel von den 6 letzten Stellen der Zahl unabhängig sind, und ähnliches mehr. No.

J. Bourget. Note sur la racine carrée des nombres approchés. Nouv. Ann. (2) IX. 541-545. 1870.

Der Verfasser erinnert daran, dass im Allgemeinen die Quadratwurzel aus einer angenäherten Zahl auf eben so viele Stellen richtig sei, wie die Zahl selbst. M.

J. Liouville. Nouveau théorème concernant la fonction numérique $F(k)$. Liouville J. (2) XIV. 260-263. 1869.

Ist m eine ungrade Zahl, relativ prim zu 5, so hat man für alle Zahlen t, wofür $10m - 25t^2 > 0$, die Gleichung

$$F(10m) - 2\sum_t F(10m - 25t^2) = 2\zeta_1(m),$$

wo $F(k)$ die Anzahl der binären quadratischen Formen der Determinante $-k$, in denen wenigstens ein äusserer Coefficient ungrade ist, und $\zeta_1(m)$ die Summe der Divisoren von m bedeutet. M.

J. Liouville. Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n. Liouville J. (2) XIV. 263-264. 1869.

Ist $n = aq$ und q wieder durch a theilbar, so hat man

$$\zeta_\mu(aq) + a^\mu \zeta_\mu\left(\frac{q}{a}\right) = (a^\mu + 1)\zeta_\mu(q),$$

wo ζ_μ die Summe der μ^{ten} Potenzen der Divisoren von m bedeutet. Diese Formel ist von Bedeutung, da ζ_μ in dem Ausdruck für die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine Summe von 4 Quadraten erscheint. M.

J. LIOUVILLE. Théorème concernant la fonction numérique $\varrho_2(n)$. Liouville J. (2) XIV. 302-304. 1869.

Zerlegt man die ungrade Zahl n in irgend zwei Factoren $d.\delta$, so bedeutet $\varrho_2(n)$ die Summe $\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}.d^2$. Bedeutet m irgend eine Zahl von der Form $8k+7$, mit Ausnahme der Quadrate i^2 von ungraden Zahlen, so ist:

$$\sum_{i^2<m}(m-7i^2).\varrho_2\left(\frac{m-i^2}{2}\right)=0.$$

M.

E. PELLET. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire. C. R. LXX. 328-330. 1870.

Es sei i eine Wurzel einer irreductiblen Congruenz ν^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten, dann bestimmt der Verfasser die Anzahl der ganzen (nach einem Modul) irreductiblen Polynome, deren Coefficienten rationale Funktionen von i von bestimmtem Grade sind, und giebt Sätze über die Zerlegung eines nach einem Modul irreductiblen Polynoms mit reellen Coefficienten in irreductible Faktoren mit rationalen Coefficienten, ferner über die Zerlegung einer irreductiblen Funktion mit rationalen Coefficienten nach der Substitution x^λ für x, und über die Zerlegung der Funktion x^p-x-g, wo g eine rationale Funktion von i ist. M.

L. BIGNON. Solution d'une question (826). Nouv. Ann. (2) VIII. 415-417. 1869.

Ist n irgend eine ganze Zahl, so ist eine der Zahlen n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3 durch 12 theilbar, und der Quotient giebt die Zahl der verschiedenen Lösungen der unbestimmten Gleichung $x+y+z=n$ in ganzen, positiven, von Null verschiedenen Zahlen.

M.

A. Laisant. Solution d'une question (902). Nouv. Ann. (2) VIII. 315-317. 1869.

Beweis des Satzes: „Jeder vollständige Cubus, vermehrt um 3, 4, 5 oder 6 beliebige Potenzen von 10, ist kein vollständiger Cubus", mit Folgerungen. M.

S. Morel. Solution d'une question (914). Nouv. Ann. (2) VIII. 238-240. 1869.

Sind a und b relative Primzahlen, so enthält $ax+b$ nur relative Primzahlen zu m, wenn alle Primfactoren von m Theiler des a sind. Sind aber $p, q, r, \dots$ Primfactoren von m und nicht Theiler des a, so giebt es unter m auf einander folgenden Zahlen $ax+b$ $(x=\alpha, \alpha+1, \dots \alpha+m-1)$ genau $m\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{q}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right)\dots$ relative Primzahlen zu m. M.

V. Schlegel. Solution d'une question (889). Nouv. Ann. (2) VIII. 91-93 1869.

Ueber die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Gleichung $x+y+z=N$ in ganzen positiven Zahlen. Hinzugefügt ist die Note eines Ungenannten über die verschiedenen Lösungen der allgemeinen Gleichung $x_1+x_2+\dots+x_m=N$. M.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

J. Liouville. Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5$ (mod. 12). Liouville J. (2) XIV. 7-8. 1869.

$\sum_i F\left(\frac{2m-i^2}{3}\right)=\frac{1}{4}\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d$, wenn $m=d\delta\equiv 5$ (mod. 12) und i über die ungraden Zahlen sich erstreckt, welche $\sqrt{2m}$ und zu 3 theilerfremd sind, wenn $F(k)$ die Klassenanzahl quadratischer binärer Formen von der Determinante $-k$ bezeichnet. No.

J. LIOUVILLE. Sur la forme ternaire $x^2+2y^2+3z^2$. Liouville J. (2) XIV. 359-360. 1869.

Die Anzahl der Darstellungen von $m=6\mu\pm1$ unter der angegebenen Form ist $=F(6m)$, wobei F die oben angegebene Bedeutung hat. No.

J. LIOUVILLE. Extrait d'une lettre adressée à M. Le Besge. Liouville J. (2) XIV. 1-6. 1869.

$\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}iF(4m-i^2)=\sum_{a,b}(a^2-4b^2)$; wenn m auf alle möglichen Arten in a^2+4b^2 zerlegt wird, wobei a ungrade und positiv ist, b grade positiv, null oder negativ; und i alle ungraden Zahlen $\sqrt{4m}$ durchläuft. No.

J. LIOUVILLE. Extrait d'une lettre adressée à M. Le Besge. Liouville J. (2) XV. 298-302. 1870.

Siehe Abschnitt VI. Cap. 4 (Nachtrag).

N. DE KHANIKOF. Procédé pour résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée $A+Bt^2=u^2$. C. R. LXIX. 185-188. 1869.

Einfache Methode zur praktischen Lösung obiger Gleichung, gegründet auf einige Eigenschaften der beiden letzten Stellen von Quadraten. No.

GERONO. Sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m=y^n+1$. Nouv. Ann. (2) IX. 469-471. 1870.

Wenn x Primzahl ist, sind nur die Lösungen $x=3, m=2$; $y=2$, $n=3$ möglich. No.

LE BESGUE. Note sur quelques équations indéterminées. Nouv. Ann. (2) VIII. 452. 1869.

Manche Gleichungen, wie $x^2+y^2=(4a+3)z$; $x^2=y^3+7$; $x^3\pm y^3=9z+r\,(r=3,4,5,6)$ lassen sich auf die Form $mt+r=mu+r'\,(r\gtrless r')$ bringen, können also nicht in ganzen Zahlen aufgelöst werden. An diesen Aufsatz schliesst sich an:

J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à M. Le Besge.
Liouv. J. XV. 133-136. 1870.

$$\sum(-1)^{s+\frac{i^2-1}{8}}\mathfrak{F}(\varpi)=\sum(-1)^{s_1}\mathfrak{F}(\varpi_1),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine beliebige algebraische oder numerische Funktion ist und s, i, s_1, i_1 den Gleichungen $4m+1=i^2+\varpi^2+16s^2$; $4m+1=i^2+\varpi_1^2+8s_1^2$ genügen, in denen i ungrade und positiv, ϖ grade, positiv, null oder negativ und s willkürlich sein kann. No.

Vierter Abschnitt (Nachtrag).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

J. A. Serret. Sur un problème de calcul intégral. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 177-185. 1869. C. R. LXVIII. 1132-37. 1869.

Herr Crofton hat der Pariser Akademie (C. R. LXV. p. 994) folgenden Satz mitgetheilt:

„Eine Fläche Ω werde von einer convexen Grenzlinie von beliebiger Gestalt und der totalen Länge L umschlossen; nennt man ϑ den Winkel, welchen die beiden von einem äusseren Punkte (x, y) an diese Grenzlinie gezogenen Tangenten mit einander bilden, so ist

$$\iint(\vartheta - \sin\vartheta)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi\Omega,$$

wenn das Doppelintegral über die ganze Ebene ausserhalb der Grenzlinie erstreckt wird". S. Fortschr. d. M. I. 75.

x und y bedeuten hier rechtwinklige Coordinaten.

Von diesem Satze, auf welchen Crofton Betrachtungen, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen sind, geführt haben, giebt der Verfasser einen analytischen Beweis, nachdem er zuvor angemerkt, dass die Formel bestehen bleibt, wenn die Grenzlinie, statt eine continuirliche Curve zu sein, aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist, die einen beliebigen Winkel mit einander bilden, wofern man alsdann unter ϑ denjenigen Winkel versteht, unter welchem die Grenzlinie L vom Punkte (x, y) aus erscheint. Es genügt offenbar, um diese Formel in ihrer ganzen Allgemeinheit abzuleiten, die Beschränkung auf den Fall, dass der Umfang L ein geradliniges convexes Polygon von beliebig vielen Seiten ist. Der für diesen Fall geführte Be-

weis, so elegant er übrigens ist, lässt sich in Kürze nicht wiedergeben. Es sei nur angedeutet, dass das Integral der Art in Theilintegrale zerlegt wird, dass ein solcher Theil sich über alle die Punkte (x, y) ausserhalb L erstreckt, deren äusserste Gesichtslinien durch dieselben zwei Ecken des Polygons hindurch gehen, und darauf die allen möglichen Combinationen der vorhandenen Eckpunkte zu je zweien entsprechenden Theilintegrale summirt werden. Statt der Coordinaten x, y werden die Winkel α, β als Variable eingeführt, welche die vom Coordinatenursprung — der im Innern von L angenommen ist — auf die beiden äussersten Gesichtslinien des Punktes (x, y) gefällten Senkrechten mit der positiven Abscissenachse bilden. Im zweiten Theil des Mémoire wird in ähnlicher Weise ein anderer ebenfalls von Crofton aufgestellter Satz abgeleitet, des Inhalts, dass, wenn in einer eine Fläche Ω umschliessenden convexen Grenzlinie C eine Sehne, p die Distanz dieser Sehne von einem festen Punkt O, ϑ den Winkel zwischen der Geraden p und einer festen Geraden OX bedeutet, die Formel gilt:

$$\iint C^3\, dp\, d\vartheta = 3\,\Omega^2,$$

wo die Integration sich auf alle Werthe von p und ϑ erstreckt, welche eine reelle Sehne C geben. Hr.

W. CROFTON. Sur quelques théorèmes de calcul intégral. C. R. LXVIII. 1469-1470. 1869.

Siehe Abschnitt VI. Cap. 3 (Nachtrag).

A. G. MELON. Sur les combinaisons complètes. Nouv. Ann. (2) VIII. 168. 1869.

Ein bekannter Satz weitläufig abgeleitet. No.

DE ST. GERMAIN. Lettre à M. Bourget sur un article des Nouvelles Annales. Nouv. Ann. (2) IX. 84-85. 1870.

Kurzer Beweis des von Melon (VIII. 1869) bewiesenen Satzes aus der Combinationslehre. M.

Fünfter Abschnitt (Nachtrag).

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

E. Lemoine. Note sur une question d'arithmétique. Nouv. Ann. (2) IX. 368-369. 1870.

Es wird bewiesen, dass die μ^{te} Potenz einer ganzen Zahl l als Summe von l^k auf einander folgenden Gliedern der Reihe der ungraden Zahlen dargestellt werden kann, wenn μ, l, k ganze positive Zahlen sind und $\mu \geqq 2k$ ist. Der allgemeine Satz wird dann beispielsweise auf $\mu = 2k$ und $\mu = 5$, $k = 2$ angewandt. T.

E. Catalan. Note sur le théorème de M. Lemoine (Nouv. Ann. (2) VIII. 266). Nouv. Ann. (2) IX. 90-91. 1870.

Das von Doucet bewiesene Theorem ist enthalten in einem von Herrn Catalan bereits 1841 gefundenen, aber nicht veröffentlichten Satze, der wieder ein specieller Fall der Bertrand'schen Regeln für die Convergenz ist (vgl. Bertrand's Mémoire, Liouville J. VII. und Catalan, traité élém. des séries p. 17). M.

P. Doucet. Note sur un caractère de convergence des séries. Nouv. Ann. (2) VIII. 266-269. 1869.

Es wird mit Hülfe eines bekannten Gauss'schen Satzes der aus Laurents Algebra (S. 229) citirte Satz bewiesen, dass die Reihe

$$u_0^{-1} + u_1^{-1} + u_2^{-1} + \cdots$$

convergirt, wenn die Grösse $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ constant ist oder wächst. Wy.

Ch. Brisse. Démonstration d'un théorème de Gauss relatif aux séries. Nouv. Ann. (2) IX. 36-37. 1870.

Beweis des bekannten Gauss'schen Satzes über die Convergenz der Reihen, deren Vermehrungsfactor eine gebrochene algebraische Funktion der Gliednummer ist. Wy.

Ungenannter. Note relative à quelques cas de convergence ou divergence des séries. Nouv. Ann. (2) IX. 107-113. 1870.

Beweis eines besonderen Falls desselben Gauss'schen Satzes. Wy.

E. Catalan. Sur quelques développements en séries. Nouv. Ann. (2) IX. 199-202. 1870.

Beweis und Anwendung der für

$$F(x)=aF(bx)+a\varphi(x)$$

geltenden Reihen

$$\varphi(x)+a\varphi(bx)+a^2\varphi(b^2x)+\cdots=\frac{F(x)-\lambda}{a},$$

$$\varphi(x)+\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\varphi\left(\frac{x}{b^2}\right)+\cdots=\frac{\mu-F(bx)}{a};$$

auf Kreisfunktionen, wenn

$$\lambda=\lim.\, a^n F(b^n x),$$

$$\mu=\lim.\,\frac{F\left(\frac{x}{b^n}\right)}{a^n}$$

bedeutet. Wy.

Bailland. Note sur les séries de termes positifs. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 185-202. 1869.

Reproduction bekannter Sätze. Wy.

A. Genocchi. Sur la théorie élémentaire des produits infinis. Nouv. Ann. (2) VIII. 121-133. 1869.

Der Verfasser giebt eine elementare Herleitung der allgemeinen Sätze über Convergenz unendlicher Produkte nach dem von Weierstrass (Crelle J. LI. 18-33) angegebenen Verfahren.

Er legt die von Nicole (Nouv. Ann. (2) VI) gefundene Identität:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+v_0}+\frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)}+\cdots+\frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)(a-b)}$$

zu Grunde, welche sich durch die Substitution $\frac{b-a}{a+v_n}=u_n$ in folgende umwandeln lässt:

$$\prod_{\nu=0\ldots n}(1+u_\nu)=1+u_0+(1+u_0)u_1+(1+u_0)(1+u_1)u_2+\cdots$$
$$+(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})u_n.$$

Die Reihe rechts wird für reelle, imaginäre und complexe u_n untersucht. M.

F. Didon. Sur certains systèmes de polynomes associés. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 111-127. 1869.

Es seien $U_{0,\lambda}\ U_{1,\lambda}\ U_{2,\lambda}\ldots U_{\mu,\lambda}$ Polynome von den resp. Graden $0, 1, 2, 3 \ldots \mu$, so werden die Polynome der Reihe:

$$V_{0,\lambda}\ V_{1,\lambda}\ V_{2,\lambda}\ldots V_{\mu,\lambda}$$

den ersteren zugeordnet (associés) genannt, wenn für $\mu \lesseqgtr \nu$ $\int_0^1 U_{\mu,\lambda} V_{\nu,\lambda}\,dx=0$ ist.

Die verschiedenen Werthe des Index λ bezeichnen verschiedene Arten der Zuordnung, die wir der Kürze wegen folgendermassen zusammenfassen:

Es werde $U_{\mu,\lambda}$ durch die μ Bedingungen definirt:

$$\int_0^1 U_{\mu,\lambda}dx=0, \int_0^1 U_{\mu,\lambda}x^\lambda dx=0, \int_0^1 U_{\mu,\lambda}x^{2\lambda}dx=0 \ldots \int_0^1 U_{\mu,\lambda}x^{(\mu-1)\lambda}dx=0,$$

dann ergiebt sich für $U_{\mu,\lambda}$ bis auf einen constanten Faktor:

$$U_{\mu,\lambda}=\sum_{i=0}^{i=\mu}(-1)^i\frac{(i+1)(i+\lambda+1)(i+2\lambda+1)\ldots(i+(\mu-1)\lambda+1)}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots\mu-i}x^i.$$

Die zugeordneten Polynome $V_{\mu,\lambda}$ erhält man dann, wenn man setzt:

$$V_{\mu,\lambda}=\frac{d^\mu(x^\mu(x^\lambda-1)^\mu)}{dx^\mu}.$$

Für $\lambda=1$ erhält man

$$V_{\mu,\lambda}=A_\mu U_{\mu,\lambda}=\frac{d^\mu(x^\mu(x-1)^\mu)}{dx^\mu},$$

eine Funktion, welche in die Legendre'sche X_μ übergeht, wenn x durch $\frac{1+x}{2}$ ersetzt wird.

Die $U_{\mu,k}$ haben folgende Eigenschaften:

1) Die Wurzeln der Gleichung $U_{\mu,\lambda}=0$ (desgl. von $V_{\mu,\lambda}=0$) sind sämmtlich reell und liegen zwischen 0 und 1.

2) In der Entwickelung von $U_{\mu,\lambda}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$ nach fallenden Potenzen von x fehlen die mit

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^{\lambda+1}},\ \frac{1}{x^{2\lambda+1}},\cdots\frac{1}{x^{(\mu-1)\lambda+1}}$$

behafteten Glieder.

Dies ist eine unmittelbare Folge aus obigen Bedingungsgleichungen für $U_{\mu,\lambda}$.

Hieraus ergiebt sich dann, wenn der Kürze wegen $\varphi(x)$ für $U_{\mu,\lambda}$ gesetzt wird:

$$3)\qquad \varphi(x)\log\left(1-\frac{1}{x}\right)+\alpha\varphi(\alpha x)\log\left(1-\frac{1}{\alpha x}\right)\cdots+$$
$$+\alpha^{\lambda-1}\varphi(\alpha^{\lambda-1}x)\log\left(1-\frac{1}{\alpha^{\lambda-1}x}\right)=P+\frac{K}{x^{\lambda\mu+1}}+\cdots,$$

wenn α eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit und P eine ganze Funktion von x bedeutet.

4) $U_{\mu,\lambda}$ (desgl. $V_{\mu,\lambda}$) genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung $\lambda+1^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine Verallgemeinerung der Differentialgleichung 2ter Ordnung für die hypergeometrische Reihe bildet. Aus dieser wird die Eigenschaft (2) von Neuem abgeleitet.

Als erzeugende Funktion für das System

$$U_{0,\lambda}\ U_{1,\lambda}\ U_{2,\lambda}\ U_{3,\lambda}\ldots \text{ oder für } \sum_{p=0}^{p=\infty} a^p\, U_{p,\lambda}$$

wird mit Hülfe der Lagrange'schen Reihe der Ausdruck $\frac{1}{a}\frac{dz}{dx}$ gefunden, wo z die Wurzel der Gleichung: $z=a-\frac{ax}{\sqrt[\lambda]{1-\lambda z}}$ bedeutet.

Für das System

$$V_{0,\lambda}\ V_{1,\lambda}\ V_{2,\lambda}\ldots$$

erhält man als erzeugende Funktion $\frac{dz}{dx}$, wo z der Gleichung $z=x+az(z^\lambda-1)$ genügt. Hr.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

G. Darboux. Sur la série de Laplace. C. R. LXVIII. 324. 1869.

Die von Laplace verallgemeinerte Lagrange'sche Reihe wird in eine übersichtliche Reihe gebracht und Convergenzbedingungen aufgestellt. Wy.

P. Tardy. Note sur une formule de Leibniz. Nouv. Ann. (2) VIII. 69-77. 1869.

Identisch mit der im 1ten Bande dieses Jahrbuchs p. 85 besprochenen Arbeit. Wy.

J. Bourget. Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin. Nouv. Ann. (2) IX. 537-540. 1870.

Nichts Neues. Wy.

E. Lucas. Note sur les coefficients du binôme de Newton. Nouv. Ann. (2) IX. 308-310. 1870.

Man weiss, dass für irgend eine Potenz des Binoms die Summe der Coefficienten der graden Stellen gleich der der Coefficienten der ungraden Stellen ist. Der Verfasser leitet für die Summen der Coefficienten der Stellen, von drei zu drei genommen, ähnliche Gesetze ab. M.

De Virieu. Solution d'une question (615). Nouv. Ann. (2) IX. 231-234. 1870.

Ueber die Produkte entsprechender Glieder in arithmetischen Reihen höherer Ordnung. M.

J. Chatelain und Moret-Blanc. Solutions de la question 951. Nouv. Ann. (2) VIII. 533-535. 1869 und IX. 89-90. 1870.

Beweis der Formel

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}+\text{ etc.}$$ M.

S. Réalis. Identités arithmétiques. Nouv. Ann. (2) IX. 546 bis 547. 1870.

I. Der Ausdruck

$f(k) = (2n+1)^k + T_1(2n-1)^k + T_2(2n-3)^k + \cdots + T_{n-1}\cdot 3^k + T_n \cdot 1^k$,

worin n eine positive ganze Zahl und T_i den Coefficienten von x^i in der Entwickelung von $(1-x)^{2n+1}$ bedeutet, ist $=0$, sobald k eine ungrade positive Zahl $\overline{\gtrless} 2n-1$; aber $=2^{2n}$, wenn $k=2n+1$.

II. Der Ausdruck

$$f(k) = n^k + T_1(n-1)^k + T_2(n-2)^k + \cdots + T_i(n-i)^k + \cdots + T_{n-3}\cdot 3^k + T_{n-2}\cdot 2^k + T_{n-1}\cdot 1^k,$$

worin n eine ganze Zahl >1, und T_i der Coefficient von x^i in der Entwickelung von $(1-x)^{2n}$, ist $=0$, wenn k eine grade Zahl zwischen 0 und $2n$; aber $=\frac{1}{2}$ für $k=2n$. M.

Ph. Gilbert. Sur la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. Nouv. Ann. (2) VIII. 434-437. 1869.

Es wird

$$\sigma_{n,p} = \mu^p + (\mu+\alpha)^p + (\mu+2\alpha)^p + \cdots + (\mu+n\alpha)^p,$$

wo n und p ganze Zahlen bedeuten, als Funktion von $\sigma_{n,p-2}$, $\sigma_{n,p-4}$ etc. ausgedrückt. M.

E. Pellet. Solution d'une question (853). Nouv. Ann. (2) IX. 417-419. 1870.

Es handelt sich um die Summe der Reihen $\Sigma\frac{\varphi(n)}{1.2.3\ldots n}$, wo φ ein Polynom p^{ten} Grades, und $\Sigma\frac{\varphi(n)}{f(n)}$, wo

$$f(n) = (n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p)$$

und φ ein Polynom vom $(p-1)^{\text{ten}}$ Grade höchstens. M.

Désiré André. Solution d'une question (838). Nouv. Ann. (2) IX. 86-88. 1870.

Bezeichnet $p!q_0$ das Produkt von p auf einander folgenden Zahlen, deren erste $(a-1)p$ ist; ferner $p!q_1$ ein eben solches Produkt von Zahlen, deren erste $(a-1)p-a$; $p!q_2$ ein drittes

mit dem Anfangsgliede $(a-1)p-2a$ u. s. f., bis man null oder eine negative Zahl erhält, so ist

$$a^p-1=q_0-\frac{p}{1}q_1+\frac{p(p-1)}{2}q_2-\text{etc.}$$ M.

S. Réalis. Démonstration d'une formule de trigonométrie. Nouv. Ann. (2) IX. 12-20. 1870.

Neuer Beweis der von Euler (Nov. Comm. Petrop. VIII. 157) gegebenen Formel:

$$\lim_{n=\infty} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x},$$

mit Hülfe der Relation:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n}+\cos\frac{3x}{2^n}+\cdots+\cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right];$$

und Folgerungen. M.

E. Lucas. Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers. Nouv. Ann. (2) IX. 49-53. 1870.

Durch Gruppirung der n^2 Glieder in Zahlenquadraten, die eine Verallgemeinerung des Quadrates

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

sind, gewinnt der Verfasser einfache Relationen zwischen den Summen gleich hoher Potenzen. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass Horizontal- und Verticalreihen andere gesetzmässig fortschreitende Zahlenreihen sind. M.

Sechster Abschnitt (Nachtrag).
Differential- und Integral-Rechnung.

Capitel 1.
Allgemeines.

J. Bertrand. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris Gauthier-Villars. Calcul différentiel 1864. — Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies. 1870.

Die beiden ersten Theile des vorliegenden Werkes enthalten eine grosse Fülle und Mannigfaltigkeit des Stoffes und unterscheiden sich dadurch, sowie durch Reichhaltigkeit von Beispielen von den bekannten Werken über Differential- und Integralrechnung. Aber gerade diese Mannigfaltigkeit verbietet uns, das Einzelne einer wenn auch rein sachlichen Kritik zu unterwerfen. Wir verweisen desshalb auf die Kritiken von Stern in den Göttinger Gelehrten Anzeigen 1865, St. 18 und 1870, St. 42. Der dritte Band des Werkes wird die Differentialgleichungen behandeln. M.

Debacq. Théorie des infiniment petits. Mondes (2) XIX 487. XX. 77-86. 173-176. 368-373. 761-765. 1869.

Fortsetzung der Arbeiten, die im 1ten Bande der Fortschr. p. 94 angeführt worden sind. Sie enthalten weitere Reflexionen über die vom Herrn Verfasser gegebene Definition des unendlich Kleinen, Vertheidigungen gegen Angriffe, und zum Schluss eine Ableitung der bekannten Resultate über Funktionen, die für specielle Werthe die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Der letzte Artikel enthält ein Résumé über die Arbeiten des Verfassers mit einer Kritik der Duhamel'schen Differentialrechnung. O.

A. Genocchi. Sur le passage des différences aux différentielles. Nouv. Ann. (2) VIII. 385-388. 1869.

Die Beweise für den Satz

$$\lim. \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

wie sie sich in den bestempfohlenen Lehrbüchern der Differentialrechnung finden, scheinen dem Verfasser wenig befriedigend. Sein Beweis des Theorems, in welchem er behufs grösserer Allgemeinheit annimmt, dass die successiven Zuwachse von x die gleichen oder ungleichen Grössen h, h_1, h_2 etc. seien, ist folgender:

Es ergiebt sich unmittelbar durch die Definition der Δ und d

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

und hieraus durch Schluss von n auf $n+1$:

$$\Delta^n\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(\Delta^n y)}{dx}.$$

Es sei nun ε eine mit h verschwindende Grösse, dann ist durch Definition:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon,$$

und wenn

$$\frac{\Delta y}{h} = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

gesetzt wird:

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy_1}{dx} + \varepsilon_1, \quad \frac{\Delta y'}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon',$$

wo ε_1 und ε' ebenfalls mit h verschwindende Grössen sind.

Aber

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d(\Delta y)}{dx} = \frac{1}{h}\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\Delta y'}{h},$$

also

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon' + \varepsilon_1,$$

d. h.

$$\frac{\Delta^2 y}{hh_1} = \frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon' + \varepsilon_1,$$

und hieraus:

$$\lim. \frac{\Delta^2 y}{hh_1} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Durch Schluss von n auf $n+1$ wird dann die allgemeine Formel bewiesen:

$$\lim. \frac{\Delta^n y}{hh_1 \ldots h_{n-1}} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Hr.

F. Tisséerand. Sur un point du calcul des différences. C. R. LXX. 678. 1870.

Sind die Werthe von $f(x)$ für die aequidistanten Werthe von x, die in dem Ausdruck x_0+pw (p eine ganze positive oder negative Zahl) enthalten sind, bekannt, so handelt es sich darum, die Werthe der auf einander folgenden Derivirten und Integrale von $f(x)$ als Funktion der Differenzen $f^1, f^2 \dots$ zu bestimmen, für welche die Gleichungen gelten:

$$f^1\left(x_0+pw+\frac{w}{2}\right)=f(x_0+pw+w)-f(x_0+pw),$$

$$f^2\left(x_0+pw+\frac{w}{2}\right)=f^1\left(x_0+pw+\frac{w}{2}\right)-f^1\left(x_0+pw-\frac{w}{2}\right).$$

. . . .

Dieselben sind in gleicher Weise nach den negativen Indices der f hin fortzusetzen. Zür Lösung der gestellten Aufgabe werden ohne weitere Ableitung 3 Gruppen von Formeln mitgetheilt.

In den ersten beiden Gruppen sind die Integrale zwischen x_0 und x, in der letzten zwischen x_0 und $x+\frac{w}{2}$ genommen, und in dieser der Werth der Derivirten für das Argument $x+\frac{w}{2}$ angegeben. In allen 3 Gruppen lassen sich die Ausdrücke für die n^{ten} Integrale, aus denen für die n^{ten} Derivirten durch Vertauschung von n mit $-n$ ableiten. Endlich ergeben sich sowohl zwischen den numerischen Coefficienten in den Integralen als zwischen denen in den Derivirten gewisse die successive Berechnung erleichternde Relationen. Hr.

Capitel 2.

Differentialrechnung.

E. Lemoine et Gerono. Note sur la fonction $y=a^x-x$. Nouv. Ann. (2) VIII. 526-527. 1869.

Berichtigung einer Stelle in Serret's Traité de Calcul différentiel I. 55, betreffs der Wurzeln der Gleichung $a^x-x=0$. M.

E. Combescure. Sur quelques formes différentielles. C. R. LXX. 1164-1167. 1870.

Bestehen zwischen den Variablen $x_1\, x_2 \dots x_n$ die m Gleichungen:

$$f_1(x_1\, x_2 \dots x_n) = 0, \dots f_m(x_1\, x_2 \dots x_n) = 0,$$

wo $m \leqq n$, und ersetzt man dieselben durch:

$$0 = \varphi_p = f_1 + \vartheta_2^{(p)} f_2 + \vartheta_3^{(p)} f_3 + \dots + \vartheta_p^{(p)} f_p,\ p = 2, 3 \dots m,$$
$$0 = \varphi_1 = f_1,$$

wo die ϑ beliebige Funktionen bedeuten, so kann man die φ durch die Bedingung bestimmen, dass

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\varphi_r}{dx_i} \frac{d\varphi_s}{dx_i} = 0,$$

wenn $r \gtrless s$; man erhält alsdann, zur Bestimmung von $\vartheta_2^{(p)}, \vartheta_3^{(p)} \dots \vartheta_p^{(p)}$, $p-1$ in diesen Grössen lineare Gleichungen, wodurch die φ bestimmt sind. Setzt man nun

$$\psi_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi_k}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_k}{dx_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{d\varphi_k}{dx_n}\right)^2}}$$

und

$$F_\lambda = \mu_1^{(\lambda)} \psi_1 + \mu_2^{(\lambda)} \psi_2 + \dots + \mu_m^{(\lambda)} \psi_m,$$

wo die μ beliebige Funktionen sind, welche die Relationen:

$$(\mu_1^{(\lambda)})^2 + (\mu_2^{(\lambda)})^2 + \dots + (\mu_m^{(\lambda)})^2 = 1$$

erfüllen, so erhält man die allgemeinste Transformation der f in solche Funktionen F, dass

$$\sum_i \frac{dF_g}{dx_i} \frac{dF_h}{dx_i} = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem g und h verschieden oder gleich sind.

Dies wird auf die Bestimmung der Multiplikatoren λ in den Gleichungen der Dynamik angewandt. Man findet:

$$-\lambda_k = \sum_i X_i \frac{df_k}{dx_i} + \sum_{i,j} \frac{d^2 f_k}{dx_i dx_j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt},$$

wo $X_1 \dots X_n$ die Kraftcomponenten und $f_1(x_1 \dots x_n) = 0, \dots f_m(x_1 \dots x_n) = 0$ die Bedingungsgleichungen in der oben bezeichneten transformirten Gestalt darstellen. Hr.

Capitel 3.

Integralrechnung.

F. Didon. Sur une intégrale double. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 89-96. 1870.

Es handelt sich um den Werth des Doppelintegrals:

$$\iint(1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1}dx\,dy,$$

wo μ eine ganze positive Zahl, $a<1$, $b<1$, und die Integration sich auf alle Werthe von x und y erstreckt, welche der Bedingung $x^2+y^2\leqq 1$ genügen. Setzt man:

$$(1-2ax+a^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}=\sum a^n P_n(x),$$

wo λ eine positive ganze Zahl, so erhält man durch λmalige Differentiation von

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum a^n X_n(x)$$

die Beziehung:

$$P_n(x)=\frac{1}{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}\frac{d^\lambda X_{n+\lambda}(x)}{dx^\lambda}.$$

Es wird nun vermittelst bekannter Eigenschaften der Legendre'schen Funktionen $X_n(x)$ abgeleitet, dass

$$\iint P_n(x)\,P_{n'}(y)\,(1-x^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx\,dy=0,$$

ausser wenn $n=n'=2m$, und indem zugleich für diesen ausgeschlossenen Fall der Werth des Doppelintegrals ermittelt wird, erhält man:

$$\iint(1-2ax+a^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(1-2by+b^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx\,dy,$$

durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, welche summirt durch das bestimmte Integral

$$\frac{2\pi}{\alpha^{2\lambda+1}}\int_0^\alpha \alpha^{2\lambda}(1+\alpha^4)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,d\alpha$$

dargestellt werden kann, wo $\alpha=ab$.

Indem das nämliche Verfahren auf die Entwickelung:

$$-\log(1-2ax+a^2)=2\sum a^n R_n(x)$$

angewandt wird, aus welcher man durch λmaliges Differentiiren nach x die Beziehung:

$$Q_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots(\lambda-1).2^{\lambda-1}} \frac{d^\lambda R_{n+\lambda}(x)}{dx^\lambda}$$

erhält, wo $Q_n(x)$ den Coefficienten von a^n in der Entwickelung von $(1-2ax+a^2)^{-\lambda}$ bedeutet, ergiebt sich für das Doppelintegral

$$\iint(1-2ax+a^2)^{-\lambda}(1-2by+b^2)^{-\lambda}(1-x^2-y^2)^{\lambda-1}\,dx\,dy$$

eine Reihe, deren Summe gefunden wird:

$$= \frac{\pi}{1.2.3\ldots(\lambda-1)} \cdot \frac{d^{\lambda-1}U}{d\alpha^{\lambda-1}},$$

wo $\alpha = ab$, und U abgesehen vom Vorzeichen entweder gleich arctg α vermindert um die $\frac{\lambda-1}{2}$ ersten Glieder der Entwickelung von arctg α nach wachsenden Potenzen von $\sqrt{\alpha}$, oder gleich $\frac{1}{2}\log(1+\alpha)$ vermindert um die Hälfte der $\frac{\lambda}{2}-1$ ersten Glieder der Entwickelung von $\log(1+\alpha)$ nach wachsenden Potenzen von α, je nachdem λ ungrade oder grade ist. Hr.

Tissot. Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. J. de l'Éc. Pol. Cah. 43. 201-213. 1870.

Es handelt sich um die Integrale

$$\int e^x . \frac{F(x)}{\sqrt[n]{X}} dx,$$

in denen $F(x)$ und X ganze Funktionen vorstellen, oder $F(x)$ wenigstens rational ist: im Wesentlichen um zu ermitteln, wann sich dieselben in endlicher Form darstellen lassen, und den Werth der Integrale zu extrahiren. Wy.

J. A. Serret. Sur un problème de calcul intégral. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 177-185. 1869. — C. R. LXVIII. 1132-1134. 1869.

Siehe Abschnitt IV. (Nachtrag) p. 289.

W. Crofton. Sur quelques théorèmes de calcul intégral. C. R. LXVIII. 1469-1470. 1869.

Eine Fortsetzung der durch die Methoden der geometrischen Wahrscheinlichkeit gewonnenen Sätze über Doppelintegrale (s.

Fortschritte I. 75). „Zieht man in einer convexen, die Fläche Ω umschliessenden Curve eine Sehne und nennt p das von einem festen Punkte O auf C gefällte Loth und ϑ den Winkel, welchen p mit einer festen Geraden OX macht, so kann man C als Funktion von p und ϑ ansehen, und hat

$$\iint C^3\,dp\,d\vartheta = 3\Omega^2,$$

erstreckt über alle p und ϑ, welche eine reelle Sehne C geben". — Zu erwähnen ist noch der Satz: „Die mittlere Länge einer Sehne, welche man willkürlich in einer geschlossenen Curve L gezogen hat, ist $\frac{\pi\Omega}{L}$". M.

R. Hoppe. Corollaire au théorème de M. Crofton. C. R. LXX. 1394-1397. 1870.

Aus Serret's analytischem Beweise des Crofton'schen Theorems:

$$\iint(\vartheta - \sin\vartheta)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi\Omega$$

(s. Fortschr. I. 75, II. 289 und Ann. de l'Ec. Norm. VI. 177), lassen sich 3 ähnliche besondere Theoreme gleichzeitig herleiten, da das Integral in 3 irreductible Theile: eine Summe von Polygonen $\left(=\frac{1}{2}L^2\right)$, eine Summe von Kreissectoren $(=-\pi\Omega)$ und eine Summe von Produkten aus einem Logarithmus und einem Polygone $(=0)$ zerfällt. M.

F. Didon. Développements sur certaines séries de polynomes à un nombre quelconque de variables. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 247-268. 1870.

Wird das Polynom $P_{m,n}$ definirt als:

$$P_{m,n} = k_{m,n}\frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d^n(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}\cdot\frac{d^m(x^2+y^2-1)^m}{dx^m},$$

worin $k_{m,n}$ eine Constante bezeichnet, so betrachtet der Verfasser das Doppelintegral

$$\iint P_{m,n}\,P_{m',n'}\,dx\,dy,$$

erstreckt über alle Punkte innerhalb des Kreises $x^2+y^2=1$. Diese Funktionen $P_{m,n}$, die das Doppelintegral unter der Be-

dingung, dass $(m-m')^2+(n-n')^2$ von Null verschieden ist, verschwinden machen, haben die grösste Analogie mit den Kugelfunktionen; jede beliebige Funktion zweier Variabeln kann durch sie annähernd ausgedrückt werden. Ferner untersucht der Verfasser eine Reihe von Polynomen $P_{m,n}$, welche der allgemeineren Gleichung

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} f(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

mit der Bedingung, dass nicht zugleich $m=m'$, $n=n'$ ist, genügen. Die Integration kann hier innerhalb irgend eines Bereiches gemacht werden. Solche Funktionen hängen zusammen mit dem Integral $\iint \frac{f(z,z')\,dz\,dz'}{(x-z)(y-z')}$ und führen zu einer Verallgemeinerung der Theorie des Integrals $\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x-z}$. Die Ausdehnung der gewonnenen Resultate auf beliebig viele Variable ist sehr einfach.

M.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à M. Le Besgе. Liouville J. (2) XV. 7-8. 1870.

$$\int_0^\infty F\left(x+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 F\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$ No.

J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à M. Le Besge. Liouville J. (2) XV. 298-302. 1870.

Anmerkung über ein bestimmtes Integral. — Ueber quadratische Formen, deren Determinante mit verändertem Zeichen >0 und $\equiv 3 \pmod{8}$ ist. Endlich die Relation

$$\int_0^\infty F\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\log x\frac{dx}{x} = \log a\int_0^\infty F\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$ No.

F. Tisserand. Sur l'interpolation. C. R. LXVIII. 1101. 1869.

Wenn man in dem Integrale $\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,d(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $f(x)$ aus $n+1$

Werthen $a, a_1, a_2 \dots a_n$ in dem Intervalle zwischen -1 und $+1$ interpolirt, so hat Jacobi gezeigt, dass, um bei der mechanischen Quadratur dieses Integrals denselben Grad der Annäherung zu erreichen, den nach Gauss für $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ die Anwendung der Wurzeln der Gleichung $P^n(x) = 0$ ergiebt, die Zahlen $a, a_1, a_2 \dots$ die Wurzeln der Gleichung: $\cos(\overline{n+1} \arccos x) = 0$ sein müssen. Es wird nun weiter nachgewiesen, dass die Coefficienten R in dem Ausdrucke $\sum_{\mu=0}^{\mu=n} R_\mu f(a_\mu)$, der alsdann für die Quadratur erhalten wird, sämmtlich einander gleich und zwar $= \frac{\pi}{n+1}$ werden und folglich die Quadratur selbst den Ausdruck

$$\frac{\pi}{n+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} f\left[\cos \frac{(2\mu+1)\pi}{2(n+1)}\right]$$

erhält. Dies Resultat lässt sich leicht geometrisch deuten.

Setzt man $x = \cos\zeta$, so wird das Integral

$$\int_0^\pi f(\cos\zeta)\,d\zeta = \int_0^\pi \varphi(\zeta)\,d\zeta$$

und die entsprechende Quadratur:

$$\frac{\pi}{n+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi\left[\frac{(2\mu+1)\pi}{2(n+1)}\right].$$

Die Fläche der Curve $y = \varphi(\zeta)$ zwischen $\zeta = 0$ und $\zeta = \pi$ wird also durch einfache Zerlegung in Rechtecke erhalten und der Fehler hängt nur ab von dem Coefficienten von $\cos^{2n+1}\zeta$ (oder von $\cos(2n+1)\zeta$) und den folgenden in der Entwickelung von $f(\cos\zeta)$.

Dies wird auf die Interpolation der graden periodischen Funktionen angewandt.

Sei $f(\zeta) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_i B_i \cos i\zeta$, wo bekanntlich

$$\pi B_i = 2\int_0^\pi f(\zeta) \cos i\zeta\,d\zeta$$

ist, so erhält man die sehr angenäherte Bestimmung von B_i bei $n+1$ gegebenen Werthen der Funktion durch:

$$(n+1) B_i = 2 \sum_{\mu=0}^{\mu=n} f\left[\frac{(2\mu+1)\pi}{2n+1}\right] \cos\left[i \frac{(2\mu+1)\pi}{2n+1}\right].$$

Der Fehler ist nur von dem Coefficienten von $\cos(2n+2-i)\zeta$ und den folgenden in der Entwickelung von $f(\zeta)$ abhängig.

Für den Fall einer graden periodischen Funktion von 2 Variabeln, in welchem man hat:

$$f(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2} B_{0,0} + \sum_{i,k} B_{i,k} \cos i\zeta \cos k\zeta',$$

$$\pi^2 B_{i,k} = 4 \int_0^\pi \cos k\zeta' \, d\zeta' \int_0^\pi f(\zeta, \zeta') \cos i\zeta \, d\zeta,$$

bestimmt man die $(n+1)^2$ Werthe von $f(\zeta, \zeta')$, welche den Werthen: $\frac{\pi}{n+1}, \frac{3\pi}{n+1} \cdots \frac{(2n+1)\pi}{2(n+1)}$ von ζ und ζ' entsprechen, und der Werth von $B_{i,k}$ wird genau sein bis auf Glieder, welche von dem Coefficienten von $\cos(2n+2-i\zeta) . \cos(2n+2-k\zeta')$ und den folgenden in der Entwickelung von $f(\zeta, \zeta')$ abhängen.

Die Formeln für B_i und $B_{i,k}$ fallen mit denen zusammen, welche man erhalten würde, wenn man die Entwickelungen von $f(\zeta)$ und $f(\zeta, \zeta')$ auf ihre $n+1$ bez. $(n+1)^2$ ersten Glieder einschränkte, indem man ζ, bez. ζ und ζ' die obigen Werthe ertheilte und die erhaltenen Gleichungen auflöste. Hr.

Ch. Hermite. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha \, dx}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$. Bull. Math. I. 320-323. 1870.

Dieses Integral ist, als Funktion von α angesehen, periodisch, da $f(\alpha + \pi) = -f(\alpha)$ ist, und man findet seinen Werth $= +\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem α zwischen $2n\pi$ und $(2n+1)\pi$ oder zwischen $(2n-1)\pi$ und $2n\pi$ liegt. Dies führt auf die Darstellung dieser discontinuirlichen Funktion durch die trigonometrische Reihe $\sin \alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \cdots$ Dieselbe discontinuirliche Funktion ergiebt auch das Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. M.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

ANDRÉJEWSKY. Sur l'intégration de quelques équations différentielles du second ordre par la méthode du facteur. C. R LXVII. 716-720. 1869.

Für Differentialgleichungen von der Form:

$$A + By' + Cy'^m + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0,$$

wo $A, B, \dots E$ Funktionen von x und y sind, m irgend eine von Null verschiedene Zahl ist, erhält man das erste Integral durch Quadratur, wenn die Coefficienten den beiden Bedingungen genügen:

$$\frac{d\left(\frac{A}{E}\right)}{dy} - \frac{d\left(\frac{B}{E}\right)}{dx} + m\left(\frac{AD-BC}{E^2}\right) = 0,$$

$$\frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy} - \frac{d\left(\frac{D}{E}\right)}{dx} = 0.$$

Der integrirende Faktor wird:

$$M = \frac{1}{E} e^{mP},$$

wo

$$P = \int \left[\frac{C}{E}dx + \frac{D}{E}dy\right],$$

und das erste Integral lautet:

$$\int M(A\,dx + B\,dy) + \frac{ME}{m}y'^m = \alpha.$$

Ein besonderer Fall ist $A = 0$, $B = 0$; man kann dann unbeschadet der Allgemeinheit $m = 1$ nehmen und man hat:

$$Cy' + Dy'^2 + Ey'' = 0.$$

Da die erste Bedingung von selbst erfüllt ist, so ist diese Gleichung integrirbar, wenn

$$\frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{D}{E}\right)}{dx}.$$

Für $\frac{C}{E} = f(x)$, $\frac{D}{E} = \varphi(y)$ gelangt man zu einer Gleichung, die bereits Liouville in seinem Journal (1) VII. p. 134 integrirt

hat. Der Verfasser wendet seine Methode noch auf eine Reihe complicirterer Fälle an, bei denen er sich darauf beschränkt, die Resultate ohne weitere Ableitung mitzutheilen. Hr.

COLLET. Théorie du facteur pour l'intégration des expressions différentielles du premier ordre. (Extrait par l'auteur.) C. R. LXVIII. 799-803. 1869.

J. BERTRAND. Rapport sur un Mémoire de M. Collet intitulé: Théorie du facteur etc. C. R. LXVIII. 1534. 1869.

Nach der Analyse, die der Verfasser von diesem Memoire giebt, ist der Inhalt desselben mit einigen Erweiterungen vom Verfasser in der weiter unten besprochenen Schrift: Du facteur intégrant etc. (Ann. de l'Éc. Norm. VII.) reproducirt worden.

Hr.

COLLET. Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 59-88. 1870.

Den Gegenstand der Untersuchung bildet die Integration der totalen Differentialgleichung:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_n\,dx_n = 0 \quad (1)$$

in den Fällen, wo sie möglich ist, durch die Bestimmung des Faktors μ, der die linke Seite integrabel macht. Derselbe muss $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen und die Coefficienten $X_1, X_2, \ldots X_n$ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Bedingungsgleichungen genügen. Die Zahl der letzteren reducirt sich auf $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; sind diese erfüllt, so findet sich μ definirt durch $n-1$ simultane partielle Differentialgleichungen, welche, wenn

$$\mu = e^z, \quad \frac{dz}{dx_k} = p_k$$

gesetzt wird, die Form annehmen:

$$f_m = X_1\,p_m - X_m\,p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0 \quad (2)$$

$$m = 2, 3 \ldots n.$$

Die Integrabilitätsbedingungen für diese sind, wie auf direktem Wege bewiesen wird, eine unmittelbare Folge der erwähnten $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Gleichung (1).

Die Integration des Gleichungssystems (2) geschieht nach den beiden Methoden, die der Verfasser in der vorher besprochenen Arbeit entwickelt hat, nach der allgemeinen Jacobi'schen und nach der von Boole für die Integration linearer Gleichungen angegebenen Methode, für welche letztere die Gleichungen für μ zuvor in homogene verwandelt werden. Es folgen dann einige bekannte allgemeine Theoreme über den integrirenden Faktor, und darauf die Untersuchung des besonderen Falls, wo derselbe in ein Produkt von Funktionen zerlegbar ist, deren jede nur eine einzige Variable enthält. Als nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür wird gefunden, dass

$$\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m}$$

sich für alle Werthe des Index m auf die Form $X_1 \varphi_m(x_m) - X_m \varphi_1(x_1)$ bringen lasse, dergestalt, dass für alle solche Zerlegungen die Gleichung identisch ist. Es wird alsdann

$$\mu = A e^{\sum\limits_{m=1}^{m=n} \int \varphi_m(x_m)\, dx_m}.$$

Den Schluss der Betrachtungen bildet das Problem: Wenn m Funktionen $X_1, X_2, \ldots X_m$ von n Variablen gegeben sind, zwischen denen die zu Anfang erwähnten Bedingungsgleichungen bestehen, $n-m$ neue Funktionen: $X_{m+1}, \ldots X_n$ zu finden, so dass

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \cdots + X_n\, dx_n$$

durch einen Faktor integrabel wird.

Jede der neuen Funktionen muss einem System linearer partieller Differentialgleichungen gleichzeitig genügen, und es wird der erforderliche Nachweis geliefert, dass diese unter der gemachten Voraussetzung den Integrabilitätsbedingungen genügen.

Die vorstehenden Untersuchungen werden hierauf an 4 Beispielen erläutert, auf welche übrigens nur die allgemeine Methode angewandt wird. Hr.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

E. Korkine. Sur les équations simultanées aux différences partielles du premier ordre. C. R. LXVIII. 1460-1467. 1869.

Der Verfasser entwickelt auf Grund einer von Bour in seiner Abhandlung über Differentialgleichungen (J. de l'Éc. Polyt. cah. 39) unter der Bezeichnung: Seconde méthode d'abaissement mitgetheilten Methode, deren erste Idee von Bour selbst Jacobi zugeschrieben wird, ein allgemeines Verfahren für die simultane Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche den Integrabilitätsbedingungen identisch genügen. Die Methode beruht darauf, vermittelst einer vollständigen Lösung einer Gleichung das System in ein anderes zu transformiren, in welchem sowohl die Zahl der unabhängigen Variablen, als die der Gleichungen um 1 vermindert ist. Sind nämlich $q_1 q_2 \dots q_n$ die ursprünglichen Independenten, $p_1 p_2 \dots p_n$ die entsprechenden Derivirten und stellt $V = F(q_1 \dots q_n; \alpha_1 \dots \alpha_n)$ eine vollständige Lösung der ersten Gleichung des Systems dar, dann bilden im transformirten System die $n-1$ Constanten $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ die neuen unabhängigen Variablen, während die Grössen

$$\alpha_n, \ \frac{d\alpha_n}{d\alpha_1} \frac{d\alpha_n}{d\alpha_2} \cdots \frac{d\alpha_n}{d\alpha_{n-1}}$$

an die Stelle der ursprünglichen Funktion V und der Derivirten p treten, wobei die willkürlichen Constanten $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ in dem Sinne unabhängig von einander angenommen werden, dass aus den Gleichungen:

$$\frac{dF}{d\alpha_1} + \frac{dF}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_1} = 0, \cdots \frac{dF}{d\alpha_{n-1}} + \frac{dF}{d\alpha_{n-1}}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_{n-1}} = 0$$

durch Elimination der q keine Relation von der Form:

$$\Pi\left(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \ \frac{d\alpha_n}{d\alpha_1} \cdots \frac{d\alpha_n}{d\alpha_{n-1}}\right) = 0$$

ableitbar ist.

Das neue System von $n-1$ Gleichungen besitzt die wichtige Eigenschaft, ebenfalls die Integrabilitätsbedingungen zu erfüllen.

Der Fortgang dieses Verfahrens führt schliesslich zu einer einzigen Gleichung, durch deren vollständige Integration die Aufgabe gelöst ist.

Eine leichte Modifikation tritt ein, wenn in der Gleichung des ursprünglichen Systems, von der man ausgegangen ist, einige der Derivirten p fehlen. — Wie man übrigens sieht, ist die vorstehende Methode dadurch complicirt, dass sie bei jedem Schritte eine vollständige Lösung erfordert, während die Jacobi'sche Methode, wie aus den Arbeiten Bour's zu ersehen, auf ein Verfahren führt, welches jedesmal nur partikuläre Lösungen linearer Gleichungen nöthig macht. Hr.

Collet. Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 7-57. 1870.

Die Arbeit ist im Wesentlichen eine Anwendung der von Jacobi gegebenen Methode für die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf die simultane Integration eines Systems solcher Gleichungen.

Die Aufgabe ist folgende:

Gegeben sind m Relationen:

$$f_1=0,\ f_2=0, \dots f_m=0 \tag{1}$$

zwischen den Variablen $q_1 q_2 \dots q_n$ und $p_1 p_2 \dots p_n$, es werden $n-m$ andere Relationen zwischen den nämlichen Grössen gesucht, welche in Verbindung mit den ersteren bewirken, dass $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ ein vollständiges Differential wird.

Die Integration dieses Ausdruckes giebt alsdann die Funktion V, deren partielle Derivirte in Beziehung auf die q die entsprechenden p sind.

Es wird zunächst der Beweis für den Jacobi'schen Satz reproducirt, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität obigen Ausdrucks durch die Gleichungen:

$$(f_i f_k) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(\frac{df_i}{dq_\alpha}\frac{df_k}{dp_\alpha} - \frac{df_k}{dq_\alpha}\frac{df_i}{dp_\alpha} \right) = 0 \tag{2}$$

gegeben sei für alle Werthe der Indices i und k.

Die Möglichkeit einer gemeinsamen Lösung des Systems (1)

ist dadurch noch nicht ausgeschlossen, dass für irgend zwei Gleichungen desselben die Bedingung (2) nicht unmittelbar, sei es identisch, oder in Folge der gegebenen Gleichungen erfüllt ist. Fügt man nämlich zu den m gegebenen noch die Gleichung $(f_i f_k) = f_{m+1} = 0$ hinzu, so kann es geschehen, dass gleichzeitig $(f_i f_{m+1}) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots m$ ist, sollte dies aber für ein i nicht der Fall sein, so füge man noch die Gleichung $(f_i f_{m+1}) = f_{m+2} = 0$ hinzu und fahre so fort, bis man zu einem System

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots f_{m'} = 0$$

gelangt, welches der Bedingung (2) genügt.

Ist $m' > n$, dann ist das Problem offenbar unmöglich; ist aber $m' \leqq n$, dann ist es lösbar, nur dass durch die Einführung der neuen Relationen die Allgemeinheit der Lösung eingeschränkt wird, indem die Anzahl der willkürlichen Constanten durch jede neue Relation um 1 vermindert wird.

Es seien nun

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots f_s = 0$$

die Gleichungen, welche der Bedingung (2) Genüge leisten, so erscheinen die gesuchten $n-s$ anderen Relationen:

$$f_{s+1} = a_{s+1},\ f_{s+2} = a_{s+2}, \ldots f_n = a_n,$$

als simultane Lösungen von eben so vielen Hülfssystemen, von denen das für f_{s+i} aus den $s+i-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen: $(f_k, f_{s+i}) = 0,\ k = 1, 2 \ldots s+i-1$; und zwar wählt der Verfasser für f_k die Form $\varphi_k - p_k$, worin φ_k mit Hülfe der bereits gefundenen Gleichungen als Funktion der Grössen $p_{s+i+1}, p_{s+i+2}, \ldots p_n$ und $q_1\, q_2 \ldots q_n$ ausgedrückt ist. Die Auflösung geschieht nach dem Jacobi'schen Verfahren, und man erhält schliesslich $p_1\, p_2 \ldots p_n$ als Funktionen der q mit $n-s$ willkürlichen Constanten. Der Verfasser knüpft daran die Bemerkung, dass wenn die Gleichungen (1) dieselben bleiben, die Aufgabe aber dahin abgeändert wird, dass

$$\sum_i p_i\, dq_i - \sum_h q_h\, dp_h$$

integrabel werden soll, wo i irgend welche Werthe aus der Reihe $1, 2, \ldots n$, h die übrigen annimmt, nicht blos die Integrabilitätsbedingungen, sondern auch die zu suchenden neuen Relationen dieselben sind, wie im vorigen Fall; nur die schliess-

liche Quadratur wird in beiden Fällen verschieden. Unseres Erachtens ergiebt sich dies unmittelbar durch einen Blick auf die canonische Form des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, durch welches jede Gleichung $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ ersetzt werden kann, und welches bekanntlich durch Vertauschung von q_h in p_h und von p_h in $-q_h$ ungeändert bleibt.

Es erfolgen dann Betrachtungen über die verschiedenen Klassen der simultanen Lösungen eines Systems m partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von n Variablen. Eine Lösung wird vollständig genannt, wenn sie so viele willkürliche Constanten enthält, dass deren Elimination aus der Integralfunktion und ihren n Ableitungen erster Ordnung ein Gleichungssystem ergiebt, welches dem gegebenen äquivalent ist.

Die Zahl der Constanten ist $n - m + 1$. Aus der vollständigen Lösung werden dann die allgemeinen singulären und gemischten Lösungen in bekannter Weise abgeleitet.

Die dargelegte Integrationsmethode wird auf das folgende System angewandt:

$$f_1 = p_1 p_4 - q_2 q_3 = 0, \; f_2 = p_2 p_3 - q_1 q_4 = 0.$$

Als vollständige simultane Lösung erhält man für zwei dabei zu unterscheidende Fälle:

$$V = 2 q_1^{\frac{1}{2}} q_3^{\frac{1}{2}} (q_2 q_3 - a)^{\frac{1}{2}} + b \text{ und } V = 2 q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} (q_3 q_4 - a_1) + b_1.$$

Es wird darauf der besondere Fall eines Systems linearer homogener Gleichungen, die den Integrabilitätsbedingungen genügen, nach der Methode Boole's behandelt, die darin besteht, durch die vollständige Lösung einer derselben das gegebene System in ein anderes zu transformiren, in welchem die Zahl der Gleichungen, sowie die der Variablen um 1 vermindert ist. Sie erfordert daher beständig vollständige Lösungen, während für die nach der allgemeinen Methode eingeführten Hülfssysteme jedes Mal nur eine partikuläre gemeinsame Lösung nöthig war. Es werden nach beiden Methoden hierher gehörige Beispiele berechnet, deren Anführung wir uns versagen müssen. Zum Schluss stellen wir die citirte Literatur zusammen:

Cauchy, Exercices d'analyse et de mathématiques t. II.
Pfaff, Abh. d. berliner Akademie 1814.

Jacobi, Crelle's Journal, II. 17, 60,
Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgeg. von Clebsch, 1866,
Bour, Mémoires des Savants étrangers 1856,
Boole, Philosophical transactions 1863. Hr.

LAGUERRE. Note sur une classe d'équations différentielles du second ordre. C. R. LXIX. 1125 1869.

LAGUERRE. Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées du premier ordre. Inst. 1. sect. XXXVII. 397. 1869.

LAGUERRE. Sur l'intégration d'une équation différentielle du second ordre. Inst. 1. sect. XXXVIII. 245. 1870.

Mit Bezugnahme auf eine frühere Mittheilung des Verfassers in den C. R. 7. Dec. 1868 (siehe Fortschr. d. M. I. p. 119) wird folgender Satz bewiesen:

Sind 2 Polynome 2ten Grades in x und y gegeben, die sich nur in den Gliedern ersten Grades und der Constante unterscheiden:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h,$$
$$\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta,$$

und man kennt von der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}, \tag{1}$$

wo F eine beliebige Funktion von $\frac{d\eta}{d\xi}$ bedeutet, ein partikuläres Integral $\eta = \vartheta(\xi)$, so kann man daraus von der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x, y)}} \tag{2}$$

ein Integral erster Ordnung mit einer willkürlichen Constante finden, nur darf $\vartheta(\xi)$ nicht von der linearen Form $m\xi + n$ sein. Alle Lösungen der letzteren Gleichung werden nämlich erhalten, wenn man alle abwickelbaren Flächen aufsucht, deren Rückkehrkante auf irgend einer der durch die Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + z(dx + ey + h) + (1 - z)(\delta x + \varepsilon y + \eta) + \lambda z(1 - z) = 0$$

definirten Oberflächen liegt, und die ausserdem durch die ebene Curve $\eta = \vartheta(\xi)$ hindurchgehen. Die Curven nun, in welchen die Ebene $z=1$ von den abwickelbaren Flächen geschnitten wird, sind sämmtlich Lösungen der Gleichung (2). Es führt aber die Bestimmung dieser Flächen auf eine Differentialgleichung erster Ordnung mit der willkürlichen Constanten λ.

Man erhält also ein allgemeines Integral erster Ordnung für die Gleichung (2).

Indem $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ identisch angenommen werden, ergiebt sich folgender Satz:

Kennt man von der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}}$$

eine partikuläre Lösung, die nicht von der Form $y = mx + n$ ist, so kann man aus dieser stets ein Integral erster Ordnung mit einer willkürlichen Constante herleiten.

In der 2ten Note wird ein allgemeiner Fall mitgetheilt, wo die Differentialgleichung obiger Form sich algebraisch integriren lässt.

In der 3ten Note wird mitgetheilt, dass die mehrerwähnte Differentialgleichung (2) sich immer vollständig integriren lässt, mit dem Bemerken, dass dieses Resultat sich aus der Jacobi'schen Theorie des letzten Multiplikators ergebe. Es folgt daraus unter Anderem, dass die Differentialgleichung erster Ordnung, auf die man bei der Aufsuchung obenerwähnter abwickelbarer Oberflächen geführt wird, sich stets durch blosse Quadraturen lösen lässt. Hr.

G. Darboux. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 163-173. 1870.

G. Darboux. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre I. C. R. LXX. 673. 1870.

G. Darboux. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles II. C. R. LXX. 746. 1870.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung, wie sie durch die Arbeiten Ampère's im Journal de l'École

Polytechnique cah. 17 und 18 dargelegt ist, hat, abgesehen von einer Bemerkung Bour's daselbst cah. 39 pag. 186-189 (das Kriterium betreffend, wann die Gleichungen Monge's und Ampère's integrable Combinationen liefern), keine wesentliche Erweiterung erfahren. Der Verfasser deutet nun in der vorliegenden Arbeit nur die Principien zu einer neuen Methode an, welche sich auf Gleichungen aller Ordnungen mit beliebig vielen Variablen und selbst auf simultane Gleichungen ausdehnen lassen soll.

Die gegebene Gleichung sei

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

und ihr totales Differential:

$$Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt = 0.$$

Ersetzt man nach dem Vorgange Ampère's und Cauchy's x und y durch die Variablen x und y_0, wo y_0 eine passend zu bestimmende Funktion von x und y bedeutet, so gelten die Relationen:

$$\frac{dz}{dy_0} = q\frac{dy}{dy_0},\quad \frac{dp}{dy_0} = s\frac{dy}{dy_0},\quad \frac{dq}{dy_0} = t\frac{dy}{dy_0}, \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx},\quad \frac{dp}{dx} = r + s\frac{dy}{dx},\quad \frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

ferner nehmen die Integrabilitätsbedingungen die Form an:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dy_0} = \dfrac{dq}{dx}\dfrac{dy}{dy_0} - \dfrac{dq}{dy_0}\dfrac{dy}{dx},\quad \dfrac{dr}{dy_0} = \dfrac{ds}{dx}\dfrac{dy}{dy_0} - \dfrac{ds}{dy_0}\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{ds}{dy_0} = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dy_0} - \dfrac{dt}{dy_0}\dfrac{dy}{dx}. \end{cases} \tag{4}$$

Hierzu kommt die Ableitung von (1) nach y_0:

$$Y\frac{dy}{dy_0} + Z\frac{dz}{dy_0} + \cdots + T\frac{dt}{dy_0} = 0. \tag{5}$$

Die drei Gleichungen (3) sind von y_0 frei. Wählt man nun die Funktion y_0 so, dass die Gleichung:

$$R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - S\frac{dy}{dx} + T = 0 \tag{6}$$

befriedigt wird, so zerfällt die Gleichung (5), wenn man in ihr vermittelst der Gleichungen (2) (3) (4) sämmtliche Derivirte nach y_0 bis auf $\frac{dy}{dy_0}$ und $\frac{dt}{dy_0}$ eliminirt, in zwei Gleichungen, die eben-

falls von y_0 frei sind, nämlich in (6), welche mit $\frac{dt}{dy_0}$ multiplicirt ist, und in die mit $\frac{dy}{dy_0}$ multiplicirte Gleichung:

$$(7)\qquad Y + Zq + Ps + Qt + R\frac{ds}{dx} + S\frac{dt}{dx} - R\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nimmt man endlich noch die gegebene Gleichung, oder ihre partielle Ableitung nach x, welche wegen (7) die Form hat:

$$(8)\qquad X + Zp + Pr + Qs + R\frac{dr}{dx} + S\frac{ds}{dx} = 0,$$

hinzu, so haben wir 6 Gleichungen, welche von y_0 frei sind; da aber 7 Unbekannte: y, z, p, q, r, s, t als Funktionen von x und y_0 zu bestimmen sind, so erhält man hierdurch nicht die vollständige Lösung des Problems.

In dem speciellen Falle, der fast allein bisher betrachtet worden ist, wo die Gleichung von der Form ist:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

$H, K, \ldots$ Funktionen von x, y, z, p, q sind, gestattet die besondere Form der Gleichung die Elimination der Derivirten r, s, t und man erhält 3 Gleichungen zur Bestimmung der 4 Unbekannten y, z, p, q.

Es zeigt sich hiernach eine Grundverschiedenheit zwischen den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und denen höherer Ordnungen darin, dass, während in den ersteren die Methode der Vertauschung der Variablen das Problem auf die Integration eines vollständigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen reducirt, dieselbe Methode bei den letzteren eine Gleichung weniger ergiebt, als zur Lösung des Problems nothwendig ist. Der Verfasser bemerkt ferner als eine bisher noch nicht betrachtete Thatsache, dass, wenn man im vorliegenden Falle, um die hinreichende Anzahl von Gleichungen zu erhalten, die partiellen Ableitungen höherer Ordnung zur Zahl der Unbekannten hinzunimmt, die Zahl der Gleichungen, zu denen man gelangt, so weit man auch gehen mag, stets um eine Einheit geringer ist, als die Zahl der Unbekannten.

Im Anschlusse nun an das Verfahren, welches bei den Monge'schen Gleichungen angewandt wird, giebt der Verfasser folgende erste Methode der Lösung:

Man suche, ausser der gegebenen Gleichung, zwei integrable Combinationen der Gleichungen in y, z, p, q, r, s, t; sind diese in beiden Systemen, welche den beiden Wurzeln für $\frac{dy}{dx}$ entsprechen, vorhanden, so ist das Problem als gelöst zu betrachten; giebt es keine integrable Combination, so gehe man zu den Gleichungen fort, welche die Derivirten 3ter Ordnung enthalten; diese kann dann integrable Combinationen liefern, im entgegengesetzten Falle gehe man zu den Gleichungen mit Derivirten 4ter Ordnung über, u. s. f.

Gesetzt nun, eines dieser Systeme führe zu zwei integrablen Combinationen:

$$F(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}, \quad F_1(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

Die beiden Constanten sind als unbekannte Funktionen von y_0 zu betrachten und die Elimination von y_0 führt zu einer Gleichung von der Gestalt:

$$F = \text{willkürliche Funktion von } F_1.$$

Diese neue Differentialgleichung muss mit der vorgelegten verträglich sein und mit ihr ein Integral mit einer willkürlichen Funktion gemein haben. Hiernach stellt sich die Aufgabe in folgender Weise:

Eine Differentialgleichung $V = a$ der n^{ten} Ordnung zu finden, welche mit der vorgelegten Gleichung (1) eine Lösung mit wenigstens einer willkürlichen Funktion gemein hat.

Zu dem Ende bilde man von der Gleichung (1) die n Ableitungen $n-1^{ter}$ Ordnung und von $V = a$ die beiden Ableitungen erster Ordnung nach x und y, dann erhält man im Ganzen $n+2$ Gleichungen, welche die $n+2$ Derivirten $n+1^{ter}$ Ordnung von z linear enthalten. Dieses Gleichungssystem darf aber nicht so beschaffen sein, dass es für die Derivirten $n+1^{ter}$ Ordnung bestimmte Werthe als Funktionen derer niederer Ordnung liefert, denn sonst könnte die gemeinsame Lösung, falls sie existirte, nur eine begrenzte Zahl willkürlicher Constanten, aber keine willkürliche Funktion enthalten.

Die $n+2$ Gleichungen müssen also ein unbestimmtes System bilden, was 2 Bedingungsgleichungen ergiebt, welche offenbar die ersten Derivirten von V nach x, y, z und nach allen partiellen

Ableitungen von z bis zur n^{ten} Ordnung im 2ten Grade enthalten; sie sind daher als zwei homogene partielle Differentialgleichungen 1ter Ordnung und 2ten Grades zu betrachten, denen V gleichzeitig genügen muss.

Dieses Resultat wird noch weiter durch die Bestimmung vervollständigt, dass die Gleichung $K_n u^n + K_{n-1} u^{n-1} + \cdots = 0$ mit der Gleichung $Ru^2 + Su + T = 0$ eine Wurzel gemeinschaftlich haben müsse. $K_n, K_{n-1} \ldots$ bezeichnen die Derivirten erster Ordnung von V in Beziehung auf die Ableitungen n^{ter} Ordnung von z, und die Gleichung n^{ten} Grades nennt der Verfasser die charakteristische Gleichung der partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, wonach die andere Gleichung die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (1) ist.

Nach den beiden Wurzeln der letzteren zerfallen die Gleichungen $V = a$ in zwei Klassen. Zur vollständigen Lösung reicht es hin, eine Gleichung von jeder Klasse zu haben, welche eine willkürliche Funktion enthält.

Die beiden vorstehenden Methoden entsprechen einerseits der Cauchy'schen, andererseits der Jacobi'schen Methode zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sie führen alle Mal zum Ziel, wo die Integrale zu denen gehören, welche Ampère Integrale der ersten Art nennt.

Die Beispiele, auf welche der Verfasser seine Methode angewandt hat, sind:

1) Die lineare Laplace'sche Gleichung. Die verschiedenen von Laplace angegebenen Fälle der Integrabilität entsprechen obigen successiven Systemen von Gleichungen;

2) Die Gleichung: $s = e^{kz}$, die von Liouville integrirt ist (Journ. de Math. 118 p. 71);

3) Die von Bour gegebene Differentialgleichung für die auf die Oberflächen, in welcher das Quadrat des Linienelements durch die Gleichung $ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy$ gegeben ist, abwickelbaren Flächen:

$$2(pq-\lambda)\frac{d^2 \log \lambda}{dx\, dy} - s^2 + \left(r - p\frac{d \log \lambda}{dx}\right)\left(t - q\frac{d \log \lambda}{dy}\right) = 0.$$

Zum Schluss weist der Verfasser auf die Schwierigkeiten hin, welche die Aufgabe bietet, aus dem vollständigen Integral einer partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit 5 Con-

stanten das allgemeine Integral mit 2 willkürlichen Funktionen herzustellen, und bemerkt, dass man dagegen leicht zum allgemeinen Integrale gelangen könne, wenn man zunächst ein Integral der ersten Ordnung mit 2 Constanten:

$$\varphi(x, y, z, p, q, a, b) = 0$$

kennt, und aus diesem nach der Lagrange'schen Methode ein solches Zwischenintegral mit einer willkürlichen Funktion herleitet.

Das Integral $\varphi = 0$ muss so beschaffen sein, dass man durch Elimination von a und b zwischen dieser Gleichung und ihren beiden ersten Derivirten wieder auf die vorgelegte Differentialgleichung zurückkommt.

Die beiden letzten Noten enthalten im Wesentlichen dasselbe, wie die erstere Abhandlung. Hr.

MOUTARD. Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. C. R. LXX. 834. 1870.

J. BERTRAND. Rapport sur un Mémoire de M. Moutard rélatif à la théorie des équations différentielles partielles du second ordre. C. R. LXX. 1068. 1870.

Da von der Arbeit selbst uns nur der Theil, der die Einleitung enthält, vorliegt, so beschränken wir uns hier auf die Wiedergabe des Bertrand'schen Berichts.

Unter den verschiedenen von Ampère aufgestellten Formen, welche die Integrale partieller Differentialgleichungen 2[ter] Ordnung annehmen können, wählt der Verfasser die einfachste und untersucht die Gleichungen, denen sie genügen kann. Sind u, v die unabhängigen Variablen, von denen die Funktion α abhängt, so wird angenommen, dass von den beiden willkürlichen Funktionen im allgemeinen Integrale die eine nur u, die andere nur v enthält. Die dieser Voraussetzung entsprechenden Gleichungen werden in fünf verschiedene Formen classificirt, die alle möglichen Fälle umfassen. In ihnen allen erscheint $\frac{d^2\alpha}{du\,dv}$ als die einzige Derivirte zweiter Ordnung. Zwei von ihnen sind

unmittelbar integrabel, die dritte ist bereits von Liouville integrirt, die beiden übrigen lassen sich auf einander reduciren, es erübrigt also die Untersuchung einer einzigen Form, nämlich der folgenden:

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv} = \frac{dlA}{du}\frac{d\alpha}{dv} + AB\alpha,$$

wo die Funktionen A und B gewisse der obigen Voraussetzung entsprechende Bedingungen erfüllen müssen. Das Studium dieser letzteren und die Aufsuchung des allgemeinen Integrals, falls sie erfüllt sind, bildet den Gegenstand des zweiten Theils der Abhandlung. Die Lösung der ersteren Aufgabe gelingt mit Hülfe einer von Laplace (Mémoire de l'Académie des Sciences 1773) gegebenen Reihe von Ausdrücken, die aus den Coefficienten der vorliegenden Gleichung abgeleitet sind.

Damit nun die angenommene Form des Integrals möglich sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass einer dieser Ausdrücke verschwinde, und die Stelle, die derselbe in der Reihe einnimmt, giebt die Anzahl der Derivirten einer der willkürlichen Funktionen an, die im Integral vorkommen. Im Verfolg dieser Methode gelangt der Verfasser zur allgemeinsten Form der betrachteten Gleichungen.

Der dritte Theil der Abhandlung enthält in grösster Vollständigkeit die Untersuchung der Gleichung:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = z\varphi(x, y),$$

welche einen besonderen Fall der bisher betrachteten allgemeinen Gleichung bildet, auf den die vorhin erhaltenen Resultate nicht anwendbar sind. Nachdem die einzige Gleichung für $\varphi(x, y)$, auf welche die zwei Bedingungsgleichungen im allgemeinen Falle sich hier reduciren, aufgestellt ist, wird die Integration der betrachteten Gleichung ausgeführt. Hr.

F. Didon. Sur une équation aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 377-380. 1869.

Es handelt sich darum, für die bekannte Legendre'sche partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dz}{dx}\right] + \frac{d}{da}\left(a^2\frac{dz}{da}\right) = 0,$$

welcher der Ausdruck $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ genügt, allgemeinere Lösungen zu finden. Indem zunächst für z eine nach aufsteigenden Potenzen von α fortgehende Reihe gesucht wird, erhält man für die Coefficienten derselben als allgemeine Lösung, wie bekannt,

$$C_n X_n(x)+C_n' Q_n(x), \text{ wo } X_n(x) \text{ und } Q_n(x)$$

die Kugelfunktionen erster und zweiter Art sind. Folglich genügt der obigen Gleichung die Wurzel:

$$z=\sum C_n \alpha^n X_n+\sum C_n' \alpha^n Q_n(x).$$

$Q_n(x)$ ist hier in der nach Heine's Angabe von Neumann herrührenden Form $\int_{-1}^{+1}\frac{X_n(t)}{x-t}dt$ gegeben (vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 1861, p. 85-86).

Vermittelst der Laplace'schen Formel:

$$X_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x-\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi$$

lassen sich die beiden Summen durch die bestimmten Integrale darstellen:

$$z=\int_0^\pi f(\alpha x-\alpha\cos\varphi\sqrt{x^2-1})d\varphi+\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{x-t}\int_0^\pi \psi(\alpha t-\alpha\cos\varphi\sqrt{t^2-1})d\varphi.$$

Indem ferner für z eine nach Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$ aufsteigende Reihe gesucht wird, deren Coefficienten bekanntlich ebenfalls Kugelfunktionen sind, giebt eine ähnliche Summirung die neuen Lösungen:

$$z=\frac{1}{\alpha}\int_0^\pi \chi\left(\frac{x-\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}{\alpha}\right)d\varphi$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{x-t}\int_0^\pi \vartheta\left(\frac{t-\cos\varphi\sqrt{t^2-1}}{\alpha}\right)d\varphi,$$

wo f, ψ, χ, ϑ willkürliche Funktionen.

Als bemerkenswerth heben wir noch hervor, dass als erzeugende Funktion der $Q_n(x)$ der elegante Ausdruck

$$\omega \log\left\{\frac{(x-\alpha)\omega+1}{(x-\alpha)\omega-1}\right\},$$

wo $\omega = (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, erhalten wird, sofern er nach steigenden Potenzen von α entwickelt wird. Es ist nämlich:

$$\Sigma \alpha^n Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \Sigma \frac{\alpha^n X_n(t)}{x-t} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-2\alpha t+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{x-t} dt;$$

der Werth des letzteren Integrals ist aber obiger Ausdruck. Die von Heine (a. a. O. p. 57) durch ein bestimmtes Integral dargestellte erzeugende Funktion U giebt die $Q_n(x)$ als Coefficienten einer nach Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$ fortschreitenden Entwickelung. Wenn übrigens der Verfasser in der Einleitung bemerkt, dass seines Wissens bisher von der vorliegenden partiellen Differentialgleichung ausser ω keine Lösung gegeben worden sei, so wird darauf hingewiesen, dass die eben erwähnte von Heine gegebene Funktion U eine solche von ω verschiedene Lösung ist. Hr.

F. Didon. Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 1-25. 1869.

In einer früheren Arbeit: Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n etc., welche der Verfasser vor Kurzem in demselben Journal veröffentlicht hat, war für jede der Funktionen $U_{m,n}$ und $V_{m,n}$ ein System zweier linearer partieller Differentialgleichungen 2[ter] Ordnung entwickelt und für das erste dieser Systeme waren zwei Polynome als Lösungen gegeben worden. Im ersten Theile der vorliegenden Abhandlung wird die eine dieser Lösungen unter der Form eines bestimmten Doppelintegrals gegeben, und eine neue Lösung hinzugefügt, welche unter der Form eines einfachen bestimmten Integrals erscheint, und alsdann für jede Reihe, welche aus den beiden Reihen entsteht, wenn man m und n alle möglichen positiven ganzzahligen Werthe ertheilt, mit Hülfe der Lagrange'schen Umkehrungsformel in ihrer auf zwei Variable erweiterten Gestalt, die entsprechende erzeugende Funktion hergestellt.

Im zweiten Teile wird die vollständige Lösung des Systems der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen, denen $V_{m,n}$ genügt, gegeben und nachgewiesen, dass dasselbe nur eine einzige Lösung zulässt, welche ein Polynom ist, nämlich den

Coefficienten von $x^m y^n$ in der Reihenentwickelung von

$$(1-2ax+2by+a^2+b^2)^{-1},$$

wodurch $V_{m,n}$ ursprünglich definirt war. Für die 3 anderen Funktionen, denen das System noch genügt, werden ebenfalls die erzeugenden Funktionen entwickelt, und einer der letzteren einige merkwürdige Umformungen gegeben. Im 3ten Theile wird $V_{m,n}$ unter der Form eines bestimmten Doppelintegrals und für sehr grosse Werthe von $m+n$ in annähernder Weise durch ein einfaches bestimmtes Integral dargestellt. Schliesslich wird zwischen der Legendre'schen Funktion X_n und $U_{m,n}$ eine Analogie aufgewiesen, die darin besteht, dass, wie

$$f(x)=\frac{1.2\ldots n.2^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}X_n$$

unter allen Polynomen n^{ten} Grades, mit dem Coefficienten 1 in x^n, dasjenige ist, welches das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1} f^2(x)\,dx$$

zu einem Minimum macht, so

$$\varphi(x,y)=\frac{m!\,n!\,2^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots 2m(n+1)(n+2)\ldots 2n}\cdot\frac{m!\,n!}{1.2\ldots(m+n)}U_{m,n}$$

unter allen Polynomen $m+n^{ten}$ Grades, mit dem Coefficienten 1 in $x^m y^n$, dasjenige ist, welches das Integral

$$\iint \varphi^2(x,y)\,dx$$

zu einem Minimum macht, wo die Variablen der Bedingung $x^2+y^2 \leqq 1$ genügen. Hr.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

F. Didon. Sur une mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables. C. R. LXX. 749. 1870.

Die Aufgabe: „Das Polynom $\varphi(x, y, z, \ldots u)$ vom μ^{ten} Grade zu finden, welches dem Integral

$$\iiint \ldots [F(x,y,z,\ldots u)-\varphi(x,y,z,\ldots u)]^2\,dx\,dy\,dz\ldots du$$

unter der Bedingung $x^2+y^2+z^2+\cdots+u^2 \leqq 1$ einen möglichst kleinen Werth ertheilt", wird für den Fall zweier Variabeln gelöst. Wy.

F. Didon. Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 1-25. 1869.

Siehe Abschnitt VI (Nachtrag) Cap. 6, p. 324.

Siebenter Abschnitt (Nachtrag).
Funktionentheorie.

Capitel 1.
Allgemeines.

J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à M. Le Besge. Liouville J. XV. 133-136. 1870.

Siehe Abschnitt III (Nachtrag) Cap. 2, p. 288.

E. Catalan. Sur un paradoxe algébrique. Nouv. Ann. (2) VIII. 456-458. 1869.

Die Bemerkung des Verfassers richtet sich gegen die Formel

$$(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}.\sin\alpha,$$

welche Vallès (Des formes imaginaires, Paris 1869 p. 257) der Euler'schen Formel vorziehen will, und gegen eine von demselben (ib. p. 254) aus der Gleichung $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}$ gemachte unrichtige Folgerung. M.

De Saint-Germain. Note sur la décomposition des fractions rationnelles. Nouv. Ann. (2) VIII 369-372. 1869.

Das bekannte Resultat der Zerlegung eines rationalen Bruches, dessen Nenner verschiedene Faktoren enthält, wird auf den Fall übertragen, in welchem mehrere Faktoren gleich werden, und die gewonnene Gleichung auf den Fall vielfacher imaginärer Wurzeln ausgedehnt (vgl. Vieille C. R. 1859). M.

C. Jordan. Théorème sur les fonctions doublement périodiques. C. R LXX. 1128-1130. 1870.

Sind $F_1, \dots F_n$ doppeltperiodische Funktionen, deren jede

nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitswerthen in jedem Periodenparallelogramm besitzt, und $C_1, \dots C_n$ willkürliche Constanten, so ist die Bedingung, dass die Funktion $\varphi = C_1 F_1 + \cdots + C_n F_n$ eine Periode Ω hat, die Reihe von Gleichungen:

$$\varphi = l_1 F_1 + \cdots + l_p F_p + \text{const.},$$
$$l_{p+1} F_{p+1} + \cdots + l_q F_q = \text{const.},$$
$$l_{q+1} F_{q+1} + \cdots + l_r F_r = \text{const. etc.},$$

wo die Funktionen $F_1, \dots F_p$ eine gemeinsame Periode haben, die ein Vielfaches von Ω ist, während die in den andern Gleichungen auftretenden Funktionen 2 gemeinsame Perioden haben, also algebraisch von einander abhängen. M.

J. Houël. Théorie élémentaire des quantités complexes. I[ière] Partie: Algèbre des quantités complexes. Mém. de Bordeaux V. 1-64 und Paris, Gauthier-Villars 1869. II[ième] Partie: Théorie des fonctions uniformes. Mém. de Bordeaux VI. 1-144. 1868 und Paris, Gauthier-Villars 1869.

Das Referat über das ganze Werk geben wir nach dem Erscheinen des dritten Bandes. Eine Analyse der beiden ersten Theile findet sich in den Nouv. Ann. (2) VIII. 136-143. 1869.

M.

Capitel 2.

Besondere Funktionen.

Zeuthen. Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les point se correspondent un à un. C. R. LXX. 742. 1870.

Siehe Abschnitt VIII. Cap. 5B.

C. G. J. Jacobi. Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 127-175. 1869.

Herr J. Bertrand veröffentlicht hier 11, bisher ungedruckte Briefe Jacobi's an Legendre, aus den Jahren 1827-32. Sie zeigen uns, wie Jacobi durch das Studium der Arbeiten Legendre's

nach und nach zu den glänzenden Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Funktionen geführt worden ist, die wir aus den „Fundamenta", aus den Astronomischen Nachrichten und aus Crelle's Journal kennen. Im I. Briefe vom 5. Aug. 1827 setzt Jacobi auseinander, wie die Multiplikation der elliptischen Funktionen 1. Gattung, welche Legendre in den Exercices de calcul intégral I. gegeben, durch eine Reihe successiver Transformationen ersetzt werden kann. Daran schliessen sich zahlentheoretische Untersuchungen, die Fundamentaltheoreme für cubische, biquadratische und Reste höherer Potenzen, zu denen J. durch das Studium des Legendre'schen Reciprocitätsgesetzes und der Disquisitiones arithm. (sectio VII.) von Gauss geführt ist. Der II. Brief (Jan. 1828) giebt eine Analyse von Abel's Recherches sur les fonctions elliptiques Ière Partie (Crelle II.); und J.'s Untersuchungen über die Modulargleichungen. Brief III. enthält die Formeln für die complementäre Transformation, die Entwickelung der elliptischen Funktionen in unendliche Produkte und die Entwickelung nach sin und cos der vielfachen Argumente. Hier setzt J. den Gedankengang auseinander, der ihn zu seinen Theoremen geführt. IV. Ueber die zahlentheoretischen Folgerungen aus der Gleichung

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2\sum q^{\nu^2}$$

und aus ähnlichen Relationen zwischen den Constanten; sowie über die Beziehung der elliptischen Funktionen 3. Gattung mit 3 Variabeln zu andern Transcendenten von 2 Variabeln. V. enthält J.'s Untersuchungen über die allgemeine algebraische Lösung der Gleichung vom Grade n^2, von der die Theilung der elliptischen Funktionen in n gleiche Theile abhängt. VI. (1829.) Ueber die Auflösbarkeit der Gleichung zwischen $\sin am\,(u)$ und $\sin am\,(nu)$, welche Abel auf eine algebraische Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades zurückführt. VII. Ueber Legendre's Eintheilung der elliptischen Integrale 3. Gattung in 2 Classen; und über die geometrische ebene Construktion der Multiplikation der elliptischen Funktionen (Crelle III. 376). Brief VIII. enthält nur kurze Notizen, über Abel's Tod, über die numerische Auswerthung der elliptischen Integrale 3. Gattung, über das in

Schumachers Astr. Nachr. No. 127 veröffentlichte Fundamentaltheorem für die Transformation. In IX. (1830) steht ausser persönlichen Notizen nur Einiges über die Bezeichnung sin am etc. X. (1830) enthält eine Ergänzung zu Legendre's Lösung der Gleichung

$$4\frac{x^n-1}{x-1}=Y^2\pm nZ^2.$$

Im letzten XI. Briefe (v. J. 1832) finden sich einige Notizen über seine Arbeiten aus der Störungstheorie, über die trigonometrische Lösung der Pell'schen Gleichung und die Verallgemeinerung derselben. M.

F. Didon. Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique. Liouville J. (2) XIV. 230-240. 1869.

Cauchy hat in den C. R. XVII. 1843 eine Reihe von Abhandlungen über gewisse unendliche Produkte, besonders über die von ihm so genannten reciproken Faktoriellen veröffentlicht, welche nichts anderes als Jacobi's Θ-Funktionen sind. In diesen Abhandlungen findet sich eine äusserst einfache Methode für die Umkehrung des elliptischen Integrals, welche H. Didon hier wiedergiebt mit Einführung der Jacobi'schen Zeichen. Man findet $\sin\operatorname{am} x$, $\cos\operatorname{am} x$, $\Delta\operatorname{am} x$ und $\Pi(x,a)$ ausgedrückt durch Θ, H, Θ_1, H_1, und eine Cauchy'sche Formel, aus welcher das Additionstheorem gefolgert werden kann. M.

P. Mansion. Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. Essai d'exposition élémentaire. Paris. Gauthier-Villars. Gand. Hoste. 1870.

Die Methode des Verfassers basirt auf der Untersuchung des wahren Werthes der Funktionen, welche unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Dieses Princip giebt ihm a priori den Grad der Vielfältigkeit der Faktoren, welche in den Transformationsformeln auftreten. Dies liefert auch, ohne die Theorie der Θ-Funktionen, die Constanten für die Multiplikation. Durch die genaue Bestimmung des Zeichens der Constanten weist er dann nach, dass die für die Transformation charakteristische Zahl po-

sitiv ist. Der Theorie der Multiplikation und der Transformation schickt der Verfasser eine historische Uebersicht über die in dieses Gebiet einschlagenden Arbeiten vorauf. Sie zerfällt in 2 Capitel: 1) die Theorie der elliptischen Funktionen vor der Entdeckung der doppelten Periode, und 2) die Theorie der Multiplikation und der Transformation der elliptischen Funktionen seit Entdeckung der doppelten Periode. M.

Allégret. Note sur l'existence de nouvelles classes renfermant chacune un nombre illimité de courbes algébriques planes, dont les arcs offrent une représentation exacte de la fonction elliptique de première espèce. C. R. LXX. 1032-1033. 1870.

Diese Curven sind definirt durch die Gleichungen:

$$ds = \sqrt{m^2-1}\,\frac{dr}{\sqrt{-1+2mr^3-r^6}},\quad ds = 2\sqrt{m(1-m)}\,\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}},$$
$$ds = 2\sqrt{m(1-m)}\,\frac{dr}{\sqrt{1-r^6}}.$$ M.

J. A. Serret. Rapport sur un Mémoire de M. Bouquet, relatif à la théorie des intégrales ultra-elliptiques. C. R. LXXI. 42-43. 1870.

Die Arbeit Bouquet's wird in dem Recueil des Savants étrangers gedruckt werden; desshalb folgt das Referat später. M.

C. Jordan. Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. C. R. LXVIII. 865-869. 1869.

Siehe Abschnitt II. (Nachtrag.) Cap. 1, p. 274.

C. Jordan. Sur la division des fonctions hyperelliptiques. C. R. LXX. 1028-1032. 1870.

Clebsch hat gezeigt, dass die Reduktion der binären Formen 6ter Ordnung auf die Form T^2-U^3 abhängt von der Gleichung 40ten Grades, welche die Dreitheilung der hyperelliptischen Funktionen giebt. Dasselbe Verfahren wendet H. Jordan auf

die Gleichung X_n vom Grade $\frac{p^{2n}-1}{p-1}$ an, von welcher die Theilung der Perioden in den $2n$fach periodischen Funktionen durch eine ungerade Zahl p abhängt. Aus einer Wurzel dieser Gleichung X_n erhält man die übrigen durch Auflösung: 1) der entsprechenden Gleichung X_{n-1} für $(2n-2)$fach periodische Funktionen, 2) einer Abel'schen Gleichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades; 3) von $2n-1$ Abel'schen Gleichungen p^{ten} Grades. M.

F. Brioschi. Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques. C. R. LXX. 504-506. 1870.

Während das Problem der Theilung der hyperelliptischen Funktionen im Allgemeinen auf eine Gleichung vom Grade n^{2p} führt, hat man bei der Zweitheilung der hyperelliptischen Funktionen nur eine Gleichung p^{ten} Grades aufzulösen. M.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

A. Cayley. A memoir on abstract geometry. Trans. of London. CLX. 51-63. 1870.

Die Arbeit enthält die Auseinandersetzung einiger elementarer Principien einer abstracten Geometrie mit *m* Dimensionen. Diese kann einerseits als eine gesetzmässige Erweiterung der Geometrie mit 2 und 3 Dimensionen angesehen werden, andererseits füllt sie eine in der Geometrie und der Analysis allgemein bemerkbare Lücke aus. Denn, haben wir es überhaupt mit Grössen zu thun, die auf irgend welche Weise unter einander verbunden sind, und welche veränderliche oder bestimmbare Grössen sind oder als solche angesehen werden können, so wird die Natur der Beziehung zwischen diesen Grössen häufig deutlicher gemacht, indem man sie als Coordinaten eines Punktes in der Ebene oder im Raume ansieht, sobald ihrer nur 2 oder 3 vorhanden sind; für mehr als 3 Grössen hingegen wird einerseits die Beziehung zu einander verwickelter, andererseits das Bedürfniss einer solchen Darstellung grösser. Dieser Fall kann einzig erledigt werden durch die Einführung des Begriffs eines Raumes, der die erforderliche Anzahl Dimensionen hat, und für die Darstellung bedürfen wir einer Geometrie für einen solchen Raum. Ein wichtiges Beispiel in der ebenen Geometrie hat sich dargeboten in der Frage nach der Bestimmung der Anzahl von

Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen; die Bedingungen geben Beziehungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Curve, und zum besseren Verständniss dieser Beziehungen war es vortheilhaft, die Coefficienten anzusehen als die Coordinaten eines Punktes innerhalb eines Raumes mit den erforderlichen Dimensionen.

Ein leitender Begriff in dieser Theorie ist der einer R-fachen Beziehung, welche charakterisirt und zum Ausdruck gebracht wird durch ein System von Gleichungen (oder einfachen Beziehungen), und welche zu dem Problem führt, solche Beziehung mit Hülfe eines Systems von Gleichungen (oder einfachen Beziehungen) auszudrücken. Indem der Verfasser die allgemeinen Schlüsse auf den Fall der körperlichen Geometrie anwendet, bemerkt er, dass er die zweifache Beziehung einer Raumcurve als vollständig und bestimmt ausgedrückt ansieht durch ein System von Gleichungen $P=0$, $Q=0, \dots T=0$, wenn keine der Funktionen P, $Q, \dots T$ eine lineare Funktion mit constanten oder variabeln „ganzzahligen" Coefficienten einer der andern Funktionen ist, und wenn jede durch die Curve hindurchgehende Oberfläche einer Gleichung von der Form $AP+BQ+\cdots+KT=0$ mit constanten oder variabeln „ganzzahligen" Coefficienten genügt. Hier sind alle Funktionen und Coefficienten angesehen als rationale Funktionen der Coordinaten und das Wort „ganzzahlig" bezieht sich auf die Coordinaten. Cly. (M.)

Lagout. Premiers principes de la géométrie. Mondes (2) XXII. 12-14. 1870.

Versuch einer Entwickelung der ersten Principien der Geometrie. O.

B. Riemann. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. Trad. par J. Hoüel. Brioschi Ann. (2) III. 309-327.

Siehe Fortschr. d. M. I. p. 22-24.

E. Beltrami. Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidéenne. Trad. par J. Hoüel. Ann. de l'Ec. Norm. VI. 251. 1869.

Siehe Fortschr. d. M. I. p. 276. Mz.

J. Hoüel. Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide. Inst. I. sect. XXXVIII. 85-86. 1870.

Beltrami hat in einer Arbeit, welche im Jahre 1868 veröffentlicht ist: „Saggio di interpretazione della geometria non euclidea" (cf. Battagl. G. VI. 285-315; Fortschr. der Math. I. 275-276), eine Geometrie derjenigen Oberflächen behandelt, welche eine constante negative Krümmung besitzen; diese Flächen nennt er pseudosphärische Oberflächen. Zu gleicher Zeit wurde die Geometrie derselben Flächen erörtert von Lobatschefsky in seinen geometrischen Studien über die Theorie der Parallelen und von Bolyai in seiner Arbeit: „Sulla scienza dello spazio assolutamente vera. Versione dal latino di G. Battaglini" (cf. Battagl. G. VI. 97-116; Fortschr. d. Math. I., 276). Es ergiebt sich, dass die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks auf diesen Flächen $<2R$ ist.

Wollte man nun durch irgend welche ebenen Construktionen die Richtigkeit des 11. euclidischen Grundsatzes beweisen, so müssten diese Construktionen auch unter Voraussetzung der möglichen Richtigkeit des Gegentheiles stattfinden. In diesem Falle aber ist die ebene Geometrie, nach den Arbeiten von Lobatschefsky und Bolyai, ein specieller Fall der pseudosphärischen. Alle Folgerungen, die sich aus der gegentheiligen Annahme ergeben, führen also nicht zu Widersprüchen mit Sätzen der ebenen Geometrie, sondern zu Sätzen der pseudosphärischen Geometrie. Demnach kann die Richtigkeit des 11. euclidischen Grundsatzes nicht durch irgend welche ebenen Construktionen dargethan werden. T.

Flye Sainte-Marie. Sur le postulatum d'Euclide. Inst. I. sect. XXXVIII. 53-54. 1870.

In dieser Note behandelt der Herr Verfasser zunächst die in der vorhergehenden Nummer erwähnten Schriften von Lobatschefsky und Bolyai; er erörtert, welche Entwickelungen in diesen Arbeiten fehlen, damit der Schluss gerechtfertigt sei, dass der 11. Euclidische Grundsatz nicht bewiesen werden könne, ohne einen andern an seine Stelle zu setzen. Diese Entwicke-

lungen finden sich in einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit des Verfassers: „Études analytiques sur la théorie des parallèles" ausgeführt; sie werden mit Hülfe der Formeln der analytischen Geometrie geleistet. Es folgt ein Ueberblick über diese Arbeit. T.

J. Hoüel. Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit postulatum d'Euclide. Mém. de Bordeaux VIII. Extrait des Procès-verbaux XI.-XVIII. 1870 und Nouv. Ann. (2) IX. 93-96. 1870.

Der Zweck der Note ist, nachzuweisen, dass die Arbeit von Beltrami: Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea. Battaglini G. VI. 285 (s. Fortschr. d. M. I. 275) zu dem Resultat führt, dass es unmöglich ist, das Princip der Parallelen durch blosse Anwendung ebener Constructionen zu beweisen. M.

A. Genocchi. Interna ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. Atti di Torino IV. 1869.

Eine kurze historische Notiz über Foncenex, aus der hervorgeht, dass einige Arbeiten dieses Mathematikers, die in den ersten Bänden der Miscellanea taurinensia publicirt sind, in Wahrheit Lagrange zuzuschreiben sind. Es ist eine Einleitung zu der Arbeit: Dei primi principii della Meccanica e della Geometria in relazione al postulato d'Euclide, auf welche wir wegen des Satzes von Foncenex verweisen. Jg. (O).

A. Genocchi. Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide. Soc. It. dei IL. (3) II. 1869.

Die abstracte Untersuchung der Resultante zweier parallelen Kräfte führt dazu, eine Funktion φ zu bestimmen, welche der Bedingung

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

genügt. Diese schon von d'Alembert im 6ten Bande der Opuscules mathématiques p. 371 gegebene Gleichung ist eine Berichtigung und Ergänzung einer andern, weniger allgemeinen, die von

Daviet de Foncenex im 2[ten] Bande der Miscellanea Taurinensia gegeben ist, in der That aber, wie später Delambre gezeigt, von Lagrange herrührt. Dieser Gleichung nun wird genügt sowohl durch $\varphi =$ const., als auch durch $\varphi = k^x + k^{-x}$, wo k constant. Die zweite Lösung, zuerst von d'Alembert, dann von Laplace gegeben, ist von den Mechanikern verlassen, weil sie der Wirklichkeit nicht entspricht, während die erste genau mit dem Principe des Hebel's stimmt, wie es von Archimedes ausgesprochen ist. Herr Genocchi beweist nun mit Klarheit und Genauigkeit, dass, wenn man die zweite Lösung als zulässig anerkennt, man auch nothwendig jene Geometrie als richtig anerkennen muss, welche von Gauss als Nicht-Euclidische, von Lobatschefsky als imaginäre bezeichnet worden ist, und umgekehrt. Die Postulate von Euclid und Archimedes hängen also dergestalt zusammen, dass die Bejahung oder Verneinung der Richtigkeit des einen auch die Bejahung oder Verneinung des andern nach sich ziehen muss. Der Herr Verfasser beweist zu gleicher Zeit, dass die Theorie der Zusammensetzung zweier sich schneidenden Kräfte im System der Euclidischen Geometrie und im System der Nicht-Euclidischen identisch ist, was leicht zu begreifen, wenn man bedenkt, dass im zweiten Falle alles von der metrischen Relation abhängt, welche sich in den unendlich kleinen Elementen der Ebene am Schnittpunkt findet, weil sie bei Zulassung des Gesetzes der Homogeneität durch unendlich kleine Kräfte ersetzt werden können, wenn nur ihr Verhältniss dasselbe bleibt. Da aber andrerseits die Entfernung der Angriffspunkte zweier paralleler Kräfte nothwendigerweise bestimmt ist, so hängt das Gesetz ihrer Zusammensetzung von der Geometrie bestimmter Figuren ab, welche verschieden ist, je nachdem man das Postulat des Euclid zugiebt oder leugnet.

Der Herr Verfasser geht dann zu anderen mechanischen Principien über, welche ebenfalls zur Euclidischen Geometrie führen, zu den unfruchtbaren Versuchen der Geometer, das Postulat des Euclid a priori zu beweisen, und zu anderen ähnlichen Postulaten, welche als diesem vorzuziehen vorgeschlagen worden sind. Wie es scheint, schliesst der Herr Verfasser die Möglichkeit einen Beweis zu finden nicht absolut aus; denn wenn

er von der willkürlichen Constante spricht, die in dem Ausdruck für die Funktion $\varphi(x)$ vorkommt und die in der Theorie der pseudosphärischen Flächen des Herrn Beltrami eine Deutung erfahren hat, glaubt er weder, dass es nothwendig sei, auf die Erfahrung zurück zu greifen, um ihren Werth zu bestimmen, noch dass man dabei sich an ein Postulat wenden müsse. Referent hat indessen nicht finden können, wie er auf einem anderen rationellen Wege zu einer Bestimmung derselben oder zu einem gleichgeltenden Theorem gelangen will. Wie dem auch sei, der Herr Verfasser erkennt die hohe Schwierigkeit an, mit den bisher angenommenen Principien die Lehre des Euclid von den Parallelen streng durchzuführen, billigt aber die Berufung Lobatschefsky's auf die Resultate der astronomischen Beobachtungen nicht. Im letzten Paragraphen der Abhandlung schlägt er dann ein neues Postulat vor, welches an die Stelle des Euclidischen zu substituiren wäre. Es lautet mit des Herrn Verfassers Worten: „Due linee rette non possono accostarsi indefinitamente senza concorrere. (Zwei gerade Linien können sich nicht unendlich nähern, ohne sich zu treffen.)" Offenbar hat der Herr Verfasser mit diesem Satze die asymptotische Annäherung paralleler Geraden ausschliessen wollen, wie sie in der Nicht-Euclidischen Geometrie stattfindet. Aber wir wissen nicht, ob es didaktisch angemessen ist, Begriffe metrischen Charakters in ein Postulat zu bringen, welches unter einer rein graphischen Form dargestellt werden kann. Jg. (O.).

R. Baltzer. Ueber die Hypothese der Parallelentheorie. Leipz. Ber. 95-96. 1870.

Reflexionen über die Hypothese der Parallelentheorie überhaupt, sowie Darlegung des Mangelhaften eines neuen Versuches in dieser Hinsicht, welcher von Bertrand der Pariser Akademie (Comptes rendus 1869 Dec. 20) unter der Versicherung vorgelegt wurde, dass das elfte Axiom des Euclides nun bewiesen, und eine von diesem Axiom unabhängige Geometrie ad absurdum geführt sei.

Carton, der Verfasser des von Bertrand in dem Compte rendu vertretenen Beweises, hat, wie Herr Baltzer mittheilt, den

Fehler begangen, die seinem Beweise zu Grunde liegende Hypothese stillschweigend zuzulassen.

Der Herr Verfasser spricht sich gegen den Schluss seiner Abhandlung dahin aus, dass die von Gauss gehegte Ueberzeugung: es sei keine Aussicht vorhanden, die Geometrie ohne eine dem elften Axiom von Euclides äquivalente Hypothese zu begründen, ihre Bestätigung durch die Existenz einer widerspruchsfreien, abstracten Geometrie, welche Gauss, Bolyai, Lobatschefsky unter Zulassung einer Minderzahl von Hypothesen erbaut haben, finde. Wtn.

Laguerre. Sur l'emploi des imaginaires en géométrie. Nouv. Ann. (2) IX. 163-175. 241-254. 1870.

Die zuerst genannte Arbeit ist eine Reproduction der ersten der Vorlesungen, welche Laguerre über höhere Geometrie gehalten hat. Die zweite ist der erste einer Reihe von Artikeln, welche einige Punkte der Theorie der Kegelschnitte, die in den zuerst erwähnten Vorlesungen nicht erörtert sind, behandeln sollen.

Denkt man sich um den Punkt $A(\alpha, \beta)$ einer reellen Ebene einen Kreis mit dem Radius ϱ beschrieben, dann zerfällt die Gleichung dieses Kreises für den Fall $\varrho=0$ in die Gleichungen zweier Graden:

$$y-\beta=i(x-\alpha),\ y-\beta=-i(x-\alpha).$$

Diese Geraden werden die isotropen Geraden (ersten und zweiten Systems) genannt, welche durch den Punkt A gehen. Construirt man für alle Punkte der Ebene die isotropen Geraden, so convergiren sämmtliche des ersten Systems gegen einen unendlich fernen Pnnkt der Ebene, und ebenso die isotropen Geraden des andern Systems gegen einen andern solchen Punkt. Diese Punkte heissen Nabelpunkte der Ebene.

Die beiden durch den Punkt A gehenden isotropen Geraden haben in ihrer Gesammtheit die Eigenschaften eines Kreises; wenn A ein reeller Punkt ist, ist A der einzige reelle Punkt dieses Kreises. Wenn aber dieser Punkt imaginär ist, dann existirt auf jeder der beiden durch A gehenden isotropen Geraden ein reeller Punkt (a und a'), und diese Punkte sind nur

von der Lage des Punktes A abhängig, so dass also ihre Verbindungslinie aa' nur von der Lage des Punktes A, aber nicht von dem gewählten Coordinatensysteme abhängig ist, so dass er zur Bestimmung eines imaginären Punktes gebraucht werden kann (darstellendes Segment, segment représentatif). Es lässt sich nun auch der dem Punkte A imaginär conjugirte A' bestimmen.

Zieht man in der Ebene durch einen beliebigen Punkt O eine unbegrenzte Gerade Ow (Coordinatenaxe genannt), dann kann man die Lage irgend eines Punktes A der Ebene durch die Strecken $O\alpha = u$ und $O\beta = w$ bestimmen, welche die durch A gehenden isotropen Geraden auf der Coordinatenaxe Ow abschneiden. u und w werden die isotropen Coordinaten des Punktes A genannt; mit ihrer Hülfe kann man den Abstand zweier imaginärer Punkte ausdrücken. So weit die erste Vorlesung.

Die zweite der vorliegenden Arbeiten enthält zunächst allgemeine Betrachtungen über die Darstellung von imaginären Punkten, die auf einer gegebenen Curve liegen. Die Arbeit nimmt ihren Ausgangspunkt von der Bestimmung eines beliebig in der Ebene gelegenen Punktes durch seine isotropen Coordinaten. Sie wendet sich dann zur Betrachtung eines Punktes, der auf einer gegebenen Curve liegt. Dazu wird untersucht, in welcher Weise die darstellenden Segmente der auf der Curve gelegenen Punkte in der Ebene vertheilt sind (Abel Transon: Application de l'algèbre directive à la géométrie. Nouv. Ann. (2) VII. 145-157. 193-208. 241-264. Fortschr. d. M. I. p. 149. — Laguerre: Note sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espce. Inst. 1. XXXVIII. 155-160). Die Untersuchung zeigt dann, dass man einen jeden Punkt einer Curve, er mag reell oder imaginär sein, durch einen reellen Punkt (point représentatif) darstellen kann, dieser ist auf der durch den Curvenpunkt gehenden isotropen Geraden des ersten Systems gelegen, und ist für einen reellen Curvenpunkt dieser selbst. Die Veränderung der Lage eines (reellen oder imaginären) Curvenpunktes wird somit durch die Curve dargestellt, welche der darstellende Punkt beschreibt.

Der letzte Theil der Arbeit ist der Darstellung der Punkte

gewidmet, die auf einer gegebenen Geraden gelegen sind. Die Behandlung einiger Aufgaben schliesst sich an. T.

S. Lie. Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Borchardt J. LXX. 346. 1869.

Setzt man $Z = z + pi$, $X = x + yi$, wenn x, y, z, p reelle Grössen bedeuten, so bestimmen x, y, z, als rechtwinklige Coordinaten aufgefasst, einen Punkt im Raume (Imaginär-Punkt Z, X); p heisst Gewicht des Punktes; ist $p = 0$, so wird (Z, X) ein Null-Punkt genannt. Die Punkte x, y, z, welche der Gleichung $F(Z, X) = 0$ genügen, bilden eine „Imaginär-Curve", welche durch eine gewöhnliche Fläche dargestellt wird. Auf dieser Fläche entspricht jedem Werthe von p eine Curve (Streifen). Aus den in Gleichungen ausdrückbaren Sätzen der ebenen Geometrie, in welcher Z und X auf reelle Werthe beschränkt sind, lassen sich auf Grund obiger Auffassung Analoga für den Raum ableiten, indem man die Coordinaten X, Z und die Parameter als complexe Grössen betrachtet und die Theilgleichungen interpretirt, welche durch Sonderung des Reellen und Imaginären entstehen. In der vorliegenden Abhandlung werden die Imaginär-Gerade, Büschel solcher Geraden, die durch einen Imaginär-Punkt gehen, die unharmonische Funktion von je vier solchen Geraden, ferner der Imaginär-Kegelschnitt einer kurzen Betrachtung unterworfen. Kr.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (analysis situs).

E. Bertini. Sui poliedri Euleriani. Tesi per l'esame di abilitazione. Ann. d. Sc. Norm. Pisa. 1868/69.

In diesen Thesen werden einige Eigenschaften der Euler'schen Polyeder bezüglich der Anordnung der Ecken, der Seiten und Kanten bewiesen, indem von der Betrachtung der ähnlichen Gruppirung (aspetto), die von Herrn Jordan (Borchardt J. LXVI. p. 22) eingeführt ist, ausgegangen wird. Durch Bewegung einer

Kante und einer ihrer Ecken theilt Herr Jordan den Ecken, Seiten und Kanten Ordnungszahlen zu und nennt Gruppirung eines Polyeders (in Bezug auf die gewählte Kante und Ecke) die Art, in der sich die zugetheilten Zahlen folgen. Aehnliche Gruppirungen sind zwei oder mehrere Gruppirungen, für welche die Reihenfolge der Zahlen dieselbe ist. In den Thesen des Verfassers ist der Begriff des Cyclus der Elemente (Seiten und Ecken) und des Cyclus der geodätischen Linien (zusammengesetzt aus Kanten) u. s. f. hinzugefügt. Cyclus der Elemente in Bezug auf zwei ähnliche Gruppirungen nennt er eine solche Reihe $(s, s_1, s_2, \dots s_{n-1})$, dass dem s das s_1 entspricht (d. h. s hat in A dieselbe Zahl, wie s_1 in A'), dem s_1, s_2, dem $s_2, s_3, \dots s_{n-1}, s$; Cyclus der geodätischen Linien nennt er andrerseits entsprechend dem Cyclus der Ecken eine Reihe der geodätischen Linien $(L_{0,r}, L_{1,r+1}, \dots)$, so dass dem $L_{0,r}$, verbunden mit den möglichst nahen Ecken s, s_r entspricht $L_{1,r+1}$ u. s. f.

Es werden verschiedene Lehrsätze bewiesen, darunter folgende: a) In Bezug auf zwei ähnliche Gruppirungen werden alle Cyclen der Elemente aus derselben Zahl der Elemente gebildet ausser zweien, die aus einem Elemente gefunden werden können. b) Die Zahl der geodätischen Linien eines Cyclus ist gleich der Zahl der Ecken des entsprechenden Cyclus. c) Man kann immer einen Cyclus von geodätischen Linien (entsprechend einem Cyclus von Ecken) finden, welche sich nicht in einem Punkte schneiden. Ein solcher Cyclus bildet einen einzigen geschlossenen Umkreis, d. h. wenn $L_{0,r}, L_{1,r+1} \dots L_{n-1,r-1}$ der Cyclus der geodätischen Linien ist, so sind die Zahlen r, n die ersten unter ihnen.

Durch Untersuchung einiger specieller Fälle bestimmt der Verfasser zum Schluss die Natur einiger Euler'schen Polyeder, durch welche er zu seinen Cyklen gekommen ist. Jg. (O.)

Karl Becker. Ueber Polyeder. Schlömilch Z XIV. 65-76. 1869. Nachtrag zu dem Aufsatze über Polyeder. Schlömilch Z. XIV. 337-343. 1869.

Der wesentliche Inhalt des ersten der beiden Aufsätze ist nach Angabe des Herrn Verfassers bereits vor 5 Jahren unter

dem Titel: „Zur Polyedrometrie" (Grunert Arch. XXXVIII. und XL.) veröffentlicht worden. Die Mängel jener Arbeit und die geringe Beachtung, welche der Arbeit zu Theil geworden, veranlassen den Herrn Verfasser noch ein Mal den Gegenstand in neuer Bearbeitung vorzulegen. Den Gegenstand der Arbeit bilden Sätze über die einfach zusammenhängenden Polyeder mit einfach oder mehrfach zusammenhängender Oberfläche.

Als Fundamentalsatz wird folgender Satz hergeleitet:

Wird die Oberfläche eines Polyeders (in dem oben angegebenen Sinne) durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so ist deren Anzahl $D = 2(e + 2n - 4)$, wenn e die Anzahl der Ecken und n die Anzahl der innern Grenzflächen bezeichnet, durch welche das Polyeder in zwei Polyeder mit einfach zusammenhängender Oberfläche zerlegt wird.

Aus diesem Satze ergeben sich andere, unter denen wegen seiner Anwendbarkeit der erweiterte Euler'sche Satz zu nennen ist:
$$e + f = k + 4 - 2n + q.$$

Darin bezeichnet q die Anzahl der Querschnitte (im Riemann'schen Sinne), die nöthig ist, um alle Flächen einfach zusammenhängend zu machen, n hat die frühere Bedeutung, e, f, k bezeichnen noch die Anzahl der Ecken, Flächen, Kanten des Polyeders. Anwendungen dieses Euler'schen Satzes bilden den Schluss der Arbeit.

In dem Nachtrage giebt der Herr Verfasser an, dass ihm die Arbeiten von Camille Jordan (Borchardt J. LXVI. 22) und von Listing (Gött. Abh. X.) erst bekannt geworden sind, nachdem er das Manuscript der Redation eingesandt. Aus der letzten dieser Arbeiten erwähnt er eine noch allgemeinere Erweiterung des Euler'schen Satzes, die bereits 1812 von Lhuilier in den Annalen von Gergonne gegeben ist. Der in der Arbeit von Jordan gegebene einfache Beweis des Euler'schen Satzes veranlasst den Herrn Verfasser auch für den Satz von der Anzahl der Dreiecke, die auf den Polyederoberflächen durch Diagonalen gebildet werden, einen direkten Beweis zu suchen. Die Resultate dieser Untersuchungen werden zusammengestellt. Im Anschluss daran wird dann der erweiterte Euler'sche Satz hergeleitet. Die Beweise dieser Sätze behalten auch noch ihre

Giltigkeit, wenn die Polyederoberflächen aus krummen Flächenstücken zusammengesetzt, Kanten und Diagonalen also krumme Linien sind. T.

Camille Jordan. Sur les assemblages de lignes. Borchardt J. LXX. 185-190. 1869.

Ein System von beliebig vielen geraden oder krummen, aber doppelpunktfreien Strecken, deren jede zwei der gegebenen Punkte $x, y, z, u \ldots$ verbindet, wird eine Streckengruppe (assemblage d'arêtes) genannt und symbolisch durch die Form $axy + bxz + fyu + \cdots$ bezeichnet, wobei die Coefficienten $a, b, f \ldots$ die Zahl der Strecken angeben, welche dieselben beiden Ecken verbinden. Eine Streckengruppe heisst $(n+1)$fach continuirlich, wenn es möglich ist, beliebig n Strecken auszuscheiden, ohne ihre Continuität aufzuheben. Zwei Streckengruppen, deren repräsentirende Formen identisch sind, $axy + bxz + \cdots$ und $ax'y' + bx'z' + \cdots$, so dass jeder Strecke xy der einen Gruppe eine Strecke $x'y'$ der anderen Gruppe entspricht, welche die den Ecken x, y entsprechenden Ecken x', y' verbindet, heissen ähnlich. Die Zahl, welche angiebt, auf wie viel verschiedene Arten eine Streckengruppe sich selbst ähnlich sein kann, wird der Grad ihrer Symmetrie genannt. Es werden darauf ausgezeichnete Elemente, Ecken, Strecken oder Sectionen bestimmt, welche in allen Substitutionen, durch welche eine Streckengruppe sich selbst ähnlich bleibt, sich selbst entsprechen. Schz.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie).

E. Zizmann. Geometrische Formenlehre. Eine Anleitung zur Betrachtung geometrischer Körper und des Strahlenbündels als Vorbereitung zur gesammten Geometrie. 2. Auflage. Jena 1869.

Diese Auflage unterscheidet sich dadurch von der ersten (1852), dass in beiden Abtheilungen (dem Lehrstoff und dem

Uebungsstoff) zu den beiden Abschnitten: „Anschauung der einfachen geometrischen Gebilde, gewonnen bei der Betrachtung geometrischer Körper", und „der Strahlenbündel und seine Verbindung mit Körpern", ein dritter Abschnitt: „Betrachtung von krummflächig begrenzten Körpern", hinzugefügt ist. M.

Fr. Becker. Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. Erstes Stück. Pr. Hanau 1870.

Der Entwurf enthält manches Zweckmässige, seine Anwendung auf Schulen ist jedoch durch eine Ueberfüllung mit zum Theil sehr langen, unwichtigen Sätzen äusserst erschwert.
Schz.

Frischauf. Elemente der Geometrie. Graz, Leuschner 1870.

A. Maier. Die ebene Geometrie und deren Anwendungen. Karlsruhe, Braun 1869.

Röhr. Methodologisch-mathematische Aphorismen. Pr. G. Oppeln. 1869.

Beweise einiger elementarer geometrischer Sätze, die ohne Zusammenhang hingestellt sind. O.

H. Green. Euclid's Problems. London, Simpkin 1870.

Schmidt. Anwendung der analytischen Geometrie zum Beweise bekannter Lehrsätze der Planimetrie. Pr. Guhrau 1869.

G. Dillner. Grunddragen af geometriska kalkylen. Dillner Tidskr. II. 82, 137, 1869.

Einige Entwickelungen auf Grundlage von Cauchy's „Mémoire sur les quantités géométriques". Hn. (Wn.)

G. Dillner. Grunddragen af geometriska kalkylen. Dillner Tidsskr. III. 30, 111, 176. 1870.

Fortsetzung der vorigen Arbeit. Hn. (Wn.)

LAGUERRE. Sur la règle des signes en géométrie. Nouv. Ann. (2) IX. 175-180. 1870.

Die Aufgabe dieser Note ist zu zeigen, dass die Zeichenregel auf alle Lehrsätze der Geometrie ausgedehnt werden kann. Der Herr Verfasser befindet sich so in einem bewussten Gegensatz zu Herrn Chasles, der in seiner Vorrede zum „Cours de Géométrie supérieure" p. IX. dies bestreitet. T.

G. DILLNER. Schematisk framställning af läran om jemnlöpande (parallela) linier. Dillner Tidsskr. III. 1. 1870.

Lässt man einen Winkel durch Rotation einer Geraden um einen ihrer Punkte entstehen, so erhält man dadurch leicht den Satz über die Winkelsumme im Dreieck; und dieser Satz dient dann, wie in vielen Lehrbüchern, als Grundlage der Parallelentheorie. Hn. (Wn.)

G. JUNG. Dimostrazione del teorema I. Vol. VIII. Giornale di Napoli Pag. 96. Battaglini G. VIII. 235. 1870.

Man ziehe drei Gerade R_0, R_1, R_2 durch einen Punkt 0 und nehme auf jeder derselben einen Punkt (a_0, a_1, a_2). Man construirt nun das Dreieck, dessen eine Ecke a_0, die beiden andern Ecken aber die Fusspunkte der Lothe von a_0 auf R_1 und R_2 sind; analog construirt man die beiden andern Dreiecke für a_1 und a_2. Dann gilt Folgendes:

1) Irgend zwei dieser Dreiecke haben ihre Ecken in drei Kreisen, und zwar je zwei entsprechende in einem Kreise, — derart, dass diese Kreise durch einen Punkt gehen und sich zu zweien auf derselben Geraden schneiden.

2) Sind die Punkte a_0, a_1, a_2 von 0 gleich weit entfernt, so haben die Dreiecke gleichen Flächeninhalt.

Diese Lehrsätze werden durch einfache geometrische Betrachtungen bewiesen, und das Nähere über die Lage der in Rede stehenden Kreise gegeben. Mz.

MOST. Zur Lehre von den Transversalen im Dreiecke und der dreiseitigen Pyramide. Grunert Arch. L. 238-289. 1869.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt M eines Dreiecks

ABC die Transversalen AA_1, BB_1, CC_1, so ist mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=1.$$

Für die dreiseitige Pyramide ergiebt sich

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}+\frac{MD_1}{DD_1}=1.$$

Herr Grunert hatte diesen Satz, wie der Verfasser bemerkt, bereits Grunert Arch. XLVIII. p. 467 bewiesen. O.

S. Brauns. Zur Lehre von den Dreieckstransversalen. Pr. Schwerin 1869.

Es werden die Transversalen behandelt, welche jede der Ecken eines Dreiecks mit den vier Punkten verbindet, in welchen die gegenüberliegende Seite von dem einbeschriebenen Kreise und den drei anbeschriebenen Kreisen berührt wird. Die Maass- und Lage-Eigenschaften dieser Transversalen, der gemeinsamen Punkte gewisser drei von ihnen, der Berührungsdreiecke, d. h. solcher Dreiecke, welche auf verschiedenen Seiten liegende Berührungspunkte zu Ecken haben, und anderer damit zusammenhängender Punkte und Geraden werden analytisch entwickelt, und namentlich mit den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks in Beziehung gesetzt. Es ergiebt sich z. B. der gleichzeitig von Herrn Spieker gefundene und von diesem in sein Lehrbuch der Geometrie (4te Auflage, pag. 190) aufgenommene Satz, dass der gemeinsame Punkt *Q* der drei Ecktransversalen, welche zu den auf den Seiten selbst liegenden Berührungspunkten der drei anbeschriebenen Kreise gehen, dieselbe Lage zum Schwerpunkt *S* und dem Mittelpunkt *M* des einbeschriebenen Kreises hat, wie nach dem Euler'schen Satze der Höhenschnitt *H* zum Schwerpunkt und zum Mittelpunkt *O* des umbeschriebenen Kreises, ferner, dass *HQOM* ein Trapez bilden, bei welchem *S* der Diagonalenschnitt ist, der Mittelpunkt *V* des Feuerbach'schen Kreises aber in die Mitte der Diagonale *HO* fällt, und endlich der Mittelpunkt *P* des dem Seitenmittendreieck einbeschriebenen Kreises, oder was denselben Punkt ergiebt, der Chordalpunkt *P* der drei anbe-

schriebenen Kreise in die Mitte der Diagonale QM fällt. Den Centren der drei anbeschriebenen Kreise entsprechend, giebt es noch drei andere diesem analoge Trapeze. Scht.

A. Dietrich. Ueber Nulllinien. Pr. Greiffenberg i. P. 1869.

Fällt man von einem Punkte in der Ebene eines Dreiecks auf die drei Seiten Lothe und setzt die positive und negative Richtung der Lothe fest, so liegen, wie leicht zu erkennen, diejenigen Punkte, für welche die Summe der drei Lothe constant ist, auf einer graden Linie. Giebt man der constanten Summe andere Werthe, so erhält man Linien, die zu der ersten parallel sind. Für eine von diesen Parallelen ist die Summe der Lothe $=0$, sie heisst die Nulllinie. Im Ganzen existiren für das Dreieck vier solcher Nulllinien, deren erste man erhält, wenn man alle drei Lothe nach der Innenseite der betreffenden Dreiecksseiten positiv nimmt, während für die drei anderen das Loth nach der Aussenseite je einer Dreiecksseite positiv zu nehmen ist. Die erste Nulllinie geht durch die drei Punkte, in denen die Halbirungslinien der drei Aussenwinkel die Gegenseiten schneiden; jede der drei anderen Nulllinien geht durch einen der obigen drei Punkte und durch die beiden Punkte, in denen die beiden andern Seiten von den Halbirungslinien ihrer Gegenwinkel geschnitten werden. Durch Betrachtung dieser Nulllinien ergiebt sich nun ohne analytische Behandlung eine Anzahl von bemerkenswerthen und zum grossen Theil neuen Sätzen, von denen wir, da wir auf alles Einzelne nicht eingehen können, nur den folgenden erwähnen wollen: Fällt man von einem Punkte auf die drei Seiten Lothe, so verhält sich die Summe der Lothe zu der Entfernung des Punktes von einer Nulllinie, wie eine Höhe des Dreiecks zur Entfernung des Anfangspunktes dieser Höhe von derselben Nulllinie, oder wie die Excentricität eines der vier Berührungskreise zum Radius des umschriebenen Kreises (dabei ist das Vorzeichen der Lothe ebenso zu nehmen, wie für die betreffende Nulllinie. Excentricität eines Berührungskreises ist die Entfernung seines Mittelpunktes vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises). Wn.

A. Grunert. Ueber einen geometrischen Satz. Grunert Arch. L. 115-118. 1869.

Beweis folgenden Lehrsatzes, der den von den Herren Brioschi und Betti ihrer Uebersetzung von Euclid's Elementen hinzugefügten Uebungen entlehnt ist: „Wenn um ein gleichseitiges Dreieck *ABC*, dessen Seite *a* sein mag, ein Kreis und ein zweiter mit diesem concentrischer Kreis mit dem beliebigen Halbmesser ϱ beschrieben ist: so ist, wenn *P* ein beliebiger Punkt in diesem zweiten mit dem ersten concentrischen Kreise ist, die Summe der Quadrate der Entfernungen *PA*, *PB*, *PC* des Punktes *P* von den Spitzen *A*, *B*, *C* des gleichseitigen Dreiecks *ABC* eine constante Grösse, nämlich von der Lage des Punktes *P* in dem zweiten, dem ersten concentrischen Kreise unabhängig". O.

E. Lemoine. Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle *ABC*. Nouv. Ann. (2) IX. 311-316. 1870.

Die berechneten Abstände sind folgende: der Abstand des Höhendurchschnittspunktes (*H*) vom Mittelpunkte (*O*) des umschriebenen Kreises: $\overline{OH^2} = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$ (*R* Radius des umschriebenen Kreises, *a*, *b*, *c* Seiten des Dreiecks). Der Abstand des Höhendurchschnittspunktes vom Mittelpunkt (*J*) des ein- oder eines angeschriebenen Kreises ist auszudrücken durch:

$$\overline{JH^2} = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

(*r* Radius des ein- oder eines angeschriebenen Kreises). Der Abstand des Mittelpunktes des ein- oder eines angeschriebenen Kreises vom Schwerpunkt (*M*) des Dreiecks ist gegeben durch die Formel:

$$JM^2 = \frac{1}{9}\left\{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \mp 6r(2R \mp r)\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich noch, dass der Abstand zwischen den Mittelpunkten des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem Abstande des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises von dem des Kreises der neun Punkte ist.

Als Anwendung dieser Resultate wird gezeigt, dass das Euler'sche Problem, ein Dreieck zu construiren, von dem die Punkte *J*, *M*, *H* gegeben sind, zurückkommt auf die Lösung der Aufgabe, ein Dreieck zu construiren, das einem Kegelschnitt umschrieben ist, dessen Brennpunkte die Punkte *O* und *H* und dessen eine Axe gleich dem Radius *R* ist. T.

Chr. F. Lindmann. Demonstratio synthetica theorematis, quod ex Elementis Euclidis a Cell. Betti e Brioschi editis sumtum et pagina 116 tomi Li hujus Archivi propositum est. Grunert Arch. LI. 194-196. 1870.

Der Satz, den Herr Lindmann behandelt, lautet: Die Summen der Quadrate der Entfernungen eines Punktes *P* von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ist constant, wenn *P* sich auf einem Kreise bewegt, der mit dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreise concentrisch ist.

Es ist dieser Satz ein ganz besonderer Fall von der bekannten Relation, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes *P* von *n* gegebenen Punkten constant ist, wenn *P* sich auf einem Kreise bewegt, dessen Centrum der Schwerpunkt der *n* gegebenen Punkte ist; denn für die Ecken des gleichseitigen Dreiecks sind die Summen constant, daher ist das Centrum des durch die Ecken gehenden Kreises der Schwerpunkt, und der von Herrn Lindmann behandelte Satz evident. Sch.

W. H. Besant. Mathematical notes. Quart. J. XI. 38-42. 1870.

Die vierte Note enthält folgenden Lehrsatz: Der Höhenschnitt eines Dreiecks und irgend ein Punkt des umgeschriebenen Kreises sind von der Pedallinie des letzteren Punktes aequidistant (die Pedallinie ist die Gerade, welche die Fusspunkte der drei Lothe von jenem Punkte auf die Dreiecksseiten enthält).

Mz.

J. Lappe. Ueber den Feuerbach'schen Satz für das ebene Dreieck. Borchardt J. LXXI. 387-392. 1870.

Es wird folgender Lehrsatz rein geometrisch durch Be-

trachtung von gemeinschaftlichen Tangenten, Aehnlichkeitspunkten, Potenzlinien an Kreisen bewiesen:

Der Kreis durch die Höhenfusspunkte eines Dreiecks berührt die vier Kreise, welche die drei Seiten des Dreiecks berühren.

Aus der Art des Beweises geht dann noch eine Erweiterung dieses Satzes hervor, welche angegeben wird. Mz.

Th. Spieker. Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des geradlinigen Dreiecks als Analogon des Kreises der neun Punkte. Grunert Arch. LI. 10-14. 1870.

Es ist der dem Mittendreieck des gegebenen Dreiecks eingeschriebene Kreis, wie der Kreis der neun Punkte der diesem Dreieck umschriebene Kreis ist. Es werden die in reciproker Weise analogen Eigenschaften dieser beiden Kreise einander gegenüber gestellt und, wo nothwendig, bewiesen. Dabei entspricht dem Schnittpunkt der Höhen des gegebenen Dreiecks der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach dem Berührungspunkt des die Gegenseite von Aussen tangirenden Berührungskreises. Schliesslich wird angedeutet, wie die angeführten Eigenschaften Anwendung finden auf die äusseren Berührungskreise des Mittendreiecks. Schz.

Retsin. Démonstrations nouvelles de deux théorèmes de géométrie. Nouv. Ann. (2) VIII. 530-533. 1869.

Zuerst wird der Satz bewiesen, dass die rechtwinkligen Projektionen eines in der Peripherie des einem Dreieck umschriebenen Kreises gelegenen Punktes M auf die Seiten dieses Dreiecks eine Gerade bilden, welche die von M nach dem Höhendurchschnittspunkt des Dreiecks gezogene Linie halbirt. Mit Hülfe dieses Satzes wird dann bewiesen, dass die Höhendurchschnittspunkte der vier Dreiecke, welche durch 4 Gerade in einer Ebene gebildet werden, in einer geraden Linie liegen. (Nouv. Ann. 1846 p. 13, 1847 p. 196.) T.

Vorsterman van Oyen. Zwei geometrische Sätze. Grunert Arch L. 112-115. 1869.

Mittheilung zweier geometrischen Sätze, die der Verfasser

von Schülern seines Instituts hat beweisen lassen. Dieselben beziehen sich auf die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks.

O.

Chr. Lindmann. Problema geometricum. Grunert Arch. LI. 247-253. 1870.

Herr Lindmann behandelt die Aufgabe, eine gerade Linie durch einen Punkt so zu legen, dass ein gegebenes Dreieck in zwei gleiche Theile zerlegt wird.

Sch.

W. Stammer. Ueber Fermat's geometrischen Satz. Grunert Arch. L. 111-112 1869.

Der Fermat'sche Satz ist: „Errichtet man über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ein Quadrat und verbindet die Spitze des rechten Winkels mit den Ecken desselben, so ist die Summe der Quadrate über den durch diese Linien abgeschnittenen Abschnitten der Hypotenuse bis zur Gegenecke gleich dem 4fachen Quadrat der halben Hypotenuse". Zu diesem Satze werden 2 Beweise mitgetheilt.

O.

G. Dostor. Propriétés du triangle rectangle. Grunert Arch. LI. 103-105. 1870.

Bezeichnen a, b, c, resp. die Hypotenuse und die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, d das Loth zur Hypotenuse, a', b', c' und d' die analogen Stücke eines dem ersten ähnlichen Dreiecks, so lassen sich die bewiesenen Sätze folgendermassen aussprechen:

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},\quad aa'=bb'+cc',\quad \frac{1}{dd'}=\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}.$$

Ueberhaupt lässt sich aus jedem Satze eines Polygons ein Satz über zwei ähnliche Polygone ableiten, wenn man die Seiten a, b, c durch die mittleren Proportionalen $\sqrt{aa'}$, $\sqrt{bb'}$, $\sqrt{cc'}$.... zwischen a und a', b und b'... ersetzt, sobald in dem ursprünglichen Satze nur die Seiten und Winkel vorkommen. Z. B. aus $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ erhält man: $aa'=bb'+cc'-2\sqrt{bb'}\sqrt{cc'}\cos A$. Der erste und dritte Satz vom rechtwinkligen Dreieck werden auf Tangente, Normale und Ordinate einer beliebigen Curve angewandt.

T.

C. A. Bretschneider. Bemerkungen zu den Bd. XLVIII. p. 480 des Archives von Herrn Ligowski mitgetheilten Uebungsaufgaben. Grunert Arch. L. 117-120. 1869.

Berichtigende Bemerkungen des Verfassers zu den Lösungen der Aufgaben über rationale Dreiecke. O.

A. Grunert. Allgemeine analytische Theorie der Funktion $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Punkte. Grunert Arch. LI. 423-498. 1870.

Siehe Abschnitt VII. Cap. 1. p. 191.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper 1870. Question 3. Messenger V. 186-187. 1870.

In einer Ebene sind A, B, C, D feste, P ein variabler Punkt. Es existirt dann zwischen den Flächen der Dreiecke PAB u. s. f. folgende lineare Relation:

$$\alpha . PAB + \beta . PBC + \gamma . PCD + \delta . PDA = 0,$$

wo $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 234.341 : -341.412 : 412.123 : -123.341$ und 234, 341, 412, 123 für die Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC gesetzt sind. Glr. (O).

J. F. Wolff. Note on Euclid Book VI. Prop. 7. Quart J. XI. 76-77. 1870. Mz.

Thiele. Lösning af Opgave 228. Tychsen Tidsskr. (2) V. 136. 1869.

Beweis einiger Formeln für das Vierseit. Hn. (Wn.)

H. Nawrath. Ueber die Construktion eines einfachen Polygons, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygon zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist. Grunert Arch. L. 1-11. 1869.

Es wird aus der von Steiner (Entwickl. d. Abh. geom. Gest. p. 94) gegebenen Lösung der allgemeinen Aufgabe ein Criterium für diesen speciellen Fall abgeleitet; dasselbe ist jedoch zu eng, da es nicht alle möglichen Fälle umfasst. Schz.

G. Affolter. Beiträge zur Geometrie der Vielecke. Pr. Solothurn 1870.

An den geometrischen Satz; dass, wenn sich ein Winkel bei constanter Grösse so bewegt, dass seine Schenkel sich um feste Punkte drehen, sein Scheitel einen Kreis beschreibt, und an den algebraischen Ausdruck für die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur k^{ten} Klasse ohne Wiederholung, werden Betrachtungen geknüpft, welche erstens zur Bestimmung der Anzahl A der n-Ecke führen, welche alle einem gegebenen n-Eck ähnlich sind und ausserdem so liegen, dass irgend welche Seiten eines und desselben durch vier gegebene Punkte gehen, und zweitens der Anzahl D der n-Ecke, welche gleichfalls einem gegebenen n-Ecke ähnlich sind, aber ausserdem so liegen, dass irgend welche Ecken eines und desselben auf vier gegebenen Geraden liegen. Man erhält für A wie für D den Ausdruck: $2(n+3)[n(n-1)(n-2)-3\alpha-5\beta]$, wo in der Formel für A, α die Anzahl der gleichschenkligen und β der gleichseitigen Dreiseite bedeutet, welche durch je drei Seiten des n-Ecks gebildet werden, in der Formel für D aber α die Anzahl der gleichschenkligen, β der gleichseitigen Dreiecke bedeutet, welche die Zusammenfassung je dreier Ecken des n-Ecks ergiebt. An die Lösung jeder dieser Aufgaben schliesst sich die Herleitung einiger Beziehungen der Lage zwischen den die gegebenen Bedingungen gleichzeitig erfüllenden n-Ecken. Schliesslich giebt der Verfasser den Weg zur Lösung der Aufgaben, welche gewissermassen in der Mitte zwischen diesen beiden liegen, wo nämlich statt der vier Punkte oder statt der vier Geraden, p Punkte, durch welche Seiten des gesuchten Polygons gehen sollen, und g Gerade, auf denen Ecken desselben liegen sollen, gegeben sind, wenn $p+g=4$ ist.

Scht.

P. Huther. Elementare Bestimmung des Punktes in der Ebene eines Polygons, für welchen die Summen der Quadrate seiner Entfernungen von den Ecken des Polygons ein Minimum wird. Pr. Regensburg 1870.

Der Herr Verfasser hält die vorliegende Schrift sowohl in

Betreff des Stoffes als der Behandlung für nicht ungeeignet, eine Programmabhandlung zu bilden, die auch von Schülern studirt werden könnte. Die bekannte Eigenschaft des Schwerpunktes des Systems von beliebig vielen Punkten ist auf eine elementare Weise, jedoch nicht gerade auf die einfachste, entwickelt, und es geht nicht einmal aus der Betrachtung hervor, dass der gesuchte Punkt ganz allgemein der Schwerpunkt des Systems der gegebenen Punkte ist, und dass dieselbe Eigenschaft auch bei einem System von Punkten im Raume stattfindet. Das Minimum der Summe der Quadrate der Entfernungen ergiebt sich gleich dem n^{ten} Theile der Summe der Quadrate der Entfernungen je zweier der gegebenen Punkte. A.

Chr. Schmidt. Das reguläre Siebeneck geometrisch construirt. München, Finsterlin 1870.

Unrichtig. Schz.

J. J. Sylvester. Note on a new continued fraction applicable to the quadrature of the circle. Phil. Mag. XXXVII. 373-375. 1869.

Es wird bewiesen, dass

$$\frac{\pi}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{20}{1+\text{in inf.}}}}}}$$

Csy. (O.)

J. Smith. The ratio between diameter and circumference in a circle. London, Simpkin 1870.

Oppermann. En Tilnarmelsesformel. Meddelt af S. Hertzsprung. Tychsen Tidsskr. (2) V. 104. 1869.

Beweis des folgenden Satzes: „Es sei B die Länge eines Kreisbogens, C die Länge der zugehörigen Sehne,

$$Z=6\left(1-\frac{C}{B}\right),$$

so ist die Anzahl der Grade des Bogens annähernd:

$$= 114,59156\sqrt{Z\frac{420-11Z}{420-32Z}}.\qquad \text{Hn. (Wn.)}$$

C. W. Merrifield. On a Geometrical proposition, indicating that the property of the radical axis was probably discovered by the Arabs. Proc. of the Lond. M. S. II. 175-177. 1869.

Bestimmt man auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises O irgend einen Punkt C, errichtet über AC und CB zwei Halbkreise O' und O'' und in C die Senkrechte CD auf AB, so sind die Kreise, welche auf beiden Seiten von CD diese Senkrechte und die Halbkreise berühren, einander gleich. Diesem Satz, welcher sich unter den Lemma's findet, welche die arabischen Schriftsteller dem Archimedes zuschreiben, haben dieselben zwei Scholien beigefügt, welche ausdrücken, dass dieselbe Eigenschaft Statt hat, sowohl wenn die Halbkreise O' und O'' sich schneiden, die Senkrechte aber durch den Schnittpunkt geht, als auch wenn O' und O'' sich weder schneiden noch berühren, die Senkrechte dagegen durch den Schnittpunkt zweier gleicher Tangenten an O' und O'' geht. Der letztere Theil wird von dem Herrn Verfasser auf elementare Weise bewiesen. Schz.

M. Collins. On the common tangents of circles. Rep. Brit. Ass. 1869. Mondes XXI. 413. Csy.

J. Ch. Dupain. Note sur les tangentes communes à deux circles. Nouv. Ann. (2) VIII. 458-459. 1869.

Die Note behandelt den Satz, dass die 4 Schnittpunkte der äussern mit den innern gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise auf der Peripherie eines neuen Kreises liegen, dessen Durchmesser die Centrale der beiden gegebenen Kreise ist.

T.

S. Morel. Problèmes de géométrie. Nouv. Ann. (2) VIII. 232 bis 236. 1869.

Zuerst wird die Aufgabe gelöst, zwischen zwei Geraden an einen Kreis eine Tangente so zu ziehen, dass das zwischen den Geraden gelegene Stück der Tangente durch den Berührungs-

punkt halbirt wird. Die Lage des Berührungspunktes wird mit Hülfe einer Hyperbel bestimmt.

Diese Aufgabe wird dann dazu benutzt, um auf einem Kreise einen Punkt so zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von zwei ausserhalb des Kreises gegebenen festen Punkten ein Minimum wird. T.

G. Dostor. Calcul des rayons des deux cercles qui touchent trois cercles tangents deux à deux. Grunert Arch. LI. 191-193. 1870.

Mit Hilfe der Relation:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

welche für $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ besteht, ergiebt sich die Grösse der Radien der beiden Kreise, welche drei andere berühren, die sich selbst zu je zweien gegenseitig berühren. Ferner wird die Bedingung untersucht, welche erfüllt sein muss, damit der eine der beiden gesuchten Kreise in eine gerade Linie übergehe, und zuletzt wird auch der Fall erörtert, dass zwei der gegebenen Kreise einander gleich sind. T.

J. Eilles. Das Appollonische Taktionsproblem. Pr. Strassburg 1870.

Zons. Ueber harmonische Punkte und Strahlen, Pol und Polare, Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinie und Potenzkreis. Pr. Köln 1870.

Diese Arbeit soll eine Lücke in dem Lehrbuche der Geometrie von Dr. Ley ausfüllen, entwickelt die Eigenschaften der im Titel angegebenen Gebilde auf algebraischer Grundlage und enthält in den Resultaten wohl nur Bekanntes.

Scht.

V. Eugenio. Dimostrazione di un teorema di Eulero.

T. Fuortes. Attra dimostrazione dello stesso teorema. Battaglini G. VII. 377-378. 1869.

Zwei Beweise eines Satzes aus der niederen Planimetrie durch direkte Berechnung, der zweite ist jedoch weit kürzer in Folge angemessener Auswahl des Weges. H.

C. A. Bretschneider. Der Lehrsatz des Matthew Stewart. Grunert Arch. L. 11-17. 1869.

Aus dem Stewart'schen Satze werden einige metrische Relationen abgeleitet und für die von dem Herrn Verfasser im Archiv Bd. II. Seite 239 veröffentlichte Verallgemeinerung ein einfacherer Beweis angegeben. Schz.

Binder. Das Malfatti'sche Problem. Pr. Schönthal, Tübingen 1868.

Der chronologischen Reihenfolge nach enthält die vorliegende Arbeit den zweiten rein geometrischen Beweis der Steiner'schen Lösung (Crelle J. I. 178) der ursprünglich Malfatti'schen Aufgabe [Memoria sopra un problema stereotomico (Mem. di Matematica e di Fisica della S. J. delle scienze. Modena 1803 tomo X. parte I^a. pag. 235)], der sich aber in einer für ihn so vortheilhaften Weise von dem ersten, von Quidde (Pr. Herford 1865) herrührenden, — der nicht viel mehr als eine blosse Analyse der Steiner'schen Lösung, und daher wenig geeignet, den Leser zu befriedigen —, unterscheidet, dass man, der Sache nach, versucht sein möchte, dieses Prädikat erst auf den Binder'schen in Anwendung zu bringen.

Es stützt sich der hier gegebene Beweis auf mehrere elementare und elementar zuerst bewiesene Lehrsätze über Tangenten an Kreise.

Diesen folgt die Deduktion eines Problems, das sich selbst wieder in drei Aufgaben spaltet, von denen die letzte das Malfatti'sche Problem im engeren Sinne umfasst, und die der Reihe nach behandelt werden.

Im sechsten Abschnitte geschehen die Erörterungen aller möglichen Lösungen der drei Aufgaben dieses durch seine allgemeine Fassung interessanten Problems, insbesondere auch Untersuchungen in Bezug auf die Anzahl der immer möglichen Lösungen, bei denen Referent sich begnügen muss, auf Binder's Arbeit hinzuweisen, welche diese Untersuchungen in umfassendem Sinne vollständig durchgeführt enthält.

In dem Punkte der 32 immer möglichen Lösungen stimmt Binder mit Steiner überein; die von Steiner behaupteten 48

weiteren Lösungen reduciren sich, wie Binder gezeigt hat, wenn man nur ungleichseitige Dreiecke in Betracht zieht, immer auf 40, nach Umständen aber auf 30.

Weiter finden sich im sechsten Abschnitte einige historische Bemerkungen zum Malfatti'schen Problem.

Bekanntlich hat Plücker (VI. Abschnitt der analyt.-geom. Aphorismen. Crelle J. XI. 356) für die Steiner'sche Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe zwei Konstruktionen gegeben, die im Wesentlichen von der Steiner'schen Lösung abweichen und den beiden Fällen entsprechen, in denen die drei gegebenen Kreise entweder als einander gleich, oder als ungleich angenommen werden. [Die Steiner'sche Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe in der Ebene besteht darin, dass man an die Stellen der Dreiecksseiten drei beliebige Kreise setzt (Crelles J. I. Bd. Seite 180). Für den Raum hat Steiner (ibidem) dem Problem eine weitere Ausdehnung gegeben, indem er es auf beliebige Oberflächen zweiter Ordnung übertrug. Siehe die Literatur am Schluss des Referates.]

Den Hauptsatz, auf dem die Konstruktion des ersten Falles beruht, hat Plücker unbewiesen gelassen, d. h. ihm den analytischen Beweis, den er angedeutet, nicht beigegeben, weil er glaubte, dass sich derselbe durch eine einfache allgemeine Betrachtung werde ersetzen lassen, im Uebrigen aber die Richtigkeit des Satzes durch Einführung in seine Konstruktion anerkannt.

Die Unrichtigkeit dieser von Plücker aufgestellten Behauptung, die ein exakter Beweis der Steiner'schen Lösung von selbst darthun würde, hat Binder im siebenten Abschnitte seiner Schrift, wenn auch nicht strenge erwiesen, so doch im hohen Grade wahrscheinlich gemacht; es würde jedoch zu weit führen, wenn Referent sich ausführlicher über die Plücker'sche Konstruktion und Kritik derselben von Binder verbreiten wollte.

Auch zu der allgemeineren Plücker'schen Konstruktion, über die Referent sich in derselben Weise äussern kann, wie soeben über die des einfacheren Falles, findet man Bemerkungen in der Abhandlung von Binder, die sich überhaupt in eingehender Weise mit diesem Gegenstande beschäftigt, einen Beweis der

Steiner'schen Lösung der besprochenen Verallgemeinerung aber nicht enthält.

Binder hat neben dem Verdienste, das er sich durch seinen rein geometrischen Beweis der Steiner'schen Konstruktion der einfacheren Aufgabe erworben, noch das andere mit gebührendem Rechte erlangt, die bis zum Erscheinen seiner Schrift nur unvollständig behandelte Bestimmung der Anzahl der möglichen Lösungen in einer genauen, durchgreifenden Betrachtung erörtert und endlich für die allgemeinere Malfatti'sche Aufgabe das Interesse der Mathematiker wieder wach gerufen zu haben.

Siehe auch die Abhandlungen von Cayley in den Philosophical Transactions vom Jahre 1852, Clebsch (Crelles Journal 53. Bd.) und Schellbach (Crelles J. 45. Bd.). Wtn.

Zorer. Malfatti'sches Problem. Trigonometrische Auflösung. Pr. Ellwangen 1870.

In diesem Programme hat Herr Zorer durch eine trigonometrische Behandlung der Malfatti'schen Aufgabe im engeren Sinne, und zwar nur dieser allein, die neueste Bearbeitung des Problems geliefert. Der Inhalt seiner Schrift ist, dem Wesentlichen nach, folgender:

Nachdem Herr Zorer die Steiner'schen Hilfskreise α, β, γ (die von Steiner gewählten Bezeichnungen sind möglichst beibehalten) konstruirt hat, fällt er von O (Mittelpunkt des dem gegebenen Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises) aus Lothe auf die Seiten AB, AC, BC und theilt so im Vereine mit den Geraden AO, BO, CO das gegebene Dreieck in sechs neue, in deren jedes er einen Kreis einschreibt.

Je zwei dieser Kreise, nämlich innerhalb eines der Winkelräume A, B, C gelegene, werden sich in je einem und demselben Punkte E, E', E'' auf CO resp. BO, AO berühren.

Trägt man von den drei Grössen OE, OE', OE'' die eine, OE, von w'' aus nach beiden Seiten hin auf der Geraden AB auf, und in ähnlicher Weise OE', OE'' von w' und w aus, so werden hierdurch die Berührungspunkte v'', u'', resp. v', u', u, v

und somit auch die Mittelpunkte *a*, *b*, *c* der drei gesuchten Kreise gefunden.

Es folgen nach dieser noch sechs Konstruktionen, auf die Referent näher einzugehen unterlassen kann, und die zum Theil als Corollarien der bereits erklärten auftreten, theils, wenngleich nicht direkt ausgesprochen, einen Beweis der Richtigkeit der Steiner'schen Konstruktion, deren Existenz aber, was einigermassen befremden muss, mit keinem Worte Erwähnung geschieht, enthalten. Wtn.

FABER. Einige Sätze und Aufgaben von Orthogonal-Kreisen. Pr. Lauban 1869. Schz.

V. MOLLAME. Dimostrazione dei teoremi 3 e 4, enunciati a pag. 228. Battaglini G. VIII. 366. 1870.

Siehe Abschnitt IX. Cap. 2C.

V. N. BITONTI. Dimostrazione delle quistioni 2, 3 e 4. Battaglini G. VIII. 291. 1870.

Siehe Abschnitt IX. Cap. 2C.

D. ORLANDO. Dimostrazione dei teoremi proposti da V. N. Bitonti. Battaglini G. VIII. 204. 1870. Schz.

LIONNET. Démonstration d'un théorème de Fermat. Nouv. Ann. (2) IX. 189. 1870.

Der Satz lautet: Ueber eine begrenzte Gerade AB sei ein Halbkreis und auf der anderen Seite über AB ein Rechteck $ABCD$ beschrieben, so dass $AB = AD.\sqrt{2}$ ist; auf dem Halbkreise nehme man einen Punkt M an und ziehe MC und MD, welche AB in c und d schneiden mögen, dann ist: $Ac^2 + Bd^2 = AB^2$.

Mz.

GRANT. Démonstration d'un théorème de géométrie. Nouv. Ann. (2) IX. 188. 1870.

Folgender Satz wird bewiesen:

Trifft ein veränderlicher Kreis, der aber stets durch einen

festen Punkt P geht, einen Kegelschnitt in den Punkten A, A', A'', A''', so ist, wenn R der Radius des Kreises,

$$\frac{PA.PA'.PA''.PA'''}{R^2}$$

eine constante Grösse. Mz.

G. V. Schiaparelli. Relazione „sopra una regola proposta per la trisezione dell'angolo dal sig. Gaetano Baratto di Napoli". Rend. d. Ist. Lomb. (2) II. 1869.

Die Regel des Herrn Baratto besteht in Folgendem: Gegeben ist ein Winkel O. Ein Kreis mit O als Mittelpunkt schneide die Schenkel in A und B. Der Mittelpunkt des Bogens AB sei C. Man lege in B eine Tangente an den Kreis und verbinde den Schnittpunkt D derselben mit der Sehne AC mit O, so ist DOB der dritte Theil des gegebenen Winkels. Der Verfasser des Berichts bemerkt, dass man an eine solche Lösung den Massstab wissenschaftlicher Strenge nicht legen dürfe, zeigt indess mittelst einer Zahlentabelle, dass obige Lösung eine praktisch genügende Annäherung gebe, wenn der Winkel nicht grösser als 90° sei. Bei grösserem Winkel wird der begangene Fehler jedoch zu gross. Jg. (O.)

Jouanne. Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal. Nouv. Ann. (2) IX. 40. 1870.

Es wird die Pascal'sche Spirale benutzt, d. h. die Fusspunktencurve eines durch den Scheitel des Winkels gehenden Kreises in Bezug auf einen Punkt, der auf der Verlängerung eines Schenkels ebenso weit vom Scheitel entfernt ist, wie der Mittelpunkt des Kreises. M.

E. Saymié. Division d'un angle en parties égales et multiplication du cube. Mondes (2) XXII. 348-356. 1870.

Enthält eine Methode um mit Hülfe der Archimedischen Spirale einen Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen, nebst der Beschreibung eines Instrumentes zum Zeichnen einer solchen Spirale. O.

C. A. BRETSCHNEIDER. Die harmonischen Polarcurven. Grunert Arch. L. 475-499. 1869.

Zu dem Zweck, als Material für den Unterricht zu dienen, werden einige Eigenschaften und metrische Beziehungen der Curve

$$y^2=(b^2-x^2)\frac{x-(b\pm a)}{x+(b\pm a)}$$

abgeleitet. Es ist dies dieselbe Curve, welche erhalten wird, wenn man eine Kreisschaar mit einem einfachen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Secante liegt, so in eindeutige Beziehung bringt, dass jedem Kreise derjenige Strahl zugeordnet ist, welcher durch seinen Mittelpunkt geht.

Schz.

ROSENDAHL. Quadratur und Rectification der Curven. Pr. Bielefeld 1869. Ni.

J. SCHLOTKE. Stereoskopische Figuren. Hamburg 1870.

Die vorliegende Sammlung enthält 32 stereoskopische Darstellungen aus dem Gebiete der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie, die zur Unterstützung des Unterrichts in diesen Gegenständen dienen sollen.

Siehe auch Hoffmann Z. I. 159-160. 1870. O.

MARX. Die Elemente der Geometrie des Raumes (Fortsetzung der Abhandlung im Pr. 1866). Pr. Worms 1869.

In der ersten Abhandlung (i. P. 1866) über die Elemente der ebenen Geometrie wurde der planimetrische Winkel als das zwischen zwei Geraden gelegene unendliche Stück der Ebene definirt, und daraus die Sätze über die planimetrischen Winkel hergeleitet. Diese Anschauungsweise wird in der gegenwärtigen Abhandlung auf den Raum übertragen.

Als stereometrischer Winkel oder Flächen-Winkel (zwischen einer Geraden und einer Ebene liegt nur ein planimetrischer Winkel) wird das unendliche Stück des Raumes definirt, das zwischen zwei Ebenen liegt. Hierdurch gewinnt man die Sätze über die Flächenwinkel, welche denen über planimetrische Winkel analog sind.

Die Ecke wird als das unendliche Stück des Raumes definirt, das von drei oder mehr Ebenen begrenzt wird, welche durch einen Punkt gehen. Jeder Flächenwinkel wird durch eine dritte Ebene in Ecken getheilt; daher kann man die Grösse der Ecke durch die Grösse eines Flächenwinkels ausdrücken, und so ergeben sich die Sätze über die Ecken. Besonders behandelt sind die Centralecken, d. h. Ecken, deren Spitzen in einem Punkte liegen, und deren Gesammtinhalt den ganzen Raum erfüllen. Diese Centralecken bilden den Uebergang zu den Polyedern.

Polyeder ist dasjenige von Ebenen vollständig und zwar so begrenzte Stück des Raumes, dass eine jede Gerade, welche durch einen beliebigen seiner Punkte gelegt wird, nach jeder Seite dieses Punktes hin eine Ebene trifft.

Wählt man die Centralecken so, dass jede unendlich klein, ihre Anzahl also unendlich gross wird, dann geht die Oberfläche der zugehörigen Polyeder in eine einzige krumme Fläche über; man erhält die Kugeloberfläche. T.

Anonymus. Euclid XI. etc. Messenger V. 3-5. 1869.

Modificirter Beweis von Euclid XI., 4, 6, 8, nebst einer Untersuchung über die Gleichung einer Ebene. Glr. (O.)

Le Besgue. Sur les questions 894 et 961. Nouv. Ann. (2) VIII. 555-557. 1869.

Lösung der Aufgabe, ein gerades Prisma mit gegebener Basis so zu durchschneiden, dass der Schnitt einem gegebenen Dreieck ähnlich wird. M.

F. Unferdinger. Theorie des Tetraeders aus den 6 Kanten. Grunert Arch. LI. 353-367. 1870.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, den Lagrange'schen Ausdruck für das Volumen des Tetraeders durch die 6 Kanten, den Carnot'schen für dasselbe durch 2 Gegenkanten, ihren kleinsten Abstand und ihren Kreuzungswinkel und die Crelle'sche Darstellung des Radius der umschriebenen Kugel nach einheitlicher Methode herzuleiten, und löst sie durch Einführung der

Winkel, unter welchen sich die den Seiten umschriebenen Kreise schneiden, und welche die Kreiswinkel derjenigen Kante heissen mögen, die die gemeinsame Sehne beider Kreise ist. Hierbei werden gleichzeitig folgende Sätze gewonnen:

Die Kreiswinkel zweier Gegenkanten sind einander gleich.

Die Summe aller 6 Kreiswinkel beträgt 4 Rechte.

Die Quadratsumme der Abstände der Mitten zweier Paare von Gegenkanten ist gleich der halben Quadratsumme des dritten Paares.

Das Tetraeder ist der dritte Theil des umschriebenen Parallelepipeds. H.

E. G. Björling (senior). Om de reguliera polyedrarne. Dillner Tidsskr. III. 145. 1870.

Theorie der regulären Polyeder, für den Unterricht bestimmt. Hn. (Wn.)

A. Lorey. Die fünf regelmässigen Körper. Pr. Gera 1870.

Die Arbeit soll die Ergänzung zu einem nach Ansicht des Verfassers nicht ausführlich genug behandelten Capitel in Lübsen's „Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie" bilden. O.

Chr. Hansen. Elementar Bestemmelse af Torens Areal og volumen. Tychsen Tidsskr. (2) V. 1. 1869.

Elementare Ableitung der Formeln für die Oberfläche und das Volumen eines Körperstumpfes. Hn. (Wn.)

Seidelin. Bevis for en Satning af Stereometrien. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 22. 1870.

Beweis des Euler'schen Satzes für convexe Polyeder. Man denke den Körper zusammengesetzt aus Pyramiden, die zur Basis die Flächen des Körpers haben, und deren gemeinsame Spitze im Innern des Körpers liegt. Der Satz gilt zunächst für jede der Pyramiden; gilt ferner der Satz für einen Körper, der aus Pyramiden mit gemeinsamer Spitze so zusammengesetzt ist, dass jede Pyramide mit den andern einige Seitenflächen gemeinsam

hat, so lässt sich beweisen, dass der Satz auch noch gilt, wenn man diesem Körper eine neue Pyramide hinzufügt, die dieselbe Spitze und eine beliebige Zahl von Seitenflächen mit dem Körper gemeinsam hat. — Der Verfasser bemerkt, dass dieser Beweis viel Aehnlichkeit mit dem von Lhuillier hat (Annales de Gergonne III. p. 169). Hn. (Wn.)

P. Freuchen. Volumen af et Polyeder begraenset af Trekanter udtrykt ved de retvinklede Koordinater fil Polyedrets Toppunkter. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 189. 1869.

Die Spitze A eines Polyeders, dessen Seitenflächen Dreiecke sind, habe die Entfernung z von der xy Ebene. $A_1, A_2, \ldots A_n$ seien die andern Endpunkte der in A zusammenstossenden Kanten, und diese Punkte mögen von der zy resp. zx Ebene folgende Abstände haben $x_1, x_2 \ldots x_n$ resp. $y_1, y_2 \ldots y_n$. Die Indices $1, 2 \ldots n$ endlich seien so geordnet, dass für einen Beobachter in A die Zahlen von links nach rechts hin wachsen; dann hat das Volumen des Polyeders folgenden Werth:

$$V = \frac{1}{6} \Sigma \left\{ z . \sum_{p=1}^{p=n} y_p (x_{p+1} - x_{p-1}) \right\},$$

wo $x_{p+1} = x_1$, $x_{p-1} = x_n$, und wo man für z successive die Distanzen aller Ecken von der xy Ebene und bei jedem z die entsprechenden $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3 \ldots$ nehmen muss. Der Verfasser giebt dann die geometrische Interpretation dieser Formel.

Hn. (Wn.)

E. Lionnet. Note sur un problème élémentaire de géométrie sphérique. Nouv. Ann. (2) VIII. 529-530. 1869.

Die Note behandelt die Lösung der Aufgabe, auf der Oberfläche einer massiven Kugel, behufs Bestimmung der Grösse ihres Radius, drei Punkte so zu bestimmen, dass sie auf der Peripherie eines grössten Kugelkreises liegen. Die Aufgabe wird mit Hülfe des Zirkels und Lineals gelöst. T.

v. Steinheil. Ueber konstruktive Auflösung der sphärischen Dreiecke. Münch. Ber. 1869. II. 369.

Berücksichtigt man von den sechs Polen, welche zu den

drei Seiten eines sphärischen Dreiecks auf der Kugelfläche gehören, entweder die drei auf der Innenseite des Dreiecks, oder die drei anderen, welche auf der Aussenseite des Dreiecks gelegen sind, und schliesst nur den Fall aus, wo äussere und innere zugleich vorkommen, so gelangt man zu der folgenden Eigenschaft der sphärischen Dreiecke:

„Das sphärische Dreieck wird homogen, und zwar durch sechs Winkel oder durch sechs Seiten (Bögen) ausgedrückt, indem die Seiten des Dreiecks durch die Winkel an den Polen, die Winkel des Dreiecks durch die Bögen zwischen den Polen gegeben sind," auf welche Herr Steinheil, nachdem er ihre Ableitung gegeben, hier eine konstruktive Auflösung sphärischer Dreiecke gegründet hat, die sich gegen das Abmessen des auf die Kugel verzeichneten Dreiecks, ausser grösserer Genauigkeit, als vortheilhaft erweist und, wenn man in der Lösung keine allzugrosse Genauigkeit verlangt (man wird ungefähr auf $1/_{10}$ einer Bogenminute kommen können), auch gegen die Rechnung Zeitgewinn bringt. Wtn.

F. Henrich. 1) Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygoniometrie. 2) Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Wiesbaden 1870.

Beide Bücher sind für den Unterricht bestimmt. Die Darstellung unterscheidet sich nicht von der allgemein gebräuchlichen. Beide enthalten eine grosse Zahl von Aufgaben. O.

A. Ziegler. Ebene und sphärische Trigonometrie. Pr. Freising 1870.

Ein Lehrbuch in „analoger theils neuer, theils verbesserter Durchführung zum heuristischen Unterrichte". Neben dem lehrenden Theile, in dem Referent wesentlich Neues nicht hat finden können, enthält dasselbe eine grosse Menge von Aufgaben.

O.

J. Joffroy. Démonstration de la formule $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$. Nouv. Ann. (2) VIII. 42-43. 1869.

Einfacher, grösstentheils geometrischer Beweis. M.

A. Dilling. Algebraisch-trigonometrische Untersuchungen über die regulären Vielecke. Halle 1869. Mz.

F. Klamminger. Die Auflösung der sphärischen Dreiecke. Pr. Krems 1869. Schz.

C. F. J. Sondhauss. Ueber die Ableitung der Nepper'schen Analogien und der Gauss'schen Gleichungen. Pr. Neisse 1872.

Dieselbe Ableitung findet sich bereits in Baltzer's Elementar-Mathematik. Schz.

G. Dostor. Propriétés du triangle sphérique rectangle. Grunert Arch. LI. 109-111. 1870.

Für den Pythagoräischen Lehrsatz, für den Satz, dass das von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Loth die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten der Hypotenuse und jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Segmente ist, werden in dieser Arbeit Analoga für das sphärische rechtwinklige Dreieck hergeleitet. T.

F. Unferdinger. Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck. Grunert Arch. L. 107-109. 1869.

Sind a, b, c die Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC; ferner α, β, γ die drei Winkel $AA'B$, $BB'C$, $CC'A$, welche die seitenhalbirenden Transversalen mit den Seiten des Dreiecks einschliessen, so ist:

$$\cos\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\alpha+\cos\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\beta+\cos\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\gamma=0.$$

Sind x, y, z dieselben drei Winkel für die winkelhalbirenden Transversalen, so ist (nach Berichtigung eines Druckfehlers):

$$\cos\frac{A}{2}\cos x+\cos\frac{B}{2}\cos y+\cos\frac{C}{2}\cos z=0.$$ Mz.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

A. FLOHR. Der Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen. Pr. Berlin 1869.

Der Verfasser stellt in der Arbeit dasjenige aus der beschreibenden Geometrie zusammen, was er als Lehrstoff für die oberste Stufe der Realschulen für geeignet hält. Schn.

BRENNECKE. Einführung in das Studium der darstellenden Geometrie. Berlin, Enslin 1869.

BUTZ. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. Pr. Elbing 1869.

H. BEHSE. Die darstellende Geometrie. Halle, Knapp 1869.

J. P. SCHMIDT. Cours de géométrie descriptive. Bruxelles, Muquardt 1869.

C. F. G. STEINER. Geometrische Construktionslehre und Linear-Perspective für Künstler und Gewerke. Berlin, Mode 1869. Schz.

KOMMERELL. Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie. Pr. Tübingen 1869. Schz.

G. BELLAVITIS. Applicazione della geometria descrittiva. Padova Seminario 1869.

SCHLESINGER. Darstellung der räumlichen Collinearprojectionen in orthogonalen Abbildungen. Ein Beitrag zur Gestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Wien. Ber. LIX. 636-645. 1869. Mz.

K. RUDEL. Die ersten Elemente der darstellenden Geometrie. Pr. Erlangen 1870. Schz.

F. Hoschek. Die centrale Projectionsmethode und ihre Anwendung in der Perspective. Pr. Pölten 1870. Schz.

E. Baumgardt. Axonometrie. Pr. Potsdam 1870. Mz.

D. Pantanelli. Disegna assonometrica. Battaglini G. VIII. 106. 1870. Mz.

D. Regis. Sopra un' applicazione dei principii di omologia alla prospettiva. Battaglini G. VIII. 222. 1870. Schz.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

C. F. Geiser. Einleitung in die synthetische Geometrie. Leipzig 1869.

Herr Geiser hat die Absicht, Anfänger mit mässigen Vorkenntnissen für die synthetische Geometrie vorzubereiten. Eine solche Vorbereitung lässt sich wohl aber nur durch kräftige Anregung zur Selbstthätigkeit, also durch eine wohlgeordnete und reiche Aufgabensammlung erreichen, an deren Hand man die Hauptsätze der synthetischen Geometrie durcharbeitet. Für die reine Geometrie fehlt ein Werk nach Art des „Salmon-Fiedler, Kegelschnitte." Herr Geiser hat nur eine Anzahl einfacher und anregender Fragen der elementaren Geometrie in genetischer Form klar und ausführlich entwickelt, so dass er auch von sehr mittelmässig Vorgebildeten verstanden werden wird. K.

J. Frischauf. Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner. Graz, Leuschner u. Lubersky 1869.

Die geometrischen Constructionen von Mascheroni (La geometria del compasso, Pavia 1797, deutsch von Grüson (Berlin 1825) zur Lösung aller, mit alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal lösbaren Aufgaben vermittelst des Zirkels allein, und die Constructionen Jacob Steiners (Die geometrischen Constructionen,

ausgeführt vermittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833 bei Dümmler) zur Lösung aller derartigen Aufgaben bei fest angenommenem Hilfskreise vermittelst des Lineals allein, sollen nach dem Verfasser der vorliegenden für ein Lehrbuch der Geometrie bestimmten Arbeit noch wenig bekannt sein. Seine Darstellung dieser Constructionen lehnt sich getreu an die Originale an. Namentlich wird die Lösung der Aufgaben vermittelst des Lineals und eines festen Hilfskreises auf dieselben Fundamentalaufgaben zurückgeführt, wie bei Steiner, und die Lösung dieser beruht bei beiden meist auf denselben specielleren Aufgaben; so namentlich die Lösung der Aufgabe, durch einen Punkt mit einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen. Die Lösung der siebenten und achten Fundamentalaufgabe, die beiden Durchschnittspunkte eines nicht gezeichnet vorliegenden, aber durch Grösse und Lage gegebenen Kreises mit einer Geraden, sowie die beiden reellen Durchschnittspunkte zweier solcher Kreise zu finden, gründet sich bei beiden auf die Theorie der Aehnlichkeitspunkte und der Chordalen zweier Kreise. Herr Frischauf hat jedoch nur die zur Erreichung des Zieles unumgänglich nothwendigen Betrachtungen aufgenommen, und dabei nur die ersten Elemente der Euclidischen Geometrie vorausgesetzt. Scht.

GROUARD. Étude géométrique sur les figures planes semblables. Inst. 1 sect. XXXVII. 27 u. 28; 84 u. 85; 124 u. 125; 171 u. 172. 1870.

Drei ebene, ähnliche Figuren S, S', S'', welche beliebig in einer Ebene gelegen sind, besitzen eine Reihe von Eigenschaften, von denen die, welche die drei Aehnlichkeitspunkte derselben betreffen, angegeben werden. Daraus werden dann neue Eigenschaften hergeleitet, welche die Bewegung einer Figur betreffen, die sich auf beliebige Weise in einer Ebene bewegt, indem sie sich selbst ähnlich bleibt. Bei dieser Bewegung entspricht einer jeden Lage der Figur ein Punkt, den man momentanen Aehnlichkeitspunkt nennen kann; seine Lage erhält man als Grenzlage der Aehnlichkeitspunkte, wenn die zweite Figur zur ersten in eine benachbarte Lage rückt. Wendet man auf drei benachbarte Lagen

der Figur und auf diese drei momentanen Aehnlichkeitspunkte die zuerst für S, S', S'' erhaltenen Sätze an, dann gelangt man zu Sätzen, welche die Krümmungsradien von Trajectorien der Punkte oder von Einhüllenden der Geraden betreffen, die durch die Bewegung erzeugt werden. Sind dann für jeden Augenblick die Krümmungshalbmesser dreier Trajectorien oder Einhüllenden gegeben, dann kann man den Krümmungshalbmesser irgend einer Trajectorie oder Einhüllenden bestimmen. Diese Bestimmung wird rein geometrisch durchgeführt. Die gewonnenen Resultate kann man auch durch Benutzung der Mechanik erhalten, dadurch dass man die Eigenschaften der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen untersucht. Diese Untersuchungen sind der Gegenstand der letzten Note. T.

J. Rosanes. Ueber Dreiecke in perspektivischer Lage.
Clebsch Ann. I. 549-553. 1870.

Der Verfasser geht von 2 Dreiecken abc, ABC aus, und bezeichnet eine perspectivische Lage (wobei nämlich die Verbindungslinien entsprechender Ecken sich in einem Punkt treffen) durch $\frac{abc}{PQR}$, wo PQR irgend eine Permutation von ABC. Es sind also überhaupt sechs perspectivische Lagen denkbar. Auf analytischem Wege gelangt nun der Verfasser dahin, dass zwei reelle Dreiecke nicht gleichzeitig auf alle sechs oder auch nur auf fünf Arten perspectivisch liegen können, dass vielmehr eine vierfach perspectivische Lage das Maximum ist. Mz.

H. Schröter. Ueber perspektivisch liegende Dreiecke.
Clebsch Ann. II. 553-565. 1870.

Die Resultate sind im Wesentlichen dieselben, wie in der vorhergehenden Arbeit; die Methode ist aber mehr elementar und synthetisch. Am Schlusse zeigt der Verfasser, wie man ein imaginäres Dreieck ABC erhält, das mit einem gegebenen abc auf alle sechs Arten gleichzeitig perspectivisch liegt: Man verbinde die Ecken a, b, c mit einem beliebigen Punkte A und nenne die Schnittpunkte

$$(Aa, bc) = \alpha, \quad (Ab, ca) = \beta, \quad (Ac, ab) = \gamma,$$
$$(\beta\gamma, bc) = \alpha', \quad (\gamma\alpha, ca) = \beta', \quad (\alpha\beta, ab) = \gamma',$$

so liegen $\alpha' \beta' \gamma'$ in einer Geraden L und es giebt einen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck abc umschrieben ist und $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$ zu Tangenten in den Ecken hat; die beiden (imaginären) Tangenten aus A an diesen Kegelschnitt treffen die Gerade L in zwei solchen Punkten B und C, dass die beiden Dreiecke abc und ABC auf alle möglichen sechs verschiedenen Arten gleichzeitig perspectivisch liegen. Mz.

D. Tessari. Sopra la divisione degli angoli in un numero dispari qualunque di parti uguali. Ann. de Mus. industr. di Torino 1870.

Nach Recapitulirung der Chasles'schen Lösung des Problems der Dreitheilung des Winkels (Traité des sections coniques) sucht der Verfasser die Methode auf die Theilung eines Winkels in eine ungerade Anzahl n von gleichen Theilen auszudehnen. Er betrachtet dazu zwei Bündel von Geraden so bestimmt, dass der Winkel, der von 2 Strahlen des einen Bündels eingeschlossen ist, ein constantes Vielfaches des Winkels ist, den zwei entsprechende Strahlen des andern einschliessen, und bestimmt die Curve zwischen zwei gemeinsamen Punkten auf zwei entsprechenden Strahlen. Nachdem um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben und die Correspondenz der beiden erwähnten Bündel passend festgesetzt ist, liefern die Schnittpunkte der Curve der erzeugten Stellen mit dem genannten Kreise eine vollständige Lösung des Problems. Der Verfasser bemerkt ferner, dass diese Lösung nicht von grossem praktischen Nutzen sein könne, da sie die Schnittpunkte des Kreises mit der andern Curve nicht gebe. Jg. (O.)

K. Clifford. On the general theory of anharmonics. Proc. of the L. M. S. II. 3-6. 1869.

Zwischen den Distancen von irgend vier Punkten 1, 2, 3, 4, einer Geraden besteht die Identität:

$$12.34 + 13.42 + 14.23 \equiv 0.$$

Die Verhältnisse der Glieder dieser Identität ändern sich nicht durch Projection oder ganze lineare Transformation.

Wenn eine Gerade sich so bewegt, dass die Distancen ihrer

Schnittpunkte mit vier festen Geraden auf ihr einer Relation genügen von der Form:

$$\lambda.12.34+\mu.13.42+\nu.14.23=0,$$

so ist die Enveloppe der Geraden eine Curve zweiter Klasse, welche die vier gegebenen Geraden berührt. Diese drei bekannten Sätze mit den entsprechenden für vier Strahlen eines Büschels schliessen die ganze Theorie der anharmonischen Gebilde in der Geometrie einer Dimension, sowie ihre Anwendung auf die Geometrie zweier Dimensionen ein.

Bezeichnen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sechs Punkte einer Ebene, oder sechs Gerade einer Ebene, oder sechs Ebenen oder sechs Strahlen eines Strahlenbündels, so besteht zwischen den Distancen dreier (bezeichnet durch das Symbol 123) folgende Identität:

$$123.456+124.563+125.634+126.345\equiv 0,$$

aus welcher durch cyklische Vertauschung noch fünf andere abzuleiten sind.

Die Verhältnisse der Glieder in diesen Identitäten ändern sich nicht durch Projection oder ganze lineare Transformation.

In diesen beiden Sätzen sieht der Herr Verf. die ganze Theorie der anharmonischen Gebilde zweier Dimensionen. Dabei wird verstanden

unter der Distance dreier Punkte die Fläche ihres Dreiecks,

unter der Distance dreier Geraden einer Ebene der Projector ihres Dreiecks d. i. das Quadrat seiner Fläche dividirt durch das Product seiner Seiten,

unter der Distance dreier Ebenen der Sinus des Winkels zwischen einer und der Schnittlinie der beiden andern multiplicirt mit dem sinus des Winkels zwischen den beiden anderen (eine in Bezug auf die drei Ebenen symmetrische Grösse),

unter der Distance dreier zusammenlaufender Geraden im Raume der sinus zwischen einer Geraden und der Ebene der beiden anderen multiplicirt mit dem Sinus zwischen diesen beiden anderen.

Zwei endliche Strecken $11'$, $22'$ auf derselben Geraden heissen **harmonisch gelegen**, wenn

$$12.1'2'+12'.1'2=0.$$

Ist dies der Fall, und werden die Punktenpaare repräsentirt durch

$U=0$, $V=0$, so besteht zwischen den Ausdrücken U und V eine invariante Relation, welche bezeichnet wird durch $\square(UV)=0$, worin $\square(UV)$ den Coefficienten von $\lambda\mu$ in der Discriminante von $\lambda U+\mu V$ bedeutet.

Aehnliches wird ausgeführt für drei und vier Punktepaare.

Schz.

Chr. Wiener. Die mehrdeutigen Beziehungen zweier ebenen Gebilde auf einander. Clebsch Ann. III. 11-33. 1870.

Ein System von n Punkten in einer Ebene wird als die Gesammtheit oder als ein Theil der Schnittpunkte zweier Curven angesehen, wovon jede einem Curvenbüschel angehört. Besteht das Punktsystem nicht aus allen Schnittpunkten zweier Curven, ist also n kleiner als pq, wo p und q die Ordnung jener Curvenbüschel anzeigt, so kann man die übrigen Schnittpunkte, deren Anzahl $m=pq-n$ ist, dadurch bestimmt ausnehmen, dass man sie zu gemeinsamen Knotenpunkten beider Büschel macht. Die Grenzen, denen m, p, q, n in ihrer gegenseitigen Beziehung unterworfen sind, werden festgesetzt. Jeder Punkt in der Ebene α bestimmt somit ein Element aus dem Büschel p^{ter} Ordnung und ein Element aus dem Büschel q^{ter} Ordnung, welche mit jenem Punkt zusammen n bewegliche Schnittpunkte bedingen. Ist in analoger Weise in einer Ebene α' ein System von n' Punkten durch zwei Curvenbüschel bezüglich von der Ordnung p' und q' gegeben, so lassen sich beide Gebilde α und α' in Ansehung ihrer Punktsysteme derart auf einander beziehen, dass einem System von n Punkten in dem einen Gebilde eindeutig ein System von n' Punkten im anderen entspricht. Man hat zu dem Ende nur nöthig, das Büschel p^{ter} Ordnung auf das p'^{ter} Ordnung und das Büschel q^{ter} Ordnung auf das q'^{ter} Ordnung eindeutig durch Projectivität zu beziehen. Zwei derartig auf einander bezogene Gebilde α und α' sind der Gegenstand weiterer Untersuchung.

Sche.

H. G. Zeuthen. Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. Clebsch Ann. III. 150-156. Addition 323-324. 1870.

Der Riemann'sche Satz, auf Grund dessen Herr Clebsch die

Curven nach ihrem Geschlecht einzutheilen vorschlug, sagt bekanntlich aus, dass für zwei projectivische krumme Punktreihen das Geschlecht, d. h. der Werth von $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}-(\delta+\beta)$, gleich ist, wobei m die Ordnungszahl, δ die Zahl der Doppelpunkte, β die Zahl der Spitzen bedeutet. Einen geometrischen Beweis dieses Satzes hat Herr Zeuthen im 52. Bande der C. R. gegeben. Eine Verallgemeinerung dieses Beweises führt denselben zu einer Formel, aus welcher das Riemann'sche Theorem und einige andere Sätze abgeleitet werden. Sind nämlich die Punkte zweier Curven b_1 und b_2 derartig auf einander bezogen, dass jedem Punkte P_2 auf b_2 x_1 Punkte P_1 auf b_1, und jedem Punkte P_1 auf b_1 x_2 Punkte P_2 auf b_2 entsprechen, und ist y_1 resp. y_2 die Zahl der Stellen auf b_1 resp. b_2, wo zwei einem und demselben Punkte auf b_2 resp. auf b_1 entsprechende Punkte zusammenfallen, und ist endlich p_1 das Geschlecht von b_1, p_2 das von b_2, so besteht die auch für Raumcurven geltende Beziehung $y_1-y_2=2x_2(p_1-1)-2x_1(p_2-1)$.

Aus dieser Formel folgt der Riemann'sche Satz $p_1=p_2$ für $x_1=x_2=1$, $y_1=y_2=0$. Ferner ist daraus die von Herrn Chasles zuerst angegebene Formel $t=\mu.\nu_1+\nu.m_1$ abgeleitet, in welcher μ und ν die Charakteristiken eines Systems von Curven sind, und t angiebt, wieviel von ihnen eine gegebene Curve von der Ordnung m_1 und der Klasse ν_1 berühren. Eine andere Anwendung der obigen Formel ergiebt $m'=m_1(n^2-1)$, wenn m' die Ordnung der Einhüllenden aller Curven von der Ordnung n ist, welche durch $\frac{n(n+3)}{2}-2$ feste Punkte gehen, und eine feste Curve b_1 von der Ordnung m_1 berühren. Die Anzahl der durch jeden der festen Punkte gehenden Zweige der Curve b' findet sich gleich $m_1.n_1$.

Ein Zusatz zu dieser Abhandlung zeigt die Anwendbarkeit jener Formel, um bei der von Herrn Clebsch betrachteten Abbildung einer Fläche auf einer μ-fach zu denkenden Ebene, das Geschlecht p_1 derjenigen Curve auf der Fläche zu bestimmen, welche einer auf der Abbildungsebene gelegenen Curve vom Geschlechte p entspricht, wenn dieses Entsprechen derartig ist, dass

jeder Punkt der Ebene μ Punkten der Fläche angehört, während jeder Punkt der Fläche nur einen Punkt der Ebene liefert. Bezeichnet nun y_1 die Zahl der Schnitte der gegebenen Curve mit der Uebergangscurve, d. h. des geometrischen Ortes derjenigen Punkte der Ebene, welche zwei aufeinanderfolgende Punkte der Fläche darstellen, so ergiebt sich $p_1 = \frac{y_1}{2} + \mu . p - (\mu - 1)$.

Scht.

Emil Weyr. Geometrische Mittheilungen. Wien. Ber. LXI. 731-738. 819-827. 1870.

I. Es werden zwei ein-zweideutige Elementargebilde auf demselben Träger betrachtet, deren Verwandschaftsgleichung einmal:

$$\xi = l\eta^2$$

und das zweite Mal

$$\xi\eta^2 = k$$

ist. ξ bedeutet das Theilverhältniss eines Elementes des eindeutigen Gebildes, η bezieht sich ebenso auf das zweideutige; l und k sind Constanten. Eine Anwendung dieser Betrachtung findet auf Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte statt. Jede Gerade A durch den Doppelpunkt schneidet die Curve noch in einem Punkte a, und von diesem lassen sich an die Curve zwei Tangenten legen, welche in a_1 und a_2 berühren mögen. Verbindet man den Doppelpunkt mit a_1 und a_2, so erhält man zwei Gerade A_1 und A_2, welche der Geraden A entsprechen. Wird diese Construction für alle Curvenpunkte wiederholt, so erhält man zwei ein-zweideutige concentrische Strahlenbüschel um den Doppelpunkt. Es folgen nun Sätze, die sich auf die Abhängigkeit der Lage der Inflexionspunkte von der des Doppelpunktes und seiner beiden Tangenten beziehen.

II. Von einem beliebigen Punkte einer Curve der eben erwähnten Art gehen Strahlen aus; jeder schneidet die Curve in einem Punktepaar; verbindet man die Punktepaare mit dem Doppelpunkte, so erhält man eine quadratische Strahleninvolution. Die Gesetze derselben führen dann zu mehreren zum Theil schon bekannten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung. Mz.

E. Weyr. Ueber einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades. Borchardt J. LXXI. 18-28. 1870.

Die im Titel erwähnten Sätze Steiners sind im 32. Bande des Crelleschen Journals veröffentlicht, und lauten wie folgt: Unterwirft man irgend ein einer Curve dritter Ordnung eingeschriebenes Polygon der Bedingung, dass seine Seiten abwechselnd durch zwei auf derselben Curve liegende feste Fundamentalpunkte *P* und *Q* gehen, so hat ein solches Polygon entweder eine unendlich grosse Anzahl von Seiten, d. h. es schliesst sich nicht, dann schliesst sich keins von allen denselben Bedingungen genügenden Polygonen; oder es hat eine endlich grosse, und zwar grade Anzahl von Seiten, und dann schliesst sich auch jedes andere denselben Bedingungen unterworfene Polygon; dasselbe findet auch statt, wenn man eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, und letztere als die festen Punkte *P* und *Q* wählt.

Diese beiden Sätze, von denen der erste für Curven dritter Ordnung geltende, im Zusammenhange mit der Theorie der elliptischen Funktionen schon von Herrn Clebsch im 63ten Bande des Borchardt'schen Journals bewiesen ist, sind in der Abhandlung des Herrn Weyr aus einigen Eigenschaften der zwei und zweigliedrigen Verwandschaft geometrischer Elementargebilde abgeleitet. Herr Weyr nennt nämlich zwei Grundgebilde ersten Grades in dem Falle verwandt, wenn jedem Elemente des einen zwei Elemente des andern gesetzmässig zugeordnet sind. Zwei in solcher Beziehung zu einanderstehende ebene Strahlbüschel erzeugen demnach auf einer Geraden zwei ebenso verwandte Punktreihen, welche, wie analytisch nachgewiesen ist, vier entsprechende Punkte gemein haben. Da also auf jeder beliebigen Geraden vier Punkte existiren, in denen entsprechende Strahlen der beiden Strahlbüschel sich treffen, so erzeugen letztere eine Curve vierter Ordnung.

Die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlbüschel müssen Doppelpunkte dieser Curve werden, weil in jedem von ihnen

ein Strahl des andern Büschels seine beiden entsprechenden schneidet. Entspricht der die beiden Büschelmittelpunkte verbindende Strahl sich selber, so wird er ein Theil der erzeugten Curve, der übrige Theil also eine Curve dritter Ordnung, welche durch die beiden Büschelmittelpunkte gehen muss, weil diese Doppelpunkte des Erzeugnisses sind.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen wird ein Satz abgeleitet, aus welchem bei Berücksichtigung des Vorhergehenden sich die Richtigkeit der Steiner'schen Behauptungen unmittelbar ergiebt. Dieser Satz setzt voraus, dass bei der zwei- und zweigliedrigen Beziehung zweier Grundgebilde auf einander, in jedem derselben eine Gruppe von n Elementen so angegeben ist, dass sich die einem beliebigen Elemente der einen Gruppe zugeordneten zwei Elemente in der andern Gruppe befinden, und behauptet, dass dann unendlich viele solcher Paare von zugeordneten Gruppen existiren, jedes Element in einer derselben vorhanden ist und jede Gruppe nicht mehr und nicht weniger als n Elemente enthält. Dem hieraus ersichtlichen Beweise der Steiner'schen Sätze folgen Specialisirungen, also Theoreme über eingeschriebene Vierecke, Sechsecke u. s. w. Die von Steiner gemachte Bemerkung, dass analoge Sätze auch gelten, wenn man statt der Seiten von Polygonen Kegelschnitte nimmt, welche, abgesehen von den festen Punkten P und Q, sich sämmtlich in drei andern festen Punkten schneiden, und demnach nach Festlegung des ersten Kegelschnitts eindeutig bestimmt sind, ist nach des Verfassers Untersuchung nur für die Curven dritter Ordnung, nicht aber für die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in diesem Zusammenhange beweisbar. Schliesslich sind noch die Steiner'schen Sätze räumlich auf die Schnittcurve zweier Regelflächen zweiter Ordnung übertragen.

Scht.

Emil Weyr. Ueber Curvenbüschel. Wien. Ber. LXI. 82-88. 1870.

Durch rein geometrische Betrachtung werden einige Sätze über ein Curvenbüschel n^{ter} Ordnung, das durch $\frac{n(n+3)}{2}-1$ Punkte bestimmt ist, bewiesen. Die wichtigsten Sätze sind:

1) Unter den Curven eines Büschels n^{ter} Ordnung giebt es $3(n-1)^2$ Curven mit einem Doppelpunkte.

2) Durch jeden Punkt der Ebene eines Curvenbüschels n^{ter} Ordnung gehen $3n(n-2)$ Inflexionstangenten desselben.

3) Unter den Curven eines Büschels n^{ter} Ordnung giebt es drei solche, welche in einem der n^2 Scheitel einen Inflexionspunkt besitzen.

4) Unter den Curven eines Büschels n^{ter} Ordnung giebt es $n(n+1)-12$ solche, für welche ein Büschelscheitel der Berührungspunkt einer Doppeltangente ist. Mz.

A. Olivier. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven. Borchardt J. LXX. 156-163. 1869.

In dieser Abhandlung sind einige Eigenschaften von gewissen Bedingungen unterliegenden Curven abgeleitet. Diese Bedingungen und Eigenschaften sprechen im wesentlichen die Existenz von Punkten aus, die mehr als zwei Curven gemeinsam sind. Die aufgestellten Sätze beruhen auf dem von Herrn Chasles in den Comptes rendus des Jahres 1857 ausgesprochenen Theorem, dass, wenn die n^2 Basispunkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf einer Curve der $(n+n')^{ten}$ Ordnung liegen, es ein zu jenem Curvenbüschel der n^{ten} Ordnung projektivisches Curvenbüschel von der n'^{ten} Ordnung geben muss, dessen Basispunkte auch auf die Curve der $(n+n')^{ten}$ Ordnung fallen, und welches mit jenem durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente diese Curve höherer Ordnung erzeugt. Die Specialisirungen der allgemeinen Sätze auf Curven zweiter und dritter Ordnung ergeben zum Theil schon bekannte Sätze. Scht.

A. Olivier. Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven. Borchardt J. LXXI. 1-15. 1870.

Ist ein Curvenbüschel m^{ter} Ordnung projektivisch auf ein Curvenbüschel $(n-m)^{ter}$ Ordnung bezogen, so bildet die Gesammtheit der Schnittpunkte der entsprechenden Elemente dieser beiden Curvenbüschel bekanntlich eine Curve n^{ter} Ordnung, auf welcher auch die Basispunkte jedes der beiden Curvenbüschel liegen müssen. Betrachtet man nun umgekehrt die so erzeugte

Curve und auf ihr die Basispunkte des Curvenbüschels m^{ter} Ordnung als gegeben, so ist die Lage der Basispunkte des Curvenbüschels $(n-m)^{ter}$ Ordnung gewissen Gesetzen unterworfen, welche in der vorliegenden Abhandlung für $m=1$ und $m=2$ erörtert sind. Für $m=1$, d. h. den Fall, wo das erste der erzeugenden Curvenbüschel ein gewöhnliches Strahlbüschel ist, dessen Mittelpunkt gegeben ist, lässt die Aufgabe, die Curve n^{ter} Ordnung zu erzeugen, nur Eine Lösung zu, und das Gesetz, nach welchem die Basen der unendlich vielen miterzeugenden Curvenbüschel $(n-1)^{ter}$ Ordnung sich auf der erzeugten Curve vertheilen, ist aus folgender Construktion einer solchen Basis ersichtlich. Man lege durch den auf der Curve n^{ter} Ordnung K_1 gegebenen Mittelpunkt P des erzeugenden Strahlbüschels eine beliebige Curve K_2 von der n^{ten} Ordnung, und durch die n^2-1 Punkte, welche K_1 und K_2 ausser P gemeinsam sind, eine beliebige Curve von der $(2n-2)^{ten}$ Ordnung, welche dann K_1 ausser in jenen n^2-1 Schnittpunkten von K_1 und K_2 noch in

$$n(2n-2)-(n^2-1)=(n-1)^2$$

weiteren Punkten trifft, die nun zu Basispunkten des erzeugenden Curvenbüschels $(n-1)^{ter}$ Ordnung gewählt werden dürfen. Ist dagegen das erste der erzeugenden Büschel ein Kegelschnittbüschel, so erhält man die Basispunkte eines Curvenbüschels $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welches dem ersteren Büschel projektivisch ist und mit ihm die Curve n^{ter} Ordnung erzeugt, auf folgende Weise: Man legt durch die auf K_1 liegenden vier Basispunkte des Kegelschnittsbüschels eine andere Curve K_2 auch von der n^{ten} Ordnung, und durch die ausser jenen vier Punkten erhaltenen n^2-4 Schnittpunkte von K_1 und K_2 eine neue Curve von der $(2n-4)^{ten}$ Ordnung, welche K_1 in

$$n(2n-4)-(n^2-4)=(n-2)^2$$

neuen Punkten schneidet, welche Basispunkte eines der gesuchten Curvenbüschel werden dürfen.

Im Laufe dieser Untersuchung ergeben sich dem Verfasser noch manche andere Beziehungen zwischen Curven und Curvenbüscheln, die hier übergangen werden müssen. Scht.

A. Olivier. Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projektivische Curvenbüschel erzeugt wird. Borchardt J. LXXI. 195-196. 1870.

Um zu beweisen, dass die Durchschnittspunkte der Elemente eines Curvenbüschels von der m^{ten} Ordnung mit den entsprechenden Elementen eines ihm projektivischen Curvenbüschels von der n^{ten} Ordnung eine Curve von der Ordnung $m+n$ bilden, betrachtete man bisher immer die beiden Punktinvolutionen von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung, welche die Curvenbüschel auf einer beliebigen Geraden erzeugen und erschloss jene Ordnungszahl daraus, dass die gemeinsamen Punkte dieser Involutionen entsprechenden Curven angehören, und dass ihre Anzahl $m+n$ beträgt. In der Meinung, dass dieser Beweis der synthetischen Geometrie deshalb nicht genügen könne, weil er auf dem der Natur der Sache nach nur algebraisch zu beweisenden Satze beruht, dass zwei projektivische Punktinvolutionen vom m^{ten} und n^{ten} Grade auf einem geradlinigen Träger $m+n$ gemeinsame Punkte besitzen, setzt der Verfasser an die Stelle des angeführten Beweises den folgenden neuen, der dem Standpunkte der synthetischen Geometrie angemessener sein soll. Eine beliebige Curve des erzeugenden Curvenbüschels m^{ter} Ordnung hat mit der zu erzeugenden Curve, wie bekannt und leicht ersichtlich ist, die m^2 Basispunkte dieses Büschels gemein, dann aber auch die $m.n$ Punkte, in welchen sie von der ihr in dem Büschel n^{ter} Ordnung entsprechenden Curve geschnitten wird. Eine Curve m^{ter} Ordnung hat also mit der erzeugten Curve $m^2+mn=m(m+n)$ Punkte gemein, schneidet also, wie der Verfasser schliesst, eine gerade Transversale in $m+n$ Punkten, und ist daher von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Referent erlaubt sich, eine kurze Bemerkung über den Vorzug dieses neuen Beweises hinzuzufügen. Will man in die synthetische Geometrie, welche im eigentlichen Sinne, wenn n nicht specialisirt ist, gar keine Curven n^{ter} Ordnung kennt, Curven n^{ter} Ordnung, d. h. solche, welche von jeder Geraden der Ebene in n Punkten geschnitten werden, einführen, so muss man, um

rein geometrisch weiter bauen zu können, der analytischen Geometrie den Satz entlehnen, dass drei Flächen m^{ter}, n^{ter} und p^{ter} Ordnung $m.n.p$ gemeinsame Punkte, oder specieller zwei ebene Curven von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung $m.n$ gemeinsame Punkte besitzen. Dieser Satz und eine seiner Umkehrungen, dass nämlich eine Curve, welche mit einer Curve m^{ter} Ordnung $m(m+n)$ Punkte gemein hat, die Ordnungszahl $m+n$ hat, sind in jenem neuen Beweise von Herrn Olivier angewandt. Der Vorzug des letzteren ist also wohl darin zu suchen, dass er auf das unumgänglich algebraische Fundament der Theorie der nicht specialisirten Curven n^{ter} Ordnung unmittelbarer aufgebaut ist, als der alte Beweis, welcher den Satz von den gemeinsamen Punkten zweier Punktinvolutionen voraussetzt.

Scht.

E. Weyr. Ueber Involutionen höherer Grade. Borchardt J. LXXII. 285-292. 1870.

In diesem Aufsatze ist die Theorie der Involutionen n^{ten} Grades darauf ausgedehnt, dass als Träger der Involutionen nicht mehr gerade Punktreihen oder gewöhnliche Strahlenbüschel, sondern Curven oder Strahlenbüschel zweiter Ordnung erscheinen. Es ergiebt sich, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte einer auf einem Kegelschnitt liegenden Punktinvolution n^{ten} Grades eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse umhüllen, welche von Herrn Weyr Involutionscurve genannt wird, und weiter, dass die $n(n-1)$ Seiten zweier einem Kegelschnitt eingeschriebenen n-Ecke eine und dieselbe Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse berühren, was für $n=3$ und $n=4$ bekannte Sätze giebt. Damit hängt zusammen, dass, wenn ein n-Eck einem Kegelschnitt eingeschrieben und einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse umgeschrieben ist, es jedesmal unendlich viele n-Ecke von derselben Beschaffenheit giebt. Zu jedem dieser Sätze giebt es einen reciproken. Von den sonst noch entwickelten Theoremen möge nur noch dies hier Platz finden, dass die Ecken eines vollständigen einem Kegelschnitt umgeschriebenen n-Seits mit den Ecken eines ebendemselben umgeschriebenen $\overline{n-1}$-Seits $(n-1)^2$ Punkte bilden, deren Lage zu einander eine solche ist, dass sie als die sämmtlichen Durchschnittspunkte zweier

Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgefasst werden können. Dieser Satz gewinnt dadurch an Interesse, dass er für $n=4$ zu einer einfachen Construction des neunten Basispunktes eines Curvenbüschels dritter Ordnung Veranlassung giebt, jedoch nur in dem speciellen Falle, dass sechs der gegebenen acht Basispunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden. Man hat nämlich von den beiden übrigen Punkten aus die Tangenten an den Kegelschnitt zu legen, welcher die vier Seiten des Vierseits und die Verbindungslinie dieser beiden Punkte berührt. Zwei von diesen vier Tangenten bilden die Verbindungslinie, und die beiden übrigen schneiden sich in dem gesuchten neunten Punkte der durch die acht gegebenen Punkte bestimmten Basis eines Curvenbüschels dritter Ordnung. Scht.

Emil Weyr. Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. Wien. Ber. LXI. 600-606. 1870.

Durch Betrachtung eines Curvenbüschels dritter Ordnung, das durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(U_3+\lambda V_3)+(U_2+\lambda V_2)=0,$$

wo λ ein veränderlicher Parameter; U_3, V_3, U_2, V_2 homogene Functionen resp. 3ten und 2ten Grades der gewöhnlichen (Cartesischen) Coordinaten sind, — gelangt der Verfasser, indem er den Curven dritten Grades einmal einen Kegelschnitt und eine Gerade und das andere Mal ein System dreier Geraden substituirt zur Lösung folgender Aufgabe: Eine cubische Involution ist durch zwei Elemententripel gegeben; man soll sie vervollständigen (d. h. man soll zu irgend einem Elemente das mit ihm zur selben Gruppe gehörige Elementenpaar construiren).

Weiterhin wird durch Betrachtung eines Curvenbüschels n^{ter} Ordnung, das durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(U_n+\lambda V_n)+(U_{n-1}+\lambda V_{n-1})=0,$$

wo λ dieselbe, U_n, V_n, U_{n-1}, V_{n-1} analoge Bedeutungen wie vorher haben, nachstehende Aufgabe gelöst:

Von einer Punktinvolution n^{ten} Grades auf einer Transversale sind zwei Punktgruppen gegeben, man soll zu irgend einem Punkte (der Transversale) jene $n-1$ Punkte construiren, welche mit ihm eine Gruppe der Involution bilden. Mz.

A. Cayley. Note on a relation between two circles. Quart. J. XI. 82-83. 1870.

Die acht Berührungspunkte gemeinschaftlicher Tangenten zweier Kreise (oder auch Kegelschnitte) liegen bekanntlich auf einem Kegelschnitte (1).

Durchläuft ein Punkt P eine Gerade, so durchläuft der jedesmalige Durchschnitt P' der Polaren von P in Bezug auf zwei Kreise einen Kegelschnitt (2). Damit nun sowohl der Kegelschnitt (1) als auch derjenige (2) in dasselbe System zweier Geraden zerfallen, ist nothwendig und hinreichend, dass die Kreise gleich sind und sich berühren. Mz.

H. Bésant. Conic Sections. Treated geometrically. London, Bill and Daldy. 1869.

W. P. Turnbull. Review. Messenger V. 118-220. 1870.

Uebersicht über: „Properties of conic sections proved geometrically. Part. I. The Ellipse by the Rev. H. G. Day. M. A". Glr. (O).

Archer Hirst. On the degenerate forms of conics. Proc. of the L. M. S. II. 166-173. 1869.

Durch die Abhandlungen „On Special Forms of Conics" (Quarterly Journ. vol. 8) und „On Curves, which satisfy given Conditions" (Philosophical Transact. 1868, s. Fortschr. d. M. I. p. 164) von Herrn Cayley wird der Herr Verfasser veranlasst, die degenerirten Kegelschnitte noch einmal in Bezug auf die Continuität ihrer Elemente (Punkte und Tangenten) zu untersuchen, um die genaue, vollständige Form derselben festzustellen. Indem der Hr. Verf. sowohl die Entstehung eines Kegelschnittes durch zwei projectivische Strahlbüschel, als diejenige durch zwei projectivische Punktreihen zu Grunde legt, gelangt er zu dem wohl meist bekannten Resultat, dass die drei allein möglichen degenerirten Formen von Kegelschnitten in ihrer Vollständigkeit sind:

1) Das Punkt-Paar (reell oder imaginär): seine Tangenten sind die sämmtlichen Strahlen zweier einfacher Strahlbüschel, seine Punkte bilden eine Doppelreihe (Strecke), begrenzt durch die Centra der Büschel;

2) Das Linien-Paar (reell oder imaginär): seine Punkte erfüllen zwei gerade Punktreihen und seine Tangenten bilden ein Doppel-Büschel (Winkel), begrenzt durch die Träger der Punktreihen;

3) Der Linien-Paar-Punkt: seine Tangenten erfüllen ein Doppelbüschel und seine Punkte eine Doppelgerade, welche einer der Strahlen des Büschels ist.

Die beigefügten Noten kleiden die Frage nach der Realität der Doppel-Elemente zweier aufeinanderfallender Punktreihen oder concentrischer Strahlbüschel in bekannter Weise in analytisches Gewand. Schz.

St. Smith. On some geometrical constructions. Proc. of L. M. S. II. 85-100. 1869.

Ein Kegelschnitt A wird einem Kegelschnitt B harmonisch um- oder inschrieben genannt, wenn A einem in Bezug auf B sich selbst conjugirten Dreieck resp. um- oder inschrieben ist. Besonders durch Anwendung des Satzes:

„Wenn A harmonisch umschrieben ist B, so ist das Homologie-Centrum eines dem A inschriebenen Dreiecks und seines Polar-Dreiecks in Bezug auf B ein Punkt von A“ (Salmon Conic Sections p. 326) werden dann folgende Aufgaben gelöst:

„Den Kegelschnitt zu construiren, welcher durch $5-n$ gegebene Punkte geht und n gegebenen Kegelschnitten harmonisch umschrieben ist, wenn $n=2, 3, 4, 5$.“

Repräsentirt die Gleichung:

$$\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \cdots + \lambda_{k+1} \sigma_{k+1} = 0,$$

worin $\sigma_k = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes in Punktcoordinaten darstellt und $k = 1, 2, 3, 4$ sein kann, ein System k^{ter} Ordnung von Kegelschnitten, so wird das durch dieselbe Gleichung in Liniencoordinaten repräsentirte System von Kegelschnitten ein Tangentialsystem k^{ter} Ordnung genannt, und der auch von Herrn Cremona (Introduzione etc.) mitgetheilte Satz: „Wenn zwei Kegelschnitte einem dritten harmonisch umschrieben sind, so ist ihm jeder Kegelschnitt des durch die ersten beiden bestimmten Büschels harmonisch umschrieben“ zu folgendem Satz erweitert:

„Alle Kegelschnitte eines Systems k^{ter} Ordnung umschreiben

harmonisch alle Kegelschnitte eines gewissen Tangentialsystems von der Ordnung $4-k$; und umgekehrt: Alle Kegelschnitte, welche diejenigen eines gegebenen Tangentialsystems von der Ordnung $4-k$ harmonisch umschreiben, bilden ein System von der Ordnung k."

Dieses einem gegebenen System entsprechende Tangentialsystem heisst das „contravariante" System des gegebenen. Analytische und geometrische Beziehungen dieser beiden Systeme werden angedeutet.

Wenn $k=2$, stellen dieselben zwei contravariante Kegelschnittnetze vor; die Cayley'sche Curve des gegebenen Netzes $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ ist die Hesse'sche Curve des contravarianten Netzes; wie die Cayley'sche Curve die Involutionen-Enveloppe des gegebenen Netzes, so ist die Hesse'sche der Ort der Strahlinvolutionscentra des contravarianten Netzes.

Ein beliebiger Kegelschnitt des contravarianten Netzes eines gegebenen $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ wird gefunden, wenn man den Kegelschnitt construirt, welcher zwei beliebige Gerade berührt und den drei Kegelschnitten $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ harmonisch inschrieben ist.

Jedes Kegelschnittnetz kann aber auch angesehen werden als das Polarsystem einer gewissen Curve dritten Grades, welche die Fundamentalcurve des Netzes heisst. Dadurch entstehen die Aufgaben:

„das Polarsystem

a) der Fundamentalcurve eines gegebenen Netzes $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ und seines contravarianten Netzes

b) der Hesse'schen Curve des Netzes $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ und seines contravarianten Netzes (der Cayley'schen von $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$),

c) derjenigen Curven dritten Grades, für welche eine gegebene Curve die Hesse'sche ist,

zu construiren."

Zuletzt noch die Aufgabe: „Die Inflexionspunkte einer Curve dritten Grades zu bestimmen, deren Polarsystem gegeben ist."

Schz.

R. Niemtschik. Ueber die Construktion der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien. Wien. Ber. LIX. 39-47. 1869.

R. Niemtschik. Ueber die Construktion der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittslinien. Wien. Ber. LIX. 481-494. 1869.

Denkt man sich durch zwei in einer Ebene gegebene Kegelschnitte zwei Oberflächen zweiter Ordnung gelegt, so sind die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte zugleich die Schnittpunkte der den beiden Oberflächen gemeinsamen Raumcurve mit der Ebene der Kegelschnitte. Darauf beruhen die in den beiden Abhandlungen mit den Mitteln der orthogonalen Projection ausgeführten Constructionen der Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes mit einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf einer seiner Axen liegt, oder zweier Kegelschnitte, wenn eine Axe des einen in dieselbe gerade Linie mit einer Axe des anderen fällt. Diese Linie wird als Projectionsaxe und die Ebene der beiden Kegelschnitte als verticale Projectionsebene festgesetzt. Die Kegelschnitte sind in allen Fällen bestimmt: die Ellipse durch ihre beiden reellen Axen, die Hyperbel durch Asymptoten und Scheitel, die Parabel durch Axe, Scheitel und einen beliebigen anderen Punkt derselben.

In der ersten Abhandlung wird durch den so bestimmten Kegelschnitt ein Cylinder, ein Rotations-Kegel oder Hyperboloid und durch den Kreis diejenige Kugel gelegt, deren Mittelpunkt in der Cylinder- resp. Rotationsaxe liegt, so dass die beiden Oberflächen sich in zwei Kreisen schneiden, deren Ebenen auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht stehen, deren horizontale Projectionen also gerade Linien sind; die Schnittpunkte derselben mit der Projectionsaxe sind die verticalen Projectionen der gesuchten Schnittpunkte, welche, da der Kreis gegeben ist, dadurch gefunden sind.

Die Construction der Schnittpunkte einer Ellipse mit einem anderen Kegelschnitt wird dadurch, dass beide auf eine andere Ebene so projicirt werden, dass die Projection der Ellipse ein Kreis ist, auf diese erste Aufgabe zurückgeführt. Die Schnittpunkte von Hyperbeln und Parabeln unter einander werden gefunden, indem durch dieselben zwei concentrische Kegel gelegt werden, von denen der eine ein Rotationskegel ist, und die denselben gemeinsamen Kanten, sowie die Schnittpunkte dieser mit

der Zeichnungsebene construirt werden. In einigen Fällen ergiebt sich eine einfachere Construction, wenn einer der beiden Kegel oder beide durch Rotations-Hyperboloide ersetzt werden, so dass die Schnittcurve aus zwei parallelen Kreisen besteht.

Schz.

R. Staudigl. Construktion eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird. Wien. Ber. LXI. 607-620. 1870.

Die Doppelpunkte zweier aufeinanderliegender und gleichlaufender projectivischer Punktreihen bilden sowohl mit den Punkten g, h, als auch mit den entsprechenden g_1, h_1 (nach der Steiner'schen Bezeichnung, Steiner Entw. d. Abh. geom. Gest. § 15, Schroeter, Theorie der Kegelschn. p. 31) vier harmonische Punkte. Die Punktpaare g, h und g_1, h_1 bestimmen demnach ein Punktsystem, welches dieselben beiden Doppelpunkte hat oder repräsentirt, als die gegebenen beiden aufeinanderliegenden Punktreihen. Die Darstellung zweier imaginärer Punkte durch zwei aufeinanderliegende gleichlaufende Punktreihen kann daher immer ersetzt werden durch ein Punktsystem. Hiervon wird in den folgenden Constructionen Gebrauch gemacht, wenn es gilt die Doppelelemente eines Punktsystems zu construiren, welches durch zwei Punktepaare bestimmt ist, von denen eines oder beide imaginär werden können und dann durch je zwei gleichlaufende conjectivische Punktreihen vertreten sind. Ersetzt man nämlich die letzteren in der angegebenen Weise durch ein Punktsystem, wobei man, wenn das eine Punktpaar reell ist, auch dieses als die Doppelpunkte eines Punktsystems zu betrachten hat, so hat man nur die den beiden Punktsystemen gemeinsamen entsprechenden Elemente zu construiren. Dadurch gelingt es dem Herrn Verfasser die in der Theorie der Kegelschnitte v. Schroeter (p. 237 bis 239) mitgetheilte Lösung der Aufgaben: „Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn derselbe durch vier Punkte und eine Tangente, oder durch drei Punkte und zwei Tangenten bestimmt ist“ auch auf die Fälle auszudehnen, in welchen zwei oder vier der gegebenen Elemente imaginär sind. Diese Constructionen zeichnen sich durch grössere Einfachheit vor den von Chasles (Traité des

sections coniques pag. 47, 226, 236) angegebenen Lösungen derselben Aufgaben aus. Schz.

F. GRELLE. Ueber ein geometrisches Kennzeichen der Art der durch 5 gegebene Tangenten, durch 5 gegebene Punkte u. s. w. bestimmten Kegelschnitte. Schlömilch Z. XIV. 388-392. 1869. Mz.

J. WOLSTENHOLME. On certain properties of confocal conics, and theorems derived therefrom. Quart. J. X. 285-288. 1869.

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf ein System confocaler Kegelschnitte umhüllen, wie bekannt, eine feste Parabel. Der Verfasser beweist zunächst, dass die entsprechenden Normalen dieselbe Parabel umhüllen. Er stellt darauf einige Sätze über confocale Kegelschnitte auf, die, durch Projection und das Dualitätsprincip verallgemeinert, folgendermassen lauten:

1) Sind von einem festen Punkte O Tangenten OP, OQ an irgend einen der demselben Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte gelegt, so umhüllt die Gerade PQ einen Kegelschnitt, der die Diagonalen des Vierecks berührt; wird von P die zweite Tangente an diese Enveloppe gezogen, so theilen diese Tangente und OP jede der Diagonalen harmonisch.

2) Ist AA' eine der Diagonalen des Vierecks, so geht der durch $OPQAA'$ bestimmte Kegelschnitt immer durch einen vierten festen Punkt O' so, dass sowohl $A'O$, $A'O'$ als auch AO, AO' die beiden anderen Diagonalen harmonisch schneiden.

3) Wenn eine feste Gerade O irgend einen der einem Viereck $ABCD$ umschriebenen Kegelschnitte in zwei Punkten PQ schneidet, so treffen sich die Tangenten in diesen Punkten auf einem festen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte EFG der Seiten DC, AD; CA, BD und AB, CD geht; ferner, wenn die Tangente an P den Kegelschnitt wieder in P' trifft, so sind die Büschel $E(APP'B)$, $F(BPP'C)$, $G(CPP'A)$ harmonisch.

4) Der Kegelschnitt, welcher die feste Gerade O, zwei Seiten BC, AD des Vierecks und die Tangenten in P, Q berührt, hat eine vierte feste Tangente, welche mit O zusammen BC, AD harmonisch theilt.

Zum Schluss werden diese Sätze für confocale Parabeln besonders ausgesprochen. He.

Anonymus. The nine-point's conic of any tetrastigm. Messenger V. 1-2. 1869.

Die Mittelpunkte der 4 Seiten eines vollständigen Vierecks (Tetrastigm, welches durch 4 Punkte bestimmt ist,) liegen auf einem Kegelschnitt, welcher zugleich die Durchschnitte gegenüberliegender Seiten enthält.

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn einer der 4 gegebenen Punkte innerhalb des von den andern gebildeten Dreiecks liegt, anderweitig eine Hyperbel. Es wird eine Parabel, wenn ein Punkt im Unendlichen liegt. Sind endlich zwei gegenüberliegende Seiten rechtwinklig zu einander, so erhält man den Feuerbach'schen Kreis für ein Dreieck, dessen Höhepunkt die vierte Ecke des Vierecks bildet. He.

E. Folie. Note sur quelques théorèmes de géométrie supérieure. Bull. de Belg. (2). XXVIII. 87-102. 1869.

Die Arbeit enthält Verallgemeinerungen zweier Sätze, die Herr Chasles in seinem: „Traité des sections coniques“ p. 16 und 24 gegeben und dort als Satz des Pappus und Zusatz zu demselben bezeichnet hat. Die Verallgemeinerungen lauten: 1) „Wenn ein vollständiges Vierseit in einen Kegelschnitt eingeschrieben ist, so stehen die Producte der Entfernungen eines Punktes der Curve von jedem Paar entgegengesetzter Seiten und den beiden Diagonalen in einem constanten Verhältniss.“ 2) „Wenn ein vollständiges Vierseit einem Kegelschnitt umschrieben ist, so stehen die Producte aus den Entfernungen einer Tangente von zwei entgegengesetzten (d. h. nicht auf einer Seite liegenden) Ecken untereinander in constantem Verhältniss.“ Der Beweis dieser Sätze beruht auf zwei speciellen Sätzen von H. Chasles in Beziehung auf die Produkte der Entfernungen eines Curvenpunktes von den Schenkeln eines eingeschriebenen Winkels, und in Beziehung auf die Produkte der Entfernungen einer Tangente bezüglich eines umschriebenen Winkels. Die obigen Sätze werden zum Schluss auch auf n-Ecke ausgedehnt. O.

O. Tognoli. Teoremi di Chasles sopra la proprietà dei sistemi di coniche (μ, ν) che servono di base alla determinazione del numero di queste curve, che soddisfanno a cinque condizioni qualunque. Pisa. Valenti. 1869.

Vollständige Beweise der Sätze, die Herr Chasles der Pariser Akademie der Wissenschaften (C. R. LVIII, LIX) mitgetheilt, aber grösstentheils ohne Beweis ausgesprochen hat. Jg. (O.)

C. Montag. Ueber ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. Breslau, Impfer. 1870.

A. de Morgan. On the conic octagram. Proc. of L. M. S. II. 26-29. 1869.

Von dem Satz: „Wenn von den n^2 Schnittpunkten zweier Curven n^{ter} Ordnung $n.p-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ in einer Curve der p^{ten} Ordnung liegen $(p<n)$, so liegen auf derselben noch weitere $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Schnittpunkte (welche der Hr. Verf. adjuncte Punkte nennt), und die übrigen $n(n-p)$ liegen auf einer Curve der $(n-p)^{\text{ten}}$ Ordnung" werden die speciellen Fälle, wenn $p=2$ oder $n-2$ ist und die Curven n^{ter} Ordnung aus je n Geraden bestehen, besprochen. Wie hieraus für $n=3$ das Pascal'sche Sechseck hervorgeht, so kann jedes beliebige einem Kegelschnitt eingeschriebene $2n$-eck erhalten werden, und zwar auf zweifache Weise, je nachdem man die Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung oder 5 den Kegelschnitt bestimmende Punkte als gegeben annimmt. In letzterem Falle kommt es darauf an, die anderen $2n-5$ Punkte zu construiren, so dass die übrigen Schnittpunkte auf einer passenden Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Ist $n<5$, so giebt es keine adjuncte Punkte, und dann ist die zweite Construction gerade die Umkehrung der ersteren. Es werden beide Constructionen angegeben für $n=3$ und $n=4$, die erstere auch für $n=5$. Als Leitcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung werden $n-2$ Gerade gewählt. Schz.

J. P. Taylor. Geometrical proof of M. Faure's and some kindred theorems. Quart. J. X. 129-132. 1869.

Geometrischer Beweis folgender Sätze;

Ist ein Kreis S einem Dreieck eingeschrieben, das einem Kreise S' selbst conjugirt ist, so kann ein Dreieck in den Kreis S' eingeschrieben werden, das dem Kreise S selbst conjugirt ist.

Durch Projection erhält man denselben Satz für einen beliebigen Kegelschnitt.

Das Quadrat der Tangente, die vom Mittelpunkt eines Kegelschnitts an einen Kreis gezogen wird, der ein dem Kegelschnitt selbst-conjugirtes Dreieck umschreibt, ist constant und gleich der Quadratsumme der Halbaxen des Kegelschnitts. Dies wird dann für die gleichseitige Hyperbel und für die Parabel specialisirt.

Ferner: Ist eine Kugel einem Tetraeder umschrieben, das einer Fläche zweiten Grades selbst conjugirt ist, so ist das Quadrat der Tangente vom Mittelpunkte der Fläche an die Kugel gleich der Quadratsumme der Halbaxen der Fläche. Mz.

A. Knitterscheid. Ein neues Supplement zum Problem des Apollonius II. Pr. Eupen, 1869.

Der Verfasser hatte in einer früheren Arbeit, die auf der Verbindung des Chordalpunktes der drei gegebenen Kreise mit den 12 Polen der 4 Aehnlichkeitsaxen beruhende Lösung des Apollonius'schen Tactionsproblems in der Ebene auf Kegelschnitte für den Fall ausgedehnt, dass alle Kegelschnitte, sowohl die gegebenen wie die gesuchten, einen und denselben festen Punkt als einen ihrer Brennpunkte besitzen. Diese Ausdehnung ist ermöglicht durch den Satz, dass in Bezug auf einen festen Fundamentalkreis die Polarcurve jedes Kreises der Ebene ein Kegelschnitt ist, dessen einer Brennpunkt in den Mittelpunkt des Fundamentalkreises fällt, dass in Bezug auf diesen der Pol der Chordale zweier Kreise der Schnittpunkt zweier gewisser gemeinsamer Tangenten ihrer Polarkegelschnitte ist, dass zwei sich berührende Kreise zwei sich berührende Polarkegelschnitte haben etc.

Diese zweite Arbeit überträgt in ganz entsprechender Weise die analoge Construction der 16 Berührungskugeln an vier gegebenen Kugeln auf Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche einen festen Punkt zum gemeinsamen Brennpunkt haben, und löst die 15 Aufgaben, eine Rotationsfläche zweiter Ordnung zu construiren, welche einen Punkt F zu einem ihrer Brennpunkte

hat, f gegebene Rotationsflächen mit dem gemeinsamen Brennpunkte F berührt, e gegebene Ebenen zu Tangentialebenen nnd p gegebene Punkte zu Flächenpunkten hat, wo $f+e+p=4$ ist. Die durch Specialitäten der Lage bedingten Modificationen werden eingehend und erschöpfend discutirt. Scht.

W. K. Clifford. Synthetic proof of Miquel's theorem. Messenger V. 124-141. 1870.

Miquel's Satz lautet: „Wenn 5 gerade Linien und 5 Parabeln so gezogen sind, dass jede immer 4 berührt, so liegen die Brennpunkte der Parabeln auf einem Kreise."

Die Arbeit ist in 4 Abschnitte getheilt: I. Ueber die Formen gewisser Curven. Ein Complex von Punkten der sechsten Ordnung ist mit einem Complex von Linien der dritten Classe durch die Bedingung verbunden, dass sie resp. Punkte oder Tangenten einer gewissen Curve sind. Es werden die Modifikationen der beiden Complexe als Folgen der Veränderungen der Curve betrachtet. II. Der Focus der Doppel-Parabel. Die Doppelparabel wird als eine Curve 3ter Classe definirt, die eine Linie im Unendlichen als Doppeltangente hat. Gefunden wird eine geometrische Eigenschaft des Focus, die als Mittel zur Construction der Curve dient. III. Der Ort der Foci aller Doppelparabeln, welche 5 feste Linien berühren. IV. Entwickelungen.

Glr. (O.)

Eduard Weyr. Ueber ähnliche Kegelschnitte. Wien. Ber. LXII. 261-270. 1870.

Der Verfasser erwähnt zuerst einige Lehrsätze von ähnlichen Kegelschnitten, — und zwar solche, die sich auf projectivische Eigenschaften stützen, — und giebt dann einen Beweis des Lehrsatzes, der sich in Steiner's: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc. pag. 305 No. 39 vorfindet. Die in diesem Lehrsatze besprochene Curve 4ten Grades wird construirt. Mz.

St. Smith. On the focal properties of homographic figures. Proc. of the L. M. S. II. 196-248. 1869.

Ω und ω seien zwei collineare ebene Systeme in perspecti-

vischer Lage, und es werde mit $\Omega_1\,\omega_1$ die Schnittlinie derselben, mit S das Centrum der Perspective, und mit OY und $o'y$ die der unendlich entfernten Geraden entsprechenden, der Voraussetzung nach stets endlichen Geraden bezeichnet. Die von S auf die Halbirungsebenen der Winkel zwischen Ω und ω gefällten Lothe treffen Ω in F_1 und F_2, ω in den resp. entsprechenden Punkten f_1 und f_2. Diese Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass je zwei entsprechende Winkel in ihnen gleich sind, werden die Brennpunkte (foci) der beiden Systeme genannt. Die entsprechenden Drehrichtungen des einen Paares sind, von S aus gesehen, gleich und diese heissen ähnliche Brennpunkte, die des anderen Paares sind entgegengesetzt und diese heissen unähnliche Brennpunkte. Die entsprechenden Geraden F_1F_2 und f_1f_2 heissen die Focal-Axen; die endlichen Strecken F_1F_2 und f_1f_2 derselben werden resp. durch die Geraden OY und $o'y$ halbirt in den Punkten O und o', welche die Centra der beiden Systeme genannt werden und resp. den unendlich entfernten Punkten der Focal-Axen in den Ebenen ω und Ω entsprechen.

Die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte in jeder Ebene wird der Parameter dieser Ebene genannt und resp. mit C und c bezeichnet. Diejenige Ebene durch S, welche der Ebene der Geraden OY und $o'y$ parallel ist, schneidet die Systeme in zwei entsprechenden Geraden Ω_2 und ω_2, welche eben so wie die in der Schnittlinie vereinigten Geraden Ω_1 und ω_1 senkrecht stehen auf den Focalaxen und die Eigenschaft haben, dass je zwei entsprechende Strecken in ihnen einander gleich sind; sie heissen die Aequisegmentalaxen oder die Cyclischen Linien. Mit Rücksicht auf den entsprechenden Richtungssinn heissen das eine Paar die ähnlichen, das andere die unähnlichen Axen. Dieselben liegen symmetrisch in Bezug auf das Centrum ihrer Ebene und so, dass die halbe Entfernung derselben gleich dem Parameter der anderen Ebene ist.

Nachdem so aus der perspectivischen Lage die ausgezeichneten Elemente und ihre relative Lage in jeder Ebene gefunden, werden dieselben bei allgemeiner Lage der homographischen Systeme bestimmt und construirt. Sind P_1, P_2, q_1, q_2 die imaginären unendlich entfernten Kreispunkte der Ebenen Ω und ω, und p_1, p_2,

Q_1, Q_2 ihre resp. in ω und Ω entsprechenden Punkte, so sind Y, F_1, F_2 und y, f_1, f_2 die drei reellen und sich entsprechenden Diagonalpunkte der beiden imaginären Vierecke $P_1P_2Q_1Q_2$ und $p_1p_2q_1q_2$ und darnach leicht zu construiren. Wenn man nun noch bestimmt, welches die entsprechenden Brennpunkte und die entsprechenden Drehrichtungen um dieselben sind, so ist es leicht, schnell zu jedem Punkt den entsprechenden zu construiren, in eindeutiger Weise, da die entsprechenden Richtungen entsprechender durch die Brennpunkte gehender Geraden mit den Focalaxen immer gleiche Winkel bilden. Zwei collineare ebene Systeme können auf vier verschiedene Arten homolog auf einander gelegt werden, da jedes Paar der Aequisegmentalaxen als Axe der Homologie und jedes Paar der Brennpunkte als Centrum der Homologie gewählt werden kann. Die Gleichheit der Parameter zweier homographischer Figuren ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit dieselben einer symmetrischen Lage fähig sind.

Sind R_1, R_2, r_1, r_2 die Radienvectoren entsprechender Punkte A, a resp. von den Brennpunkten F_1, F_2, f_1, f_2, so ist:

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{r_1}{r_2} = 0$$

$$(R_1 \pm R_2)(r_1 \mp r_2) = F_1F_2 \cdot f_1f_2 = 4Cc.$$

Die Kreise des Systems, von welchem F_1, F_2 die Grenzpunkte und OY die Radicalaxe (Potenzlinie) ist, werden durch die collineare Beziehung in Kreise desjenigen Systems transformirt, von welchem f_1, f_2 die Grenzpunkte und $o'y$ die Radicalaxe sind; sie heissen die Focalkreise der beiden Ebenen; die Radien entsprechender Kreise verhalten sich wie die Parameter.

Die inneren und äusseren Halbirungslinien der Winkel F_1AF_2 und f_1af_2 sind die Axen der entsprechenden Strahlbüschel in A und a, welche die entsprechenden rechten Winkel einschliessen, und zwar entspricht die äussere Halbirungslinie in A der inneren in a und umgekehrt. Die Bestimmung der Involutionen der entsprechenden gleichen und derjenigen der entsprechenden supplementären Winkel in entsprechenden Strahlbüscheln, ferner die Bestimmung der Involutionen gleicher und gleichgerichteter, sowie derjenigen gleicher und entgegengesetzt gerichteter entsprechen-

der Strecken vereinfacht sich durch Benutzung der Foci und Aequisegmental-Axen.

Alle confocalen Kegelschnitte in Ω mit den Brennpunkten F_1 und F_2 werden transformirt in confocale Kegelschnitte in ω mit den Brennpunkten f_1 und f_2, und zwar die Ellipsen in Hyperbeln und die Hyperbeln in Ellipsen. Krümmungsmittelpunkt und Evolute entsprechender confocaler Kegelschnitte entsprechen einander.

Diejenige unendlich kleine Ellipse in irgend einem Punkt A, welche das Bild eines unendlich kleinen Kreises um den entsprechenden Punkt a als Centrum ist, wird die Indicatrix des Punktes A genannt; sie ist ähnlich und ähnlich liegend mit derjenigen Ellipse, deren Hauptaxen die Normalen in A der in diesem Punkt sich schneidenden confocalen Kegelschnitte und resp. gleich den grösseren Axen derselben sind.

Analytisch kann die homographische Beziehung dargestellt werden sowohl in Cartesischen Coordinaten, bezogen in jeder Ebene auf die Focalaxen und die der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entsprechende Gerade als X- resp. Y-Axe durch die sogenannten Canonischen Gleichungen:

$$\begin{matrix} Xx = Cc \\ Yx = Cy \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} Xx = Cc \\ Xy = cY, \end{matrix}$$

als auch in elliptischen Coordinaten durch:

$$A_1 \lambda_1 = A_2 \lambda_2 = Cc,$$

wenn wir durch $A_2 = \frac{1}{2}(R_2 + R_1)$, $A_1 = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ die grösseren Halbaxen der confocalen Kegelschnitte durch A und a bezeichnen.

Die Halbaxen $M_2 . i$ und $M_1 . i$ der Indicatrix in A werden angegeben gleich:

$$\frac{A_1 A_2}{C.c} \cdot \frac{A_2}{C} \cdot i, \quad \frac{A_1 A_2}{C.c} \cdot \frac{A_1}{C} \cdot i \quad \text{oder} \quad \frac{X}{\lambda_2} i, \quad \frac{X}{\lambda_1} i \quad \text{oder}$$

$$\frac{A_2}{x} i, \quad \frac{A_1}{x} i,$$

wobei i den Radius des unendlich kleinen Kreises um a bezeichnet. Demnach verhalten sich die entsprechenden Flächenelemente in A und a wie $X^2 : \lambda_1 \lambda_2$ oder $A_1 A_2 : x^2$ oder $C^{\frac{1}{2}} X^{\frac{3}{2}} : c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$.

Die Krümmung aller Curven, welche einander in einem gegebenen Punkte berühren, wird durch die homographische Transformation in demselben Verhältniss geändert.

Ist demnach $D.i$ irgend ein Halbmesser der Indicatrix in A, so wird der Krümmungsradius einer Curve, welche diesen Halbmesser in A berührt, in dem Verhältniss von $D^2 : M_1 . M_2$ geändert werden. Es werden darauf in elliptischen Coordinaten die Differentialgleichungen für Curven aufgestellt, für welche der Krümmungsradius in jedem Punkt zu demjenigen des entsprechenden Punktes in demselben Verhältniss steht, ferner Curven von constanter Elongation, deren unendlich kleine Bogenelemente zu ihren entsprechenden in constantem Verhältniss stehen, und für Curven von gleicher Tangential-Deflexion, d. i. solche Curven, bei denen der von irgend zwei Tangenten gebildete Winkel gleich dem von den beiden entsprechenden Tangenten der entsprechenden Curve gebildeten Winkel ist.

Schliesslich werden die Bedingungen angegeben dafür, dass entsprechende Kegelschnitte ähnlich und ähnlich liegend oder nur ähnlich sind, Bedingungen, welche die enge Beziehung solcher Kegelschnitte zu den Focis und Aequisegmentallinien erkennen lassen.

Analoge Untersuchungen werden nun durchgeführt bei zwei projectivischen Strahlenbündeln S und s (Punkt-Figuren genannt). P und q seien die beiden unendlich kleinen Kugeln um S und s (die imaginären Kegel), welche sich nicht entsprechen sollen; dann seien Q und p die imaginären Kegel, welche diesen entsprechen. Es giebt in jedem Bündel ein und nur ein System von drei aufeinander senkrecht stehenden Geraden, deren entsprechende ebenfalls rechte Winkel bilden X, Y, Z, x, y, z; dies sind die Hauptaxen der Kegel Q und p und werden die Hauptaxen der beiden Bündel genannt. Da die vier imaginären Schnittlinien von P und Q und die vier imaginären gemeinsamen Tangentialebenen dieser beiden Kegel den vier Schnittlinien und den vier gemeinsamen Tangentialebenen von p und q entsprechen, so entsprechen die beiden reellen Cyclischen- oder Kreis-Ebenen C_1 und C_2 und die beiden reellen Focallinien F_1, F_2 von Q resp. den Kreisebenen c_1, c_2 und den Focallinien f_1, f_2 von p. Ist Y resp. y die Axe, in welcher die Kreisebenen sich schneiden, so ist XZ resp. xz die

Ebene der Focallinien. Sind C und c die spitzen Winkel F_1SX und f_1sx, dann ist der spitze Winkel, gebildet von YX resp. yx, mit jeder der Kreisebenen von Q und p das Complement von resp. c und C. Dies giebt Veranlassung zu reciproken Beziehungen zwischen den beiden Bündeln.

Die Winkel, gebildet von irgend zwei Ebenen, die sich in einer Focallinie von S schneiden, sind gleich den Winkeln zwischen den entsprechenden Ebenen, die sich in einer Focallinie von s schneiden; und ebenso bilden irgend zwei Strahlen einer Kreisebene von S und die entsprechenden Strahlen der Kreisebene von s gleiche Winkel. Um S sowohl als um s denke man sich Kugeln beschrieben mit dem Radius eins; ist nun A irgend ein Punkt auf der Kugeloberfläche von S, so wird von den zwei Punkten, in welchen der dem Strahl SA entsprechende Strahl die Kugel um s trifft, derjenige a als der dem A entsprechende festgesetzt, für welchen die entsprechenden Drehrichtungen um A und a von den Centren der Kugeln aus ähnlich erscheinen. Sind XYZ, xyz in solcher Weise eindeutig sich entsprechende Octanten, so sind die entsprechenden Drehrichtungen um die in ihnen befindlichen Foci ähnlich, und auch auf den entsprechenden Cyclischen Bögen sind dadurch die entsprechenden Richtungen bestimmt, wodurch man in den Stand gesetzt ist zu jedem Punkt und grössten Kreis der einen Kugel den entsprechenden Punkt und grössten Kreis der anderen eindeutig zu construiren.

Es werden darauf die Gleichungen der Homographie in sphärischen Coordinaten aufgestellt und in Bezug auf die entsprechenden confocalen und concyclischen sphärischen Kegelschnitte, auf die gleichen entsprechenden Bögen und Winkel, in Bezug auf die Indicatrix auf der Kugel, auf die Curven von gleicher Tangential-Deflexion und constanter Elongation, auf die Kreise, deren Mittelpunkt ein Brennpunkt ist, und die entsprechenden Kreise metrische Relationen aufgestellt. Zuletzt wird noch die Construction der Focallinien bei perspectivischer Lage der Bündel angegeben.

Im dritten Theile werden zwei collineare Räume S, s untersucht. Wir können auch hier aus der Fülle des Materials nur Einiges herausheben. Sind Ω und σ ihre unendlich entfernten

imaginären Kreise, welche sich nicht entsprechen sollen, ω, Σ die ihnen entsprechenden imaginären Kegelschnitte, von welchen angenommen wird, dass keiner ein Kreis sei, so sind Σ und ω ähnlich. Sind O, o' ihre Mittelpunkte, V, v' ihre Ebenen, X, Y, x', y' die unendlich entfernten Punkte ihrer Hauptaxen, Z, z' die unendlich entfernten Punkte senkrecht auf V und v', so werden OX, OY, OZ, $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ die Hauptaxen der beiden Räume, die allein sich entsprechenden Axen OZ und $o'z'$ (O und z', Z und o' sind entsprechende Punkte) die Focal-Axen genannt.

Die entsprechenden Drehrichtungen um entsprechende Gerade sind entweder sämmtlich ähnlich oder sämmtlich unähnlich. Σ und ω bestimmen zwei Systeme entsprechender confocaler Oberflächen zweiter Ordnung, für welche sie die imaginären Focal-Kegelschnitte sind. Die Brennpunkte der reellen Focal-Kegelschnitte in den Hauptebenen YZ und XZ, resp. $y'z'$, $x'z'$ sind die homographischen Foci dieser Ebenen (sämmtlich in der Z-Axe.) Den Ellipsoiden entsprechen zweischalige Hyperboloide und den einschaligen Hyperboloiden wieder einschalige Hyperboloide. Die Focallinien entsprechender Strahlenbündel P und p sind die Generatricen der durch P und p gehenden einschaligen Hyperboloide; daraus folgt: Irgend zwei entsprechende Generatricen zweier Hyperboloide der beiden confocalen Systeme sind die Axen von Ebenenbüscheln, deren entsprechende Winkel gleich sind. So ist es leicht, wenn ein Paar entsprechender Punkte und drei Paar entsprechender Generatricen der beiden Räume gegeben sind, zu jedem beliebigen Punkt den entsprechenden zu construiren. Die Cyclischen Ebenen der Strahlenbündel in P enthalten zugleich die Kreisschnitte der Indicatrix in P. Die Halbaxen der letzteren werden angegeben; ferner auch die Bedingung, dass die beiden Räume in symmetrische Lage gebracht werden können. Schliesslich folgt noch eine historische Anmerkung, in welcher unter Anderem die Auffassungen einiger Mathematiker erörtert werden, welche zu Resultaten gelangt sind, die von den hier entwickelten abweichen. Schz.

EDUARD WEYR. Ueber einen Satz von Steiner. Borchardt J. LXXI. 16-17. 1870.

Zum grössten Theil eine Wiederholung des § 12 (Nr. 67c) der Introduzione des Hrn. Cremona. Zuletzt wird aus dem Lehrsatz 6 dieses § 12, welcher von den Kegelschnitten handelt, die eine Curve dritter Ordnung fünfpunktig berühren, der Steiner'sche Satz von den dieselbe sechspunktig berührenden Kegelschnitten abgeleitet. Schz.

E. WEYR. Ueber Punktsysteme auf Curven 3ter Ordnung. Schlömilch Z. XV. 344-360. 1870.

Wenn C_4^3 eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt ist, so versteht man unter dem Doppelverhältniss von vier Punkten der Curve das Doppelverhältniss der vier Strahlen, welche den Doppelpunkt mit jenen 4 Punkten verbinden. Zwei Punktsysteme auf C_4^3 werden demnach projectivisch sein, wenn das Doppelverhältniss von 4 Punkten des einen Systems gleich ist dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Punkte des anderen Systems. Haben im Besonderen zwei derartige projectivische Punktsysteme die Eigenschaft, dass jedem Punkt der Curve immer derselbe Punkt entspricht, mag man ihn zu dem einen oder anderen System rechnen, so bilden beide Punktsysteme auf C_4^3 eine quadratische Involution. Als Grundlage für die folgenden Entwickelungen dienen nun dem Verf. die centralen Involutionen, die er dahin definirt: „Schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem und demselben auf der Curve C_4^3 liegenden Punkte 0, so ist die Involution eine centrale und der Punkt 0 heisst Centrum der Involution.“ Eine solche Involution ist bestimmt, sobald ein Paar entsprechender Punkte und das Centrum der Involution bekannt ist. Von diesen Gesichtspunkten aus entwickelt nunmehr Herr Weyr mit Leichtigkeit eine ganze Reihe von Eigenschaften der Curven C_4^3, auf die näher einzugehen an dieser Stelle zu weit führen würde. Schn.

E. WEYR. Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte. Clebsch Ann. III. 235-237. 1870.

In der vorliegenden Arbeit wendet der Verf. die von ihm

in Schlömilch Zeitschrift XV. 1870, (siehe p. 403) gegebene Betrachtungsweise der Curven C_4^3 auf die Sätze von den Steiner'schen Polygonen an, deren Herleitung sich für die vorliegende Curvengattung C_4^3, welche ein Doppelpunkt auszeichnet, sehr leicht ergiebt. Wenn t das Theilverhältniss ist, in welches ein Strahl T den Winkel der beiden Doppelpunktstangenten $D_1 D_2$ zerlegt, also der Werth $\frac{\sin D_1 T}{\sin D_2 T}$, so ist die Bedingung dafür, dass drei Punkte t_1, t_2, t_3 — jedem Werth t entspricht ein Punkt der Curve — in gerader Linie liegen durch die Relation bestimmt $t_1 . t_2 . t_3 = k$, wo k eine nur von der Curve C_4^3 abhängige Grösse ist. Um nun zu einem der Curve C_4^3 eingeschriebenen $2n$-Eck zu gelangen, gehe man von zwei willkürlichen Curvenpunkten t_1 und t_2 aus. Man verbinde einen beliebigen Punkt x_1 der Curve mit t_1, diese Verbindungslinie schneidet C_4^3 in einem dritten Punkte x_2, von diesem aus ziehe man durch t_2 und gelangt zu einem dritten Schnittpunkt x_3, diesen verbinde man wieder mit t_1 und man erhält als dritten Schnittpunkt den Punkt x_4 u. s. f. Ist man durch Fortsetzung des Verfahrens bis zu einem Punkt x_{2n+1} gelangt, so bestehen die Relationen:

$$\begin{array}{ll} t_1 x_1 x_2 = k, & t_2 x_2 x_3 = k, \\ t_1 x_3 x_4 = k, & t_2 x_4 x_5 = k, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ t_1 x_{2n-1} x_{2n} = k, & t_2 x_{2n} x_{2n+1} = k. \end{array}$$

Aus diesen folgt, dass $t_1^n x_1 = t_2^n x_{2n+1}$. Ist nun das Polygon geschlossen, d. h. fällt x_{2n+1} mit x_1 zusammen, so ist für t_1 und t_2 ausreichende und nothwendige Bedingung $t_1^n = t_2^n$. Je zwei Wurzeln der Gleichung $t^n = \varrho$, wo ϱ eine beliebige Grösse ist, bestimmen also zwei Punkte t_1 und t_2, für welche das Polygon sich schliesst. Diese, die Hauptpunkte der Steiner'schen $2n$-Ecke auf der Curve C_4^3, lassen sich demnach zu n-elementigen Gruppen vereinigen, welche eine Involution n^{ten} Grades, die die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes zu n-fachen Punkten hat, bilden.

Schn.

E. Weyr. Zur Geometrie der Curven 3ter Ordnung. Schlömilch Z. XV. 383-387. 1870.

Eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt wird,

bezogen auf die Doppelpunktstangenten als Axen, dargestellt werden durch eine Gleichung von der Form $mxy = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Eine gerade Linie durch den Doppelpunkt $y = tx$ schneidet die Curve noch in einem Punkte p, dessen Coordinaten sind $x = \frac{mt}{a + bt + ct^2 + dt^3}$, $y = \frac{mt^2}{a + bt + ct^2 + dt^3}$. Jedem t entspricht ein Punkt p der Curve und jedem Punkt p der Curve ein Werth t. Die Grösse t nennt der Verf. den Parameter des entsprechenden Curvenpunkts. Bildet man das Product der Parameter der $3n$ Schnittpunkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit C_4^3, so ist dies gleich der n^{ten} Potenz einer constanten nur von der Curve dritter Ordnung abhängigen Grösse. Dieser Satz, dessen Ableitung sich sehr einfach ergiebt, lässt vielfache interessante Anwendungen zu. Als Beispiele mögen einige der nächstliegenden dienen. Eine willkürliche Gerade schneidet C_4^3 in 3 Punkten t_1, t_2, t_3 und es ist $t_1 t_2 t_3 = k$, wo k eine nur von C_4^3 abhängige Grösse ist. Berührt die Gerade die Curve in t_1, während sie sie in t_2 schneidet, so ist $t_1^2 t_2 = k$ und daher $t_1 = \pm\sqrt{\frac{k}{t_2}}$, daher giebt es von t_2 aus zwei Tangenten, deren Berührungspunkte $+\sqrt{\frac{k}{t_2}}$ und $-\sqrt{\frac{k}{t_2}}$ zu den Doppelpunktstangenten harmonisch liegen. Ist j ein Inflexionspunkt, so ist $j^3 = \varkappa$, daher $j_1 = \sqrt[3]{\varkappa}$, $j_2 = \alpha\sqrt[3]{\varkappa}$, $j_3 = \alpha^2\sqrt[3]{\varkappa}$, wo α die imaginäre Cubikwurzel der Einheit ist. Es giebt demnach auf C_4^3 drei Inflexionspunkte und, da $j_1 j_2 j_3 = \varkappa$, so liegen dieselben auf einer Geraden. Es leuchtet ein, dass die Betrachtungsweise ein fruchtbares Hülfsmittel zur Lösung der meisten Fragen ist, die sich auf Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt beziehen.

Schn.

Eduard Weyr. Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Classe. Prag. Ber. 1869. 3-16.

Der Verfasser definirt zuerst projectivische Grundgebilde erster Stufe (Strahlenbüschel, etc.), betrachtet dann zwei solche gleichartige Grundgebilde auf demselben Träger, und beweist einmal durch Rechnung und hierauf durch geometrische Con-

struction, dass, wenn man eine Folge von Elementen so bestimmt, dass jedem Elemente, zum ersten Gebilde gerechnet, das darauf folgende im zweiten Gebilde entspricht, man sich immer mehr einem der beiden Doppelelemente nähert. Eine Anwendung hiervon wird am Schlusse auf Curven dritter Ordnung und Classe gemacht. Von einem beliebigen Punkte einer solchen Curve kann man nur eine Tangente an die Curve ziehen; ferner schneidet jede Tangente einer solchen Curve diese noch in einem Punkte, welcher der zum Berührungspunkte gehörige Tangentialpunkt heisst. Es wird nun folgender Satz bewiesen: Construirt man eine Folge von Punkten einer solchen Curve: α_1, α_2, ... so, dass jeder Punkt der Tangentialpunkt des vorhergehenden ist, so nähert man sich immer mehr und mehr dem Rückkehrpunkte der Curve; ist dagegen jeder Punkt aus dieser Reihe der Tangentialpunkt des nachfolgenden, so kommt man immer mehr zum Inflexionspunkte der Curve. Das reciproke Theorem wird noch hinzugefügt. Mz.

H. Durège. Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehn. Schlömilch Z. XIV. 368-371. 1869.

Die Construction der allgemeinen Curven dritter Ordnung durch projectivische Beziehung eines Kegelschnittsbüschels auf ein Strahlbüschel ist umständlich und lässt die Gestalt der erzeugten Curve nur wenig erkennen. Weit leichter wird die Sache, wenn man statt der allgemeinen Curven dritter Ordnung diejenigen betrachtet, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen.

Der Verfasser giebt eine Construction solcher Curven dritter Ordnung. Er verlegt zunächst zwei Basispunkte des Kegelschnittsbüschels in die imaginären Kreispunkte, wodurch das Kegelschnittsbüschel in ein System von Chordalkreisen übergeht. Dann benutzt er 2 von Eckhardt aufgestellte Sätze, nämlich: 1) Zieht man aus den Punkten a_1, a_2, in welchen eine der reellen Asymptote parallele Gerade die Curve schneidet, zwei Gerade, welche die Curve auf's Neue resp. in b_1, b_2 und c_1, c_2 treffen, so liegen die letzteren 4 Punkte jedesmal auf einem Kreise. — Dieser

Satz wird aber dahin specialisirt, dass statt der zur reellen Asymptote parallelen Geraden diese Asymptote selbst gewählt wird, wodurch a_1 ins Unendliche rückt.

2) Nennt man den Durchschnitt der beiden imaginären Asymptoten C, so gilt Folgendes: Die Punkte c_1, c_2 in welchen eine durch den Asymptotendurchschnitt A (der für a_2 steht, während a_1 im Unendlichen) gehende Gerade die Curve schneidet, liegen stets auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt C ist.

Die Construction ist nun diese: Man nimmt b_1, b_2, A und C beliebig an, legt durch b_1, b_2 einen beliebigen Kreis, verbindet dessen Mittelpunkt M mit C und zieht aus A eine Senkrechte zu CM, so trifft diese den Kreis um M in zwei Curvenpunkten c_1 und c_2. Indem man durch b_1, b_2 nach und nach andere Kreise legt, erhält man beliebig viele Curvenpunkte. A darf nicht auf der Geraden b_1, b_2 liegen, und — soll die Curve bestimmt sein — C nicht auf der Geraden, auf welcher die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise sind. Mz.

F. D. Thomson. Notes on the geometry of a cubic curve. Messenger V. 27-30. 1869.

Es wird gezeigt, wie man mit Hülfe des Lineals allein unendlich viele Punkte einer Curve dritter Ordnung construiren kann, wenn ein Punkt P der Curve und die Berührungspunkte der Tangenten, die man von P an die Curve ziehen kann, gegeben sind.

Die nöthigen Sätze sind ohne Beweise gegeben. In Bezug auf diese wird auf eine frühere Arbeit des Verfassers (Messenger III. 15) verwiesen. He.

H. J. E. Smith. Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, et Appendice. Brioschi Ann. (2) III. 112-116, 218-243. 1869.

H. Kortum. Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1869.

Die erste und die dritte der oben genannten Abhandlungen sind mehr oder weniger wörtliche Abdrücke zweier Schriften,

zwischen denen im Jahre 1868 von der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin der aus dem Steiner'schen Legat ausgeschriebene Preis getheilt wurde. Die zweite Abhandlung von Herrn Smith enthält in Form von Noten Ausführungen und Erläuterungen zur ersten. —

Die Preisaufgabe hatte die geometrische Feststellung der fundamentalen Hülfsmittel verlangt, welche zur constructiven Lösung solcher Probleme nöthig sind, die auf cubische Gleichungen führen, und ferner die Durchführung einzelner bestimmter Probleme, namentlich aber der Aufgabe: „Wenn 13 Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen 3 Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen ein System von 16 Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades bilden.“ Die Lösung sollte auch die Fälle berücksichtigen, bei welchen einige der gegebenen Punkte imaginär vorausgesetzt sind. — Hierdurch war der Gang für beide Schriften ziemlich genau vorgezeichnet. Beide Verfasser haben, wie dies in der Natur der Sache liegt, die Aufgaben des dritten und des vierten Grades unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte aufgefasst, und sind darauf ausgegangen, nachzuweisen, dass jedes geometrische Problem, welches 3 oder 4 Lösungen hat, durch lineare Construction zurückgeführt werden kann auf die Auffindung der Durchschnittspunkte eines im Voraus gezeichneten festen Kegelschnitts mit einem Kreise, ganz analog dem von Steiner angegebenen Verfahren, die elementaren Constructionen mit Hülfe des Lineals allein unter Voraussetzung eines einzigen vorher gezeichneten festen Hülfskreises auszuführen. Die Methoden, durch welche dies erreicht wird, obwohl im Prinzip übereinstimmend, weichen im Einzelnen vielfach von einander ab, die Behandlung der speciellen, die Fundamentalpunkte eines Büschels von Curven vierten Gerades betreffenden Aufgabe ist bei beiden Verfassern ganz verschieden. Im Folgenden sollen zunächst die Abhandlungen von Herrn Smith und dann im Vergleich damit die von Herrn Kortum besprochen werden.

I. Die Abhandlung von Herrn Smith zerfällt in drei Theile

1) die geometrischen Constructionen in der Ebene aus imaginären Daten.

2) Beweis des Descartes'schen Theorems, dass jedes Problem dritten oder vierten Grades mit Lineal und Cirkel gelöst werden kann, wenn im Voraus ein fester Kegelschnitt, oder auch nur ein beliebig kleiner Bogen desselben gezeichnet vorliegt (Descartes, Géometrie livre III — Oeuvres de Descartes, ed. Cousin vol V, p. 409)

3) Anwendung auf mehrere besondere Probleme, vorzüglich auf das von der Akademie gestellte.

Erster Theil. Der Verf. nennt ein Paar conjugirter imaginärer Elemente in der (reellen) Ebene eine Dyade (Punktdyade und Strahlendyade); eine Punktdyade liegt auf einer reellen Geraden, ihrer Axe, eine Strahlendyade geht durch einen reellen Punkt, ihr Centrum. Jede Dyade ist definirt durch eine elliptische Involution, deren Träger die Axe oder das Centrum ist, ist also geometrisch bestimmt durch zwei Paar reeller conjugirter Elemente dieser Involution, deren Paare sich selbstverständlich gegenseitig trennen. Aus dieser Definition folgt zunächst, dass durch jeden imaginären Punkt in der Ebene eine und nur eine reelle Gerade geht, und dass jede imaginäre Gerade einen und nur einen reellen Punkt enthält. Hat man nun auf der Geraden A die Punktdyade $a_1 a_2$ oder, was dasselbe ist, die sie vertretende Involution, und irgend einen Punkt p, so kann man den Strahlenbüschel mit dem Centrum p perspectivisch auf die involutorische Punktreihe auf A beziehn, und erhält so einen involutorischen Büschel dieser repräsentirt eine durch den Punkt p gehende Strahlendyade, die man definirt als das Strahlenpaar, welches den reellen Punkt p mit jedem der beiden Punkte $a_1 a_2$ verbindet. Vermöge dieser Definition ist der Sinn der Aufgabe, einen reellen Punkt mit einem imaginären durch eine Gerade zu verbinden, und der der reciproken Aufgabe, den Durchschnitt einer reellen Geraden mit einer imaginären zu bestimmen, geometrisch festgestellt. Hat man ferner 2 Punktdyaden $a_1 a_2$, auf der Axe A, und $b_1 b_2$, auf der Axe B; so ist bekannt, dass es zwei involutorische Büschel p und q giebt, die zu beiden Involutionen auf A und B perspectivisch liegen. Die Punkte p und q (die Homologiecentra) sind mit Lineal und Cirkel zu construiren. Der involutorische Büschel in p repräsentirt eine Strahlendyade $P_1 P_2$,

und es folgt aus den früheren Definitionen, dass jeder der beiden Strahlen P_1 und P_2 einen Punkt der Dyade $a_1 a_2$ mit einem der Dyade $b_1 b_2$ verbindet. Dasselbe gilt von der Strahlendyade $Q_1 Q_2$, die durch den involutorischen Büschel in q bestimmt ist. Soll durch zwei imaginäre Punkte eine Gerade eindeutig bestimmt sein, wie dies die Analogie fordert, so muss eine Gerade Q als Verbindung zweier anderer Punkte aufgefasst werden, als eine Gerade P; so dass etwa die Gerade P_1 ginge durch $a_1 b_1 p$, Q durch $a_1 b_2 q$, P_2 durch $a_2 b_2 p$ und Q_2 durch $a_2 b_1 q$. Wenn man demnach a_1 und a_2 als fest gegeben betrachtet, so entspricht einer Vertauschung der Homologiecentra p und q eine Vertauschung der imaginären Punkte b_1 und b_2; oder durch die Vertauschung von p und q wird die Dyade $b_1 b_2$ mit $b_2 b_1$ vertauscht. Vermöge des Dualitätsprinzips gelten entsprechende Beziehungen zwischen zwei Strahlendyaden. Man findet für diese 2 Homologieaxen, denen man in analoger Weise verschiedenen Sinn beilegen kann.

Im Zusammenhange hiermit sucht der Verfasser nun ein Mittel auf, um die Vieldeutigkeit möglichst zu beschränken, welche durch die conjugirten Werthe auftritt. In der ersten Abhandlung sucht er dies dadurch zu erreichen, dass er alle vorkommenden Dyaden durch eine feste Hülfsdyade und die Art der Homologie definirt, welche zwischen dieser und der gegebenen existirt. Dieser Weg ist indessen umständlich, und es bleibt das Bedenken unerledigt, ob die zu dem Zwecke angegebene Construction zwischen zwei Dyaden dieselbe Homologie liefert, durch welche Zwischenglieder man auch dazu gelangt. Begrifflich vollkommen scharf ist dieselbe Frage in der zweiten Abhandlung des Verfassers Note III pg. 220 erledigt. Der Verf. zeigt hier, dass das anharmonische Verhältniss zwischen den Elementenpaaren der Involutionen benutzt werden kann, um den Unterschied in der Art der Homologie zweier Dyaden zu fixiren, und wird so dazu geführt, die Identität seiner Auffassung mit derjenigen festzustellen, welche von Staudt in seiner Geometrie der Lage der Betrachtung imaginärer Gebilde zu Grunde gelegt hat. Die beiden Homologiecentra p und q sind nämlich in Bezug auf die Axen A und B wesentlich dadurch zu unterscheiden, dass, wenn ein Punkt

auf A sich in einem bestimmten Sinne bewegt, die beiden in Beziehung auf die Centra p und q perspectivischen Punkte auf B sich in einander entgegengesetztem Sinne bewegen. Man kann also die Dyade $b_1 b_2$ von der entgegengesetzten $b_2 b_1$ dadurch unterscheiden, dass man auf der Axe B ausser der die Dyade repräsentirenden Involution noch einen bestimmten Richtungssinn fixirt. So ist die Homologie zweier Punktdyaden eindeutig bestimmbar, und das Analoge lässt sich für zwei Strahlendyaden durchführen. Hierdurch sind die beiden Fundamentalaufgaben gelöst: Zwei imaginäre Punkte durch eine Gerade zu verbinden, und den Durchschnittspunkt zweier imaginärer Geraden zu construiren. (Ist eins von den gegebenen Elementen reell, so ist die Aufgabe noch einfacher, wie leicht ersichtlich.) Daraus folgt nun die Ausführbarkeit aller linearen Constructionen, unter der Voraussetzung, dass eine beliebige Anzahl der gegebenen Elemente imaginär ist. Es werden nun zum Schluss des ersten Theils mehrere Constructionen wirklich ausgeführt, so dass sich die praktische Anwendbarkeit dieser Betrachtungen vollkommen bestätigt. Dergleichen Beispiele, bei denen die Elemente beliebig reell oder imaginär vorausgesetzt werden, sind: „Zu drei Punkten auf einer Geraden den vierten harmonischen zu finden." — „Wenn fünf Punkte (Tangenten) eines Kegelschnitts gegeben sind, beliebig viele Punkte (Tangenten) zu construiren." — „Wenn ein reeller Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt zu bestimmen." — „Wenn durch fünf imaginäre Punkte ein Kegelschnitt gelegt ist und durch ihre fünf conjugirten ein zweiter, die reellen Kegelschnitte des durch sie bestimmten Büschels zu construiren." Als letztes Beispiel dient die Aufgabe: „Wenn vier Dyaden imaginärer Punkte ($a_1 a_2$ $b_1 b_2$ $c_1 c_2$ $d_1 d_2$) gegeben sind, den neunten Punkt ϑ zu bestimmen, durch welchen alle Curven dritten Grades des durch jene acht Punkte bestimmten Büschels hindurchgehn." —

Die Behandlung des Imaginären weicht zwar in der vorliegenden Abhandlung nicht wesentlich von der durch von Staudt in die Geometrie eingeführten ab, wie dies der Verf. selbst anerkennt. Auch fehlt die Behandlung der imaginären Gebilde im

Raume, da der Verf. seinem Zwecke entsprechend nur von Gebilden in der reellen Ebene handelt. Da indessen dieser Gegenstand an sich von grossem Interesse ist, und da die Abhandlung des Verfassers, namentlich wegen der darin gegebenen Beispiele wohl ganz besonders geeignet scheint, zur Klärung der Vorstellungen über das Imaginäre in der Geometrie beizutragen, so hielt es Referent für nöthig, auf diesen ersten Theil der Arbeit ausführlicher einzugehen.

Zweiter Theil. Es wird als selbstverständlich angenommen, dass jedes Problem vierten Grades zurückgeführt werden kann auf die Auffindung der vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, und da diese bestimmt sind, wenn das beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche harmonische Dreieck (conjugirte Tripel) und je zwei Punkte jedes Kegelschnitts gegeben sind, so bleibt die Aufgabe zu lösen:

„Wenn zwei Kegelschnitte S_1 S_2 durch je fünf ihrer Punkte bestimmt sind, und ausserdem ein fester Kegelschnitt Σ in der Ebene gezeichnet vorliegt, das den Kegelschnitten S_1, S_2 gemeinschaftliche harmonische Dreieck mit Lineal und Zirkel allein zu construiren."

Der Verf. giebt zwei Methoden ausführlicher, welche beide auf der Transformation eines ebenen Systems durch collineare Verwandtschaft und auf der Bestimmung der Kreise in Kegelschnittnetzen beruhen. Bei der ersten wird das dem — beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen — harmonischen Dreieck umschriebene Netz, bei der zweiten das Netz betrachtet, für welches dasselbe Dreieck harmonisch ist.

Dritter Theil. Der dritte Theil enthält zunächst die Aufgabe: „Von einem gegebenen Punkte P die Normalen auf einen vollständig beschriebenen Kegelschnitt zu fällen." Es wird mit Hülfe der Methode des zweiten Theils die Joachimsthal'sche Lösung des Problems reproducirt. Der Verf. bespricht dann allgemein diejenigen Probleme, bei welchen die Glieder zweier Büschel verknüpft sind durch eine Gleichung

$$f(\lambda\,\mu) = 0,$$

in welcher λ und μ die Coefficienten sind, durch welche in jedem Büschel ein Glied bestimmt wird, und f eine ganze rationale

Function vierten Grades von λ und μ darstellt, die entweder in Bezug auf jede einzelne vom zweiten, oder in Bezug auf eine vom dritten, in Bezug auf die andere vom ersten Grade ist. Gewisse hierbei häufig vorkommende Fragen finden durch die Methoden des Verf. ihre constructive Erledigung. Endlich wird ausführlich die von der Akademie gestellte Aufgabe behandelt, aus dreizehn gegebenen Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades (1, 2, 3, ... 13) die drei andern (14, 15, 16) zu construiren. Der Verf. benutzt die Erzeugung der Curven vierten Grades durch einen Büschel von Curven dritten Grades und einen projectivischen Strahlenbüschel, um drei besondere Curven vierten Grades des betrachteten Büschels zu construiren, deren jede noch durch einen Punkt geht, welcher mit den Punkten 1 bis 7, und je einem aus den übrigen gewählten, z. B. 8, 9, 10 zusammen die Fundamentalpunkte eines Büschels dritten Grades bildet. Vermöge einer einfachen anharmonischen Relation findet sich alsdann eine Curve dritten Grades, welche durch die drei Centra der Strahlenbüschel und durch gewisse andere Punkte hindurchgeht, und von der sich beweisen lässt, dass sie auch die neun Fundamentalpunkte 8, 9, 10, ... 14, 15, 16, enthält. Durch Wiederholung desselben Verfahrens mit passender Vertauschung der gegebenen Punkte erhält man eine zweite Curve dritten Grades durch die Punkte 7, 9, 10, ... 14, 15, 16, welche mit der ersten noch einen bekannten Punkt gemein hat. Die Aufgabe ist somit darauf reducirt, die drei unbekannten Durchschnittspunkte 14, 15, 16 dieser beiden Curven dritten Grades zu finden. Diese Aufgabe ist von Chasles gelöst; sie lässt sich in ganz analoger Weise darauf reduciren, die drei Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu construiren, welche durch einen bekannten Punkt gehn. Alle anzuwendenden Constructionen bis auf die letzte sind linear. Eine Discussion der speciellen Fälle und die Berücksichtigung des Imaginären schliesst die interessante Abhandlung.

Die Arbeit von Herrn Kortum besteht aus zwei Abhandlungen. Auf eine allgemeine Betrachtung des Imaginären geht der Verf. nicht ein, er verweist vielmehr in dieser Hinsicht auf von Staudt, da durch dessen Untersuchungen der Unterschied

zwischen imaginären und reellen Daten in der Geometrie aufgehoben sei.

Die erste Abhandlung behandelt dasselbe allgemeine Problem, wie der zweite Theil der Abhandlung von Herrn Smith, schlägt aber zunächst einen Weg ein, der dort nur kurz angedeutet und beim Normalenproblem angewendet war. Ist nämlich ein fester Kegelschnitt Σ vollständig gezeichnet gegeben, und sind zwei andere Kegelschnitte S_1, S_2 durch eine hinreichende Anzahl von Punkten bestimmt; so transformirt der Verfasser das ebene System in ein affines, so dass S_1 in Σ übergeht und die Mittelpunktscurve des Büschels $S_1 S_2$ in eine gleichseitige Hyperbel, dass also der transformirte Büschel einen Kreis enthält, der zu construiren ist. Den Durchschnittspunkten dieses Kreises mit Σ entsprechen im ursprünglichen System die gesuchten Durchschnittspunkte von S_1 und S_2. Diese Lösung ist reell nur durchführbar, wenn die Mittelpunktscurve des Büschels $S_1 S_2$ eine Hyperbel ist. Ist dies nicht der Fall, so wird das System zunächst durch eine allgemeinere collineare Relation in ein anderes transformirt, welches die verlangte Eigenschaft hat. Für den Fall, dass S_1 und S_2 nur imaginäre Durchschnittspunkte haben, lässt sich die Methode zwar anwenden, führt aber zu keiner constructiven Lösung. Der Verf. betrachtet in diesem Falle ebenfalls das Polardreieck und zwei ihm umschriebene Kegelschnitte, die sich in vier Punkten schneiden, deren einer vorher bekannt ist; so dass die Lösung in diesem Falle mit der von Herrn Smith gegebenen im Allgemeinen übereinstimmt. Es ist zum Schluss noch auf die algebraische Bedeutung der gegebenen Methoden hingewiesen.

Die zweite Abhandlung löst die von der Akademie gestellte Aufgabe, ausgehend von der Erzeugung der Curven vierten Grades durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel. Hieraus wird die Construction einer solchen Curve durch vierzehn gegebene Punkte abgeleitet. Wenn diese Construction unbestimmt wird, so muss der vierzehnte ein nothwendiger sein, und dies führt zur Aufsuchung der drei nothwendigen Punkte. Der Verfasser steigt zur allgemeinen Lösung auf durch die speciellen Fälle, in denen drei Doppelpunkte, oder zwei, oder einer be-

züglich statt neun, sechs oder drei einfacher Punkte gegeben sind, und in welchen sich die Lösung wesentlich vereinfacht. Der allgemeinste Fall wird zurückgeführt auf die Aufgabe:

„Wenn gegeben ein Punkt p und neun Punkte 1, 2, ... 9; ferner neun Elemente eines einfachen Gebildes $\alpha_1 \dots \alpha_9$ (z. B. neun Strahlen eines Büschels), drei Punkte x, y, z zu finden, so dass die neun Glieder des Kegelschnittbüschels $(pxyz)$ durch die neun Punkte 1, 2, ... 9 projectivisch sind den neun Elementen $\alpha_1 \dots \alpha_9$.“ — A.

A. Olivier. Ueber die Erzeugung solcher geometrischer Curven, welche durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven bestimmt sind. Schlömilch Z. XIV. 209-249. 1869.

Die nächste Veranlassung zur Abfassung vorliegender Schrift war, wie der Verf. bemerkt, ihm durch die von der königlichen Akademie zu Berlin ausgeschriebene Preisfrage gegeben, welche folgendes Problem unter anderem zur Construction vorlegt: „Wenn dreizehn Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von sechzehn Durchschnittspunkten zweier Curven der vierten Ordnung bilden.“ Wie man sieht, handelt es sich bei dem Problem um die Construction unbekannter Durchschnittspunkte gegebener Curven, und da derartige Probleme dadurch zu lösen sind, dass man Curven von möglichst niederer Ordnung construirt, welche sich in den unbekannten Schnittpunkten treffen, so ist der Zusammenhang des Themas, welches Herr Olivier behandelt, mit jener Preisfrage ersichtlich. Aber die vorliegende Untersuchung hat noch eine tiefer greifende Bedeutung. Ist nämlich eine Curve K der n^{ten} Ordnung durch eine genügende Anzahl reeller Punkte gegeben, so lassen sich immer zwei projectivische Curvenbüschel niederer Ordnung angeben, welche durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente die Curve K erzeugen. Sind aber unter den die Curve K bestimmenden Punkten auch imaginäre, welche nur als Durchschnittspunkte gegebener Curven darstellbar sind, so versagen die bekannten Principien über Curvenerzeugung ihren

Dienst, und hier ist die Lücke, die auszufüllen die vorliegende Schrift einen bedeutsamen Beitrag liefert.

Ist eine Curve K der n^{ten} Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ reelle Punkte gegeben, so können immer nach Theoremen von Chasles und Jonquières zwei projectivische Curvenbüschel der n'^{ten} und n''^{ten} $(n'+n''=n)$ Ordnung festgestellt werden, welche durch den Durchschnitt entsprechender Elemente die vorgelegte Curve erzeugen. Den Verf. beschäftigt zunächst der Specialfall, bei welchem das eine Curvenbüschel von der Ordnung $n-1$, das andere ein Strahlenbüschel ist. In diesem Fall lassen sich von den gegebenen Punkten der Curve K willkürlich $p=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ zu Basispunkten der Büschel wählen, die übrigen sind durch die Bedingung zu bestimmen, dass die entsprechenden Elemente die Curve K erzeugen. Ist der Mittelpunkt des Strahlenbüschels ein bekannter Punkt der Curve, so besitzt das Problem eine einzige Auflösung, welche von Härtenberger in der Abhandlung: „Ueber die Erzeugung geometrischer Curven“ (Borchardt J. LVIII 54) gegeben worden ist; ist das nicht der Fall, so hat das Problem der Curvenerzeugung mehrere Auflösungen, mit denen sich der Verf. nunmehr eingehender beschäftigt.

Von den $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkten $b_1 b_2 \dots b_p\ a_1 a_2 \dots a_{2n-1}$, welche die Curve n^{ter} Ordnung bestimmen, können, wie gesagt, $p=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ willkürlich zu Basispunkten des Curvenbüschels $(n-1)^{ter}$ Ordnung gewählt werden; es seien dies die Punkte $b_1 b_2 \dots b_p$. Diese nennt der Verf. „Grundpunkte“ des Curvenbüschels. Die übrigen unbekannten Basispunkte des Büschels fasst er zusammen unter dem Namen „Basisrest,“ es sind dies die Punkte $y_1 y_2 \dots y_{n-3} \| y_{n-2} \dots y_{s-1}$, wo s den Werth $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bezeichnet und der Doppelstrich diejenigen Basispunkte, welche eigentlich unbekannt sind, von denen trennt, welche mit jenen von selbst bestimmt sind, den sogenannten nothwendigen Basispunkten des Büschels. Bezeichnet x den Mittelpunkt des Strahlenbüschels, so können alle unbekannten Basispunkte, also $x,\ y_1 y_2 \dots y_{n-3} \| y_{n-2} \dots y_{s-1}$ durch die Bedingung gefunden werden, dass das anharmonische Verhältniss des Strahlenbüschels $x[a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$ gleich zu machen ist dem an-

harmonischen Verhältnisse des Curvenbüschels

$$(b_1\, b_2 \ldots b_p\, y_1\, y_2 \ldots y_{n-3} \| y_{n-2} \ldots y_{s-1})[a_1\, a_2 \ldots a_{2n-1}].$$

Diese Aufgabe besitzt, wie der Verf. zeigt, im Allgemeinen $s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedene Lösungen, so dass die projectivische Erzeugung der Curve K in diesem Fall auf s verschiedene Weisen möglich ist. Die s verschiedenen Mittelpunkte der Strahlenbüschel $P^1 P^2 \ldots P^s$ heissen nach dem Verf. die Projectionspunkte der Curve K; zu jedem Projectionspunkt P^μ gehört ein gewisser auf die Curve K fallender Basisrest

$$Q_1^\mu Q_2^\mu \ldots Q_{n-3}^\mu \| Q_{n-2}^\mu \ldots Q_{s-1}^\mu.$$

Zahlreiche und bemerkenswerthe Relationen zwischen den Grundpunkten, den Punkten des Basisrests und den Projectionspunkten bilden den Gegenstand weiterer Betrachtung und liefern die Grundlage für die Lösung der später gestellten Probleme. Sie umfassen interessante Beziehungen von Curven dritten und vierten Grades, von welchen Plücker (Theorie der algebr. Curven p. 56), Hart (Cambridge aud Dublin Mathematical Journal, vol. VI. Cambridge 1851 p. 181) einige bereits ausgesprochen haben, die aber hier als Specialfälle allgemeiner Theoreme in neuem Lichte erscheinen. Von den Resultaten, auf die im Einzelnen einzugehen zu weit führen würde, nur Folgendes: „Eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)$ unbekannte Schnittpunkte zweier Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung bestimmt ist, geht durch die Projectionspunkte dieser beiden Curven, die zu den $p = \frac{1}{2}n(n-1)+1$ übrigen Schnittpunkten als Grundpunkten gehören."

„Von den $n(n-1)$ Durchschnittspunkten einer Curve K der n^{ten} Ordnung und einer Curve T der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmen $\frac{1}{2}(\overline{n-2})(\overline{n-2}+3)$ eine gewisse Curve der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch die Projectionspunkte von K in Bezug auf die übrigen $p = \frac{1}{2}n(n-1)+1$ Schnittpunkte als Grundpunkte geht."

„Sind $b_1\, b_2 \ldots b_p\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p\, x_1\, x_2 \ldots x_{n-2}$ die n^2 Durchschnittspunkte zweier Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung und $P^1 P^2 \ldots P^s$ die Projectionspunkte von K in Bezug auf die Grundpunkte $b_1\, b_2 \ldots b_p$, und ebenso $p^1 p^2 \ldots p^s$ die Projectionspunkte von K in Bezug auf die Grundpunkte $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$, so liegen

1) die Projectionspunkte $P^1 P^2 \ldots P^s p^1 p^2 \ldots p^s$ auf ein und derselben Curve der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche auch durch die übrigen Schnittpunkte $x_1 x_2 \ldots x_{n-2}$ von K und $\mathfrak{K}$ geht,

2) die Punktsysteme $b_1 b_2 \ldots b_p\ p^1\ p^2 \ldots p^s$,

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p\ P^1 P^2 \ldots P^s$$

bezüglich auf zwei Curven Σ_1 und Σ_2 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die auch zugleich durch die weiteren Schnittpunkte $x_1 x_2 \ldots x_{n-2}$ von K und $\mathfrak{K}$ gehen."

Nach derartigen Grund legenden Betrachtungen wendet sich der Verf. zu folgenden drei wichtigen Problemen:

1) Wenn in einer Ebene zwei Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung bezüglich durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte gegeben sind, nämlich K durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\ a_1\ a_2 \ldots a_{2n-1}$$

und $\mathfrak{K}$ durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\ a_1' a_2' \ldots a_{2n-1}',$$

so soll diejenige Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugt werden, welche die übrigen unbekannten Schnittpunkte

$$\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)}$$

von K und $\mathfrak{K}$ bestimmt.

2) Es sei K eine Curve der n^{ten} Ordnung, gegeben durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\ a_1\ a_2 \ldots a_{2n-1},$$

und T eine Curve der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, gegeben durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3},\ \alpha;$$

man soll diejenige Curve V der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung construiren, welche durch die übrigen Schnittpunkte von K und T bestimmt wird.

3) Wenn in einer Ebene zwei Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung gegeben sind, nämlich K durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\ a_1\ a_2 \ldots a_{n+1}$$

und $\mathfrak{K}$ durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\ a_1' a_2' \ldots a_{n+1}',$$

so sollen die noch übrigen unbekannten Durchschnittspunkte

$$\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

von K und $\mathfrak{K}$ construirt werden.

Die Specialfälle für $n = 4$ erfahren bei jedem Problem eine besondere Behandlung. Schn.

C. F. Geiser. Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades. Clebsch Ann. I 129-138. 1869.

Indem der Verf. in durchsichtiger synthetischer Methode den Satz entwickelt: „Eine beliebige Curve vierten Grades in der Ebene kann stets aufgefasst werden als der Durchschnitt des Tangentenkegels, welcher von einem Punkte einer Fläche dritten Grades aus an diese Fläche geht, mit der Ebene der Curve“, gewinnt er einen interessanten Zusammenhang zwischen den 28 Doppeltangenten einer Curve vierten Grades und den 27 Geraden der Fläche dritten Grades und verbreitet ein neues Licht über eine Reihe von Sätzen, welche die gegenseitigen Beziehungen der 28 Doppeltangenten einer Curve vierten Grades zum Gegenstand haben. Schn.

C. F. Geiser. Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades. Borchardt J. LXXII 370-378. 1870.

Es wird mit den Mitteln der synthetischen Geometrie der Beweis geführt, dass die allgemeine Curve vierten Grades, sobald zwei Doppeltangenten als reell vorausgesetzt werden, von unendlich vielen Kegelschnitten in je vier Punkten berührt wird, welche einem und demselben Netze angehören und die ersten Polaren eines Kegelschnitts in Bezug auf eine Curve dritten Grades sind. Da je zwei Doppeltangenten einen derartigen, die Curve in vier Punkten berührenden Kegelschnitt darstellen, so ist es möglich die Theorie dieser Doppeltangenten auf die Theorie dieser Kegelschnitte zurückzuführen, welche nach des Herrn Verfassers Meinung auch den Betrachtungen Steiner's zu Grunde gelegen hat. Es wird andeutungsweise gezeigt, wie mehrere der im 49. Bande des Crelle'schen Journals von Steiner ohne Beweis mitgetheilten Sätze von diesem Gesichtspunkte aus sich ableiten lassen, entsprechend den analytischen Entwickelungen der Herren Aronhold (Berliner Monatsberichte, Juli 1864), Clebsch (Borchardt J. LXIII.) Hesse (Crelle J. XLIX.). Schliesslich folgt noch eine

Andeutung einer Untersuchung, welche den Herrn Verfasser zu dem Resultat führt, dass der allgemeinen Curve vierten Grades unendlich viele vollständige Fünfseite eingeschrieben werden können, während Herr Lüroth (Clebsch Ann. I. 37—53. s. Abschn. IX. Cap. 2 D.) auf analytischem Wege gefunden hat, dass diese Eigenschaft nur einer besonderen Gattung solcher Curven zukommt. Schz.

M. W. Crofton. On various properties of bicircular quartics. Proc. of. L. M. S. II 33-45. 1869.

Vorausgeschickt wird ein bekannter Satz, welcher mehreren der folgenden Sätze zu Grunde liegt, nämlich: Sind 1, 2, 3, 4 irgend 4 Punkte, welche ein convexes Viereck bilden, und ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 die Entfernungen eines Punktes R in ihrer Ebene von ihnen und α, β, γ, δ die Flächen der Dreiecke (234), (341), (412), (123), und ε die Fläche des Vierecks, x der Schnittpunkt seiner Diagonalen, so ist

$$\alpha\varrho_1^2-\beta\varrho_2^2+\gamma\varrho_3^2-\delta\varrho_4^2 = \varepsilon\{1x.x3-2x.x4\},$$

also wenn 1, 2, 3, 4 Punkte eines Kreises sind:

$$\alpha\varrho_1^2-\beta\varrho_2^2+\gamma\varrho_3^2-\delta\varrho_4^2 = 0.$$

Die Punkte, deren Entfernungen ϱ, σ, τ von irgend drei festen Brennpunkten R, S, T einer homogenen linearen Gleichung

$$\pm l\varrho\pm m\sigma\pm n\tau = 0$$

genügen, bestimmen eine Curve, welche ein Bicircular-Oval genannt wird. l, m, n als positive ganze Zahlen vorausgesetzt, ist von den drei Ovalen

$$-l\varrho+m\sigma+n\tau = 0,$$
$$+l\varrho-m\sigma+n\tau = 0,$$
$$+l\varrho+m\sigma-n\tau = 0$$

stets eines imaginär; die beiden reellen heissen conjugirte Ovale und werden unter dem Namen einer bicircularen Curve vierter Ordnung (Bicircular Quartic) zusammengefasst. Unter den mitgetheilten Eigenschaften dieser Curven, deren Beweis oft nur angedeutet ist, heben wir folgende hervor: Der zu jedem Punkt eines Ovales zugehörige Gegenpunkt oder inverse Punkt in Bezug auf den Kreis der Brennpunkte, d. i. der auf demselben Durchmesser befindliche Punkt der Polare, liegt auf demselben

Oval; je zwei solcher inversen Punkte sind die Berührungspunkte eines das Oval doppelt berührenden Kreises. Jedes Oval schneidet den Kreis seiner Brennpunkte rechtwinklig in Punkten der grössten oder kleinsten Krümmung. Ein Bicircular-Oval hat nicht nur drei, sondern vier Brennpunkte. Die vier Punkte, in welchen ein Oval von irgend einem Kreise geschnitten wird, sind die foci eines anderen Ovals, welches durch die 4 foci des ersten geht (ein von Herrn Clifford mitgetheilter Satz). Alle Ovale, welche einen Brennpunkt gemein haben und durch vier feste Punkte 1, 2, 3, 4 eines Kreises gehen, haben ihre drei anderen Brennpunkte auf zwei Ovalen, welche durch R gehen und deren Brennpunkte die Punkte 1, 2, 3, 4 sind; ihre Gleichung ist:

$$\alpha\varrho_1\sigma_1 - \beta\varrho_2\sigma_2 + \gamma\varrho_3\sigma_3 - \delta\varrho_4\sigma_4 = 0,$$

worin α, β, γ, δ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 die oben angegebene Bedeutung haben. Der Bogen einer Bicircularcurve in einem Punkte R halbirt den Winkel, der von den Kreisen $R13$ und $R24$ gebildet wird (von Herrn Clifford). Die äusseren Diagonalpunkte des Brennpunktvierecks sind die Mittelpunkte zweier Kreise (secundäre Kreise genannt), welche den primären Kreis der Brennpunkte, sowie alle confocalen Ovale rechtwinklig schneiden, letztere in Punkten grösster oder kleinster Krümmung, und in Bezug auf welche ebenfalls jedes Oval seine eigene inverse Curve ist. Alle confocalen Ovale bilden zwei Familien; nur zwei Ovale verschiedener Familien schneiden sich, und zwar rechtwinklig. Es werden noch weitere Analogien mit den Kegelschnitten angeführt. Zwei der Brennpunkte jedes Ovales liegen innerhalb, die beiden anderen ausserhalb desselben. Es werden Bedingungen aufgestellt für die relative Lage zweier conjugirter Ovale und folgende Construction einer solchen Curve angegeben: Man ziehe die Kreise $1R3$ und $2R4$ und irgend einen dritten Kreis, welcher die Bogen $R1$ und $R2$ berührt, ohne den Kreis (1234) zu schneiden, und suche auf der gemeinsamen Centrale dieses Kreises und des Kreises (1234) diejenigen beiden Punkte, welche in Bezug auf beide Kreise conjugirt sind, so sind dies zwei Punkte desjenigen Ovales, welches den Winkel $1R2$ halbirt. Schz.

W. A. Whitworth. La spirale équiangle, ses principales propriétés prouvées géométriquement. Traduit de Messenger. Nouv. Ann. (2) VIII. 5-16. 1869.

W. A. Whitworth. Note additionnelle à la spirale équiangle. Nouv. Ann. (2) IX. 38-40. 1870.

Die zuerst genannte Arbeit enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der gleichwinkligen Spirale nebst den geometrischen Beweisen für dieselben. Auch werden geometrische Constructionen für die Schwerpunkte des Bogens und des Flächeninhaltes dieser Curve angegeben. Als Definition wird folgende genommen: Eine jede Curve, welche so beschaffen ist, dass sie von einem festen Punkte, dem Pole, ausgehend, zwischen diesem Punkte und irgend einem andern in ihr gelegenen einen Bogen liefert, der immer sich selbst ähnlich ist, wird eine gleichwinklige Spirale genannt. Die Beweise der Sätze werden mit Hilfe der Eigenschaften ähnlicher Curven geführt.

Die hinzugefügte Note betrifft wesentlich folgenden, in der ersten Arbeit hergeleiteten Satz: Wenn man auf dem Leitstrahle der Spirale Dreiecke construirt, welche einem gegebenen ähnlich sind, dann ist der geometrische Ort der dem Leitstrahl gegenüberliegenden Ecke eine Spirale, die der ursprünglichen ähnlich ist. Besonders hervorgehoben wird die physikalische Anwendung dieses Satzes auf Refraction und Reflexion des Lichtes. Den Schluss bildet die Erörterung des Ueberganges einer gleichwinkligen Spirale in den Kreis. T.

Emil Weyr. Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven. Wien. Ber. LIX. 169-177. 1869.

Der Verfasser definirt zuerst die Fusspunktencurven als geometrischen Ort der Fusspunkte aller Lothe, die von einem festen Punkte O (dem Pole) auf sämmtliche Tangenten einer gegebenen Curve C (der Directrix) gefällt werden. Er erwähnt alsdann einige Eigenschaften der Fusspunktencurven, die aus dieser Definition, verbunden mit bekannten Sätzen, hervorgehen. So: Ist die Directrix von der k^{ten} Classe, so ist die Fusspunktencurve im Allgemeinen von der $2k^{\text{ten}}$ Ordnung, und besitzt im

Pole einen k-fachen Punkt. Einer Doppeltangente der Directrix entspricht ein Doppelpunkt der Fusspunktencurve, und einer Inflexionstangente der Directrix eine Spitze der Fusspunktencurve.

Hierauf wird die Construction der Tangente in einem Punkte der Fusspunktencurve angegeben; dieser Punkt sei p, er liege auf der Tangente der Directrix welche letztere im Punkte π berührt; beschreibt man um das bei p rechtwinklige Dreieck $\pi p O$ einen Kreis, so ist die Tangente dieses Kreises in p zugleich die Tangente der Fusspunktencurve in p.

Dann geht der Verfasser zur Betrachtung des Krümmungskreises in einem Punkte der Fusspunktencurve über. Mit Zuhilfenahme bekannter Sätze von den Kegelschnitten gelangt er zu folgendem Resultat: Ist t eine Tangente der Directrix C, deren Berührungspunkt π ist, und entspricht dieser Tangente der Punkt p der Fusspunktencurve F, so ist der Krümmungsmittelpunkt M von F in p — der Mittelpunkt jenes Kegelschnitts, welcher den Pol O zum Brennpunkt hat und die Directrix C im Punkte π einfach osculirt. Durch Specialisirung ergiebt sich weiterhin: Die Fusspunktencurve F einer Curve C bezüglich des Poles O besitzt so viele Inflexionstangenten, als es Parabeln giebt, welche O zum Brennpunkte haben und die Directrix C osculiren; die Inflexionspunkte sind die den Berührungstangenten dieser Parabeln entsprechenden Punkte.

Der Verfasser giebt nun die Construction des Krümmungsmittelpunktes M zur Fusspunktencurve F im Punkte p, unter der Voraussetzung, dass der Krümmungskreis zur Directrix C im entsprechenden Punkte π bereits gegeben ist. Es kommt hierbei darauf an, den Kegelschnitt, der in O einen Brennpunkt besitzt und den gegebenen Kreis in π osculirt, zu bestimmen. Sein Mittelpunkt M (zugleich Mittelpunkt des gesuchten Krümmungskreises) wird durch Umkehrung der bekannten Construction des Krümmungskreises an Kegelschnitten gewonnen. Schliesslich findet sich noch eine Bemerkung für den Fall, dass die Tangente an die Directrix durch O geht. Mz.

EMIL WEYR. Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven. Schlömilch Z. XIV. 376-381. 1869.

Der Verfasser entwickelt zunächst folgenden Satz: Bleibt der eine Brennpunkt eines Kegelschnitts fest, während der Kegelschnitt eine feste Curve C nach und nach in den aufeinanderfolgenden Punkten einfach osculirt, so beschreibt der zweite Brennpunkt die Brennlinie B der Curve C. Er giebt hierauf zwei Constructionen von Punkten der Brennlinie, von denen die eine sich auf den oben angeführten Satz stützt, wogegen die zweite aus einer Betrachtung harmonischer Strahlbüschel hervorgeht. Zum Schluss gelangt der Verfasser zu dem Satz, dass die Evoluten der Fusspunktcurven und die Brennlinien für irgend eine beliebige Curve ihrer Natur nach identisch sind. Die ersten sind nämlich Verjüngungen im Verhältniss 1:2 der zweiten.

Mz.

E. BERTINI. Nuova dimostrazione del teorema: Due curve punteggiate projettivamente sono dello stesso genere p. Battaglini G. VII 105. 1869.

Der Beweis des im Titel angeführten Satzes ist synthetisch und stützt sich auf Eigenschaften der Doppel- und Rückkehrpunkte. Mz.

B. Räumliche Gebilde.

G. WENZEL. Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. Breslau 1870.

Siehe Absch. IX Cap. 5.

W. FUHRMANN. Ueber Abhängigkeit geometrischer Gebilde. Pr. Königsberg 1870.

H. G. ZEUTHEN. Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un. C. R. LXX. 742. 1870.

Ein geometrischer Beweis der wichtigen Lehrsätze von

Riemann und Clebsch, wonach eine gewisse Function der Singularitätenzahlen einer Curve oder einer Fläche bei einer doppelt rationalen Transformation, oder geometrisch, bei einer ein- eindeutigen Beziehung der Punkte zweier Curven oder Flächen aufeinander, denselben Werth behält, hat den Verfasser zugleich zu einem Ausdrucke geführt, welcher die Anzahl der Fundamentalpunkte so aufeinander bezogener Flächen mit den Singularitätenzahlen in Beziehung setzt. Unter Fundamentalpunkten sind nämlich diejenigen Ausnahmepunkte zu verstehen, denen anstatt eines einzigen Punktes alle Punkte einer Curve entsprechen. Bedeuten n_1 und n_2 die Ordnungen, r_1 und r_2 die Klassen, β_1 und β_2 die Anzahlen der Spitzen zweier in der angegebenen Weise auf einander bezogenen Curven, P_1 und P_2 zwei veränderliche entsprechende Punkte auf ihnen, und A_1 und A_2 zwei feste Punkte, so wird die Curve D von der Ordnung $n_1 + n_2$ untersucht, welche der Ort für die Schnittpunkte von A_1P_1 und A_2P_2 ist. Es findet sich, dass von A_1 $r_1 + \beta_1 + 2.n_2$ gerade Linien ausgehen, deren jede entweder Tangente ist oder eine Spitze von D enthält, und dass von A_2 $r_2 + \beta_2 + 2.n_1$ derartige Gerade ausgehen. Aus der Gleichheit dieser zwei Ausdrücke für den Werth der Summe der Klassenzahl und der Anzahl der Spitzen von D, folgt die Riemann'sche Gleichung

$$\frac{(n_1-1)(n_1-1)}{1.2} - (\delta_1 + \beta_1) = \frac{(n_2-1)(n_2-2)}{1.2} - (\delta_2 + \beta_2),$$

wo die δ die Anzahlen der Doppelpunkte sind, nach Anwendung der Plücker'schen Formeln. Indem nun ein analoges Verfahren auf zwei Flächen angewendet wird, deren Punkte in der angegebenen Weise auf einander bezogen sind, ergiebt sich die Gleichung:

$$\mu_2 - \mu_1 = (n'_1 - 2a_1 + \nu_1 - 2\tau_1 + 3n_1) - (n'_2 - 2a_2 + \nu_2 - 2\tau_2 + 3n_2),$$

wo n_1 und n_2 die Ordnungen, n'_1 und n'_2 die Klassen, a_1 und a_2 die Klassen eines ebenen Schnittes, ν_1 und ν_2 die Klassen der Cuspidalcurve, τ_1 und τ_2 die Ordnungen derselben, und endlich μ_1 und μ_2 die Zahlen der Fundamentalpunkte für die beiden Flächen bedeuten. Scht.

Thomas Cotterill. On a correspondence of points, such that a curve of the nth order in one plane corresponds to a curve of the $4n$th in another plane, with three multiple points of the order n on the line of intersection of the planes, and three other multiple points of the order $2n$. Proc. of L. M. S. II. 119-125. 1869.

Sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 beliebige Punkte im Raume, von denen nicht vier in einer Ebene, nicht drei in einer Geraden liegen; ist A die Ebene der drei ersten, B die Ebene der drei letzten, schneiden die Seiten 23, 31, 12 des Dreiecks 123 in A die Schnittlinie l von A und B resp. in den Punkten $1'$, $2'$, $3'$; die Seiten 56, 64, 45 in B ferner l resp. in $4'$, $5'$, $6'$, ist endlich 7 irgend ein Punkt von A, verschieden von den ausgezeichneten Punkten 1, 2, 3, $4'$, $5'$, $6'$, so wird das Kegelschnittbüschel durch 1237 auf l eine Involution bestimmen, und alle Kegelschnitte, welche in B durch 4, 5, 6 und zwei entsprechende Punkte dieser Involution auf l gelegt werden können, schneiden sich im Allgemeinen in einem Punkte 8. So entspricht im Allgemeinen jedem Punkte der Ebene A ein Punkt der Ebene B und umgekehrt. Die Punkte der Geraden l, ausgenommen die ausgezeichneten Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, entsprechen sich selbst. Den Punkten $4'$, $5'$, $6'$ entsprechen jedoch alle Punkte der Geraden 56, 64, 45 resp. und umgekehrt, und den Punkten 1, 2, 3 resp. alle Punkte der Kegelschnitte $4562'3'$, $4563'1'$, $4561'2'$ und umgekehrt. Die allen Punkten, ausgenommen die Punkte 1, 2, 3 der Geraden 12, 23, 31 entsprechenden Punkte fallen daher zusammen resp. in $3'$, $1'$, $2'$, und die allen Punkten der Kegelschnitte $123\{4'5', 5'6', 6'4'\}$, ausgenommen die Punkte 1, 2, 3, entsprechenden fallen zusammen resp. in 6, 4, 5. Jeder Curve C_n n^{ter} Ordnung in A entspricht daher in B eine Curve, welche in $1'$, $2'$, $3'$ drei $n$fache und in 4, 5, 6 drei $2n$fache Punkte besitzt, l in denselben n Punkten schneidet und demnach vom $4n^{\text{ten}}$ Grade ist. Geht die Curve $C_n\{1_a 2_b 3_c 4'_{a'} 5'_{b'} 6'_{c'}\}$ $a$mal durch 1, a'mal durch $4'$ etc., so zerfällt die in B entsprechende Curve C_{4n} in eine Curve $C_\nu\{4_\alpha 5_\beta 6_\gamma 1'_{\alpha'} 2'_{\beta'} 3'_{\gamma'}\}$ und die resp. a, b, $c$fachen ausgezeichneten Kegelschnitte und die resp. a', b', c'fachen aus-

gezeichneten Geraden, so dass

$$\nu = 4n - \Sigma a - \Sigma a',$$

$$\alpha = 2n - \Sigma a - b' - c', \quad a' = n - b - c \text{ etc.}$$

Anhangsweise wird von den Herrn Cayley und W. K. Clifford der Zusammenhang dieser Transformation mit Herrn Cremona's allgemeiner Theorie angegeben. Schz.

L. Lindelöf. Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume. Bull. de St. Pét. XIV. 257-269. 1869.

Herleitung folgender zwei Sätze: 1) Unter allen Polyedern, welche gleiche Oberfläche, gleiche Anzahl und gegenseitige Neigung der Seiten besitzen, hat das einer Kugel umschriebene den grössten Rauminhalt; 2) ist nur die Oberfläche und die Seitenzahl eines convexen Polyeders gegeben, die gegenseitige Neigung der Seiten aber unbestimmt, so ist das Polyeder von grösstem Volumen einer Kugel umschrieben und die Berührungspunkte fallen in die Schwerpunkte der Seiten.

Beide Sätze waren schon von Steiner vermuthet und für specielle Fälle bewiesen worden. Der Beweis obiger Sätze ist verhältnissmässig einfach und mit Hülfe von geometrischen und Infinitesimal-Betrachtungen durchgeführt. B.

R. Sturm. Ueber Singularitäten der allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung. Borchardt J. LXXII 350-359. 1870.

Herr S. giebt für die in Salmon-Fiedler's analytischer Geometrie des Raumes Bd. II, § 325-339 behandelten Probleme neue, mehr geometrische Beweise. K.

R. Sturm. Sur la surface enveloppée par les plans, qui coupent une courbe gauche du $4^{\text{ième}}$ ordre et $2^{\text{ième}}$ espèce en quatre points d'un cercle. Brioschi Ann. (2) IV. 73-86. 1870. K.

Th. Reye. Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung. Clebsch Ann. II. 475-504. 1870.

Herr R. geht von den Jacobi'schen Sätzen über die Durch-

dringungscurven und Schnittpunkte von 2 oder 3 algebraischen Flächen (Crelle XV 299) aus, begründet dieselben zum Theil rein geometrisch und entwickelt dann eine grosse Anzahl neuer Sätze, welche über die projectivische Erzeugung algebraischer Raumcurven und algebraischer Flächen wichtige Aufschlüsse geben. Bedeutet F^p eine algebraische Fläche p^{ter} Ordnung, C^{pq} die Durchschnittscurve einer F^p und F^q, $[n, p, q]$ die Gruppe der $n.p.q$ Schnittpunkte von F^p, F^q, F^n, so stellt Herr R. zunächst die Anzahl von Punkten fest, welche zur Bestimmung einer C^{pq} auf einer F^p gegeben sein müssen; daraus folgt die Zahl der Punkte, die zur Bestimmung eines auf F^p gelegenen Curvenbüschels np^{ter} Ordnung erforderlich sind, resp. zur Bestimmung einer Punktgruppe $[nnp]$. Zwei auf derselben F^p gelegene Curven C^{pq} und C^{pn} schneiden sich in der Punktgruppe $[p, q, n]$. — Die Betrachtung der Flächen und Curven, welche durch eine solche gelegt werden können, füllt ein ergebnissreiches Capitel, auf das sich folgende Sätze über die projectivische Erzeugung der algebraischen Raumcurven und Flächen gründen: „Die allgemeine auf einer Fläche q^{ter} Ordnung gelegene Curve $(n+p)q^{\text{ter}}$ Ordnung kann nicht durch projectivische Curvenbüschel p^{ter} und n^{ter} Ordnung erzeugt werden, sondern nur die besondere Art derselben, welche eine Punktgruppe $[n, n, q]$ enthält; aber für $s > 2$ entsteht jede $C^{2.s}$ auf unzählig viele Arten durch zwei projectivische Curvenbüschel 2.2^{ter} und $2(s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung". „Enthält eine Fläche $n+p^{\text{ter}}$ Ordnung eine Gruppe $[n, n, n]$ (ob die allgemeine F^{n+p} eine solche immer enthalten muss, hat Herr R. noch nicht ermitteln können), so lässt sie sich durch zwei reciproke Flächenbündel n^{ter} und p^{ter} Ordnung erzeugen, jede F^s entsteht durch Bündel 1ter und $s-1^{\text{ter}}$, 2ter und $s-2^{\text{ter}}$ Ordnung."

In Betreff der Ergebnisse, welche die Theorie der Polaren aus den angedeuteten Sätzen liefert, möge auf die wichtige und und inhaltreiche Abhandlung selbst verwiesen werden. K.

H. Schubert, Geometrische Bestimmung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernfläche. Schlömilch Z. XV. 126-129. 1870.

Die Hesse'sche Determinantenfläche oder Steiner'sche Kern-

fläche lässt sich bekanntlich definiren als Ort der Punkte, für welche die quadratischen Polarflächen in Kegel degeneriren. Die Anzahl der Kegel, welche in der einfach unendlichen Schaar der quadratischen Polarflächen vorkommen, die zu sämmtlichen Punkten einer Geraden gehören, bestimmt den Grad der Fläche. Diese Zahl wird durch die Chasles'sche Methode der Charakteristiken gewonnen, d. i. durch Bestimmung der Zahlen μ, ν, ϱ, von welchen die ersten die Anzahl derjenigen Flächen unter der betrachteten einfach unendlichen Schaar angiebt, welche durch irgend einen Punkt des Raumes gehen, die zweite die Anzahl derer, welche irgend eine Gerade berühren, und die dritte endlich die Anzahl derer, welche irgend eine Ebene tangiren. Aus der Theorie der Polaren folgt $\mu = n-2$, $\nu = 2(n-2)$, $\varrho = 3(n-2)$. Aus diesen Zahlen bestimmt der Verf. unmittelbar durch synthetische Schlussfolge den Grad der Kernfläche auf $4(n-2)$.

Schn.

E. Weyr, Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen bei beliebigen Flächen. Clebsch Ann. III 228-234. 1870

Ueber die Abhandlung ist referirt bei Besprechung des Werkes „E. Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung 1870." Note B. daselbst giebt den wesentlichen Inhalt. Siehe Abschn. IX. Cap. 3. A. Schn.

Halphén, Théorèmes sur les normales communes à des surfaces et à des courbes. Inst. 1 sect. XXXVIII 254. 1870.

Herr Halphén bemerkt, dass einige von den Resultaten, welche Herr Mannheim durch unendlich kleine Verrückungen fester Systeme gewonnen habe, sich auch leicht aus einer von ihm aufgestellten Formel ergeben und citirt unter anderem den Satz, den er mit Hülfe derselben hergeleitet. Die Zahl der Normalen, welche zwei Flächen gemeinsam sind, ist gleich dem Product der Anzahl der Normalen, welche sich von einem Punkt an jede der Flächen legen lassen, vermehrt um das Product der Anzahl derjenigen, welche in einer Ebene enthalten sind.

Schn.

G. Darboux. Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 61-69. 1869.

Siehe Fortschr. d. M. I. p. 274 und 275. Schn.

R. Sturm, Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. Clebsch Ann. I. 533-574 1869.

Das Problem der Projectivität ist folgendes: Zu zwei Gruppen von einer gleichen Anzahl Punkte einer Ebene zwei zu einander gehörige (correspondirende) Punkte zu finden, welche resp. mit den Punkten der einen und der andern Gruppe verbunden entsprechende Strahlen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln liefern.

Sind nun zwei Gruppen von je vier Punkten gegeben, so correspondirt jeder Punkt eines Kegelschnitts durch die vier Punkte der einen Gruppe allen Punkten des analogen Kegelschnitts durch die vier Punkte der andern Gruppe. (Der analoge Kegelschnitt ist nämlich jener, dessen Punkte mit den vier Punkten der zweiten Gruppe dasselbe anharmonische Verhältniss umfassen, wie irgend ein Punkt des ersten Kegelschnitts mit den vier Punkten der ersten Gruppe.)

Sind ferner zwei Gruppen von je fünf Punkten gegeben, deren Punkte einander als homologe zugeordnet sind, so giebt es im Allgemeinen für jeden Punkt ihrer Ebene, wenn man ihn mit der einen Gruppe zusammenstellt, nur einen correspondirenden. Aber: Jedem Punkte der einen Gruppe correspondiren, wenn er derselben zugeordnet wird, unendlich viele Punkte, die auf einem Kegelschnitte liegen, dessen Punkte mit den vier Punkten der andern Gruppe, die jenem nicht homolog sind, dasselbe anharmonische Verhältniss umfassen, wie der Punkt mit den vier übrigen Punkten seiner Gruppe. Ausserdem giebt es für jede Gruppe noch einen Punkt (der sogenannte verbundene Punkt), der allen Punkten des Kegelschnitts correspondirt, den die fünf Punkte der andern Gruppe erzeugen. Er liegt auf den correspondirenden Kegelschnitten dieser fünf Punkte.

Man denkt sich nun irgend einen Punkt der Ebene, während er der einen Gruppe zugeordnet ist, eine Gerade durchlaufen, so durchläuft der correspondirende Punkt der andern Gruppe eine Curve fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten, nämlich den 5 gegebenen und dem 6ten verbundenen der andern Gruppe. Die Ordnung der Curve erniedrigt sich, wenn die genannte Gerade durch einen, und noch weiter, wenn sie durch zwei Hauptpunkte der ersten Gruppe geht.

Hat man 2 Gruppen von je 6 Punkten, so giebt es nicht mehr für jeden beliebigen Punkt der Ebene, wenn er der ersten Gruppe zugeordhet wird, einen Correspondenten der zweiten Gruppe. Aber diejenigen Punkte der ersten Gruppe, die correspondirende der zweiten haben, liegen auf einer Curve dritter Ordnung, und die letzteren dann gleichfalls auf einer solchen.

Hat man endlich 2 Gruppen von je 7 Punkten, die einander als homologe zugeordnet sind, so giebt es drei Paare correspondirender Punkte, die mit den beiden Gruppen verbunden projectivische Strahlbüschel liefern.

Die Anwendung auf Flächen zweiten Grades findet nun folgendermassen statt. Es seien 9 Punkte beliebig im Raume gegeben: P, Π, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$, $\mathfrak{P}_7$. Aus zwei von ihnen P und Π werden die 7 übrigen auf eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ projicirt. Die Projectionen aus P seien $b_1 b_2 \dots b_7$, die aus Π seien $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_7$. Der Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem die Gerade $P\Pi$ die Ebene $\mathfrak{E}$ trifft, liegt mit je 2 homologen Punkten aus den beiden Gruppen $(b_1 b_2 \dots b_7)$ und $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_7)$ in gerader Linie. Daher ist:

$$\mathfrak{P}(b_1 b_2 \dots b_7) \text{ proj. } \mathfrak{P}(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_7).$$

$\mathfrak{P}$ repräsentirt demnach 2 zusammengefallene correspondirende Punkte in Bezug auf die beiden Gruppen, so dass nur noch die beiden anderen Paare $p'_0 \pi'_0$ und $p''_0 \pi''_0$ zu finden sind. Hat man eins derselben, so kann man die Geraden Pp'_0 und $\Pi\pi'_0$ zu Axen von Ebenenbüscheln nehmen, die derartig projectivisch sind, dass sich in ihnen die Ebenen

$$Pp'_0(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_7) \text{ und } \Pi\pi'_0(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_7)$$

entsprechen, und also eine Fläche zweiten Grades erzeugen, nämlich diejenige durch die 9 gegebenen Punkte. Der Verfasser

giebt nun hier die Construction von p'_0, p''_0, π'_0, π''_0 an. Die beiden Punktenpaare $p'_0\pi'_0$ und $p''_0\pi''_0$ ergeben dieselbe Fläche zweiten Grades; aber bei dem einen Paare erhält man die durch P und Π gehenden Geraden aus der einen Geradenschaar der Fläche zu Axen der Ebenenbüschel, bei dem anderen Paare die durch P und Π gehenden Geraden aus der andern Geradenschaar. Die beiden Punkte $p'_0 p''_0$ (und gleichzeitig ebenso $\pi'_0\pi''_0$) sind zugleich reell oder imaginär. Im ersteren Fall erhält man ein einschaliges Hyperboloid, im andern ein zweischaliges Hyperboloid oder ein Ellipsoid. Es folgt nun Näheres über die Construction dieser Flächen.

Durch die Annahme von nur 8 Punkten des Raumes geht der Verfasser zur Betrachtung der Raumcurven vierter Ordnung und erster Species über, wendet hierauf das Frühere an und giebt unter Anderem die Construction der Tangenten der Raumcurve in jedem dieser 8 Punkte, durch die sie bestimmt ist.

Hierauf werden nur 7 Punkte des Raumes als gegeben angenommen; diese bestimmen eine doppelt unendliche Schaar von Flächen zweiten Grades, welche alle durch einen associirten achten Punkt mit hindurchgehen. Es wird dies mit Hülfe des vorher Gegebenen nachgewiesen, und auch die Construction des 8ten Punktes gezeigt.

Es folgt nun noch eine längere Behandlung des Falles, in welchem nur 6 Punkte gegeben sind. Dann wird zu einem beliebigen 7ten Punkte der diesem und den 6 gegebenen associirte 8te Punkt gesucht. Der Verfasser giebt hier viele Sätze über den Ort des 8ten Punktes, wenn der 7te einen gegebenen Ort durchläuft. Mz.

H. Müller. Ueber eine geometrische Verwandtschaft fünften Grades. Clebsch Ann. II 281-293. 1869.

Der Verf. behandelt die Aufgabe, welche Herr Sturm in der obigen Arbeit am Anfange gegeben hat. Die Resultate sind dieselben, wie dort mitgetheilt. Weiterhin findet sich aber eine Anwendung auf ebene Curven drittes Grades. Es wird die Aufgabe gelöst: Wenn von den 9 Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades 8 gegeben sind, den neunten linear zu construiren.

Ferner wird die Construction einer durch 9 Punkte bestimmten Curve dritter Ordnung angedeutet. Mz.

Joerres. Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen mit Anwendungen auf Curven und Flächen zweiter und dritter Ordnung. Borchardt J. LXXII. 327-339. 1870.

Wenn die ebene Curve P_{2n} (der Index bezeichnet zugleich den Grad einer Curve) durch zwei projectivische Büschel

$$(A_n B_n C_n \ldots) \quad \text{und} \quad (A'_n B'_n C'_n \ldots)$$

entstanden gedacht werden kann, dann kann sie auch durch zwei andere projectivische Büschel:

$$(A_n A'_n A''_n \ldots) \quad \text{und} \quad (B_n B'_n B''_n \ldots)$$

entstanden gedacht werden; es haben die Curven dieser Büschel die Eigenschaft, dass die dreimal n^2 Schnittpunkte:

$$(A_n B'_n)(C_n B''_n)(C'_n A''_n)$$

auf derselben Curve S_n liegen. Man kann die 6 Curven:

$$A_n,\ A''_n,\ B'_n,\ B''_n,\ C_n,\ C'_n$$

so ordnen, dass je zwei aufeinanderfolgende (die letzte und erste auch als solche betrachtet) sich auf P_{2n}, je zwei gegenüberliegende dagegen auf S_n schneiden: $A_n C_n$, $C'_n B'_n$, $B''_n A''_n$. Diese Anordnung wird eine geschlossene Kette der 6 Curven genannt. In dem Folgenden wird nun gezeigt, dass die Erfüllung irgend einer der Bedingungen, dass sich auf einanderfolgende Glieder einer geschlossenen Kette auf P_{2n} oder gegenüberliegende auf S_n schneiden, die Erfüllung der andern nach sich zieht.

Ferner wird gezeigt, dass man durch andere Anordnung der Kettenglieder, im Ganzen 4 geschlossene Ketten erhalten kann, so dass die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Glieder auf der Curve S_n liegen. Daraus folgt dann weiter, dass eine jede der 4 zu S_n gehörigen Curven P_{2n} auf doppelte Weise durch zwei projectivische Curvenbüschel entstanden gedacht werden kann; die Beziehungen, in denen diese Curven P_{2n} zu einander stehen, werden dann erörtert.

Nimmt man an, dass die Curve P_{n+m} durch zwei projectivische Curvenbüschel $(A_n B_n C_n \ldots)$ und $(A'_n B'_n C'_n \ldots)$ entstanden

sei und bezeichnet K_{n-m} eine beliebige Curve von der Ordnung $n-m$, dann kann man die Curve $P_{n+m}.H_{n-m}$ auf doppelte Weise durch zwei projectivische Curvenbüschel entstanden ansehen. Hieran knüpfen sich dann analoge Untersuchungen über die geschlossene Kette von sechs Curven wie vorhin.

Die Anwendung der vorstehenden Entwickelungen auf Curven zweiter Ordnung führt zum Pascal'schen Satz, zu der Umkehrung und zu einer Erweiterung desselben. Auch auf Curven dritter und vierter Ordnung werden einige Anwendungen gemacht.

Bezeichnen nun $A_n B_n$ und die übrigen Symbole Flächen von der Ordnung, die der Index ausdrückt, so gewinnt man, mutatis mutandis, für Flächen ganz analoge Sätze wie für Curven. Diese Sätze mit ihren Anwendungen auf Flächen zweiter und dritter Ordnung bilden den zweiten Theil der Arbeit. T.

R. Sturm, Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung. Borchardt J. LXX, 212-246. 1869.

Diese Abhandlung beschäftigt sich eingehend mit der synthetischen Ableitung der Eigenschaften eines Flächennetzes zweiter Ordnung. Ein solches umfasst die zweifach unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche durch 7 irgendwie gelegene Punkte gehen, und ausserdem noch einen durch die Lage dieser 7 Punkte bestimmten achten Punkt gemein haben. Durch jeden Punkt des Raumes geht ein zu dem Netze gehöriges Flächenbüschel, durch je zwei Punkte eine einzige Fläche des Netzes. Die sämmtlichen Flächen eines Flächenbüschels des Netzes haben eine Grundcurve vierter Ordnung gemein. Die zweifach unendlich vielen Grundcurven des Netzes haben keine andern Punkte als dessen Grundpunkte gemein. Vier unter ihnen treffen zugleich zwei beliebig angenommene Gerade, 36 von ihnen berühren zugleich zwei Ebenen. Was die dreifach unendlich vielen auf den Flächen des Netzes liegenden Geraden anbetrifft, so bilden dieselben einen Strahlencomplex dritten Grades und dritter Klasse. Weitere auf die Polareigenschaften des Netzes basirte Untersuchungen ergeben Resultate, von denen diejenigen erwähnt werden mögen, welche einige der Zahlen für die 55 Elementarcharakteristiken der Flächen und Kegel zweiter

Ordnung bestätigen, nämlich, dass von den durch 7 Punkte gehenden Flächen 4 zwei gegebene Gerade berühren, 6 eine gegebene Gerade und eine gegebene Ebene, 9 zwei gegebene Ebenen berühren, und dass von den durch 7 Punkte gehenden Kegeln 8 eine gegebene Gerade berühren. Es ergiebt sich ferner in diesem Zusammenhange das bekannte Resultat, dass 12 Flächen eines Flächenbüschels eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung berühren. Den Schluss der Abhandlung bildet die Behandlung des Falles, wo die 7 Grundpunkte des Netzes auf einer und derselben cubischen Raumcurve liegen, die dann allen Flächen des Netzes gemeinsam ist. Scht.

H. Müller. Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetischer Behandlung. Clebsch Ann. I 627-633. 1870.

Die Eigenschaften des Flächenbüschels zweiter Ordnung werden durch synthetische Betrachtung aus den Sätzen über ebene Kegelschnittbüschel gewonnen. Schn.

H. Schubert. Eine geometrische Eigenschaft der 16 Kugeln, welche 4 beliebig gegebene Kugeln berühren. Schlömilch Z. XIV. 506-513. 1869.

H. Schubert. Metrische Relationen zwischen den Radien der 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren. Schlömilch Z. XIV. 513-516. 1869.

Aus den Sätzen, welche über Aehnlichkeits- und Chordalgebilde und Berührung der Kugeln gelten, wird der Satz hergeleitet, dass die 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren, eine solche Lage haben, dass sich 24 neue Kugeln finden lassen, von denen eine jede 8 der berührenden 16 berührt, und dass es 32 neue, auch von den 24 verschiedene, giebt, von denen eine jede 6 der berührenden 16 berührt. Zwischen den Radien der berührenden 16 Kugeln bestehen 6 von einander unabhängige Relationen, von denen 5 in der zweiten der obengenannten Abhandlungen aufgestellt werden. T.

R. NIEMTSCHICK. Einfache Construction windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschnitten. Wien. Ber. LXI. 380. 1870.

Mz.

HAAG. Théorèmes de géométrie. Inst. 1. sect. XXXVIII. 213. 1870.

Die Note enthält die Mittheilung zweier Sätze ohne Beweis. Die Sätze beziehen sich auf die Erzeugung eines Hyperboloids durch gerade Linien.

T.

H. MÜLLER. Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung. Clebsch Ann. I. 407-423. 1869.

Gestützt auf die grundlegenden Betrachtungen von Herrn Th. Reye über Raumcurven dritter Ordnung (Th. Reye, die Geometrie der Lage, Hannover 1868. Siehe Fortschr. d. M. I. p. 269 bis 272) verfolgt der Verf. die Beziehungen dieser Curven zu einander, sowie zu den Flächen 2ten Grades. Im Laufe seiner streng synthetischen Entwickelungen giebt er die Beweise für mehrere Sätze, welche Chasles in den „Comptes rendus" ohne dieselben veröffentlicht hat, z. B. „Wenn eine Raumcurve dritter Ordnung 7 Punkte mit einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung gemein hat, so ist sie ganz auf dieser Fläche gelegen", oder „zwei Raumcurven dritter Ordnung, welche 5 Punkte gemein haben und nicht zusammenfallen, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung." In einem folgenden Paragraphen bilden die Beziehungen der Raumcurven dritter Ordnung zu dem Strahlencomplex, von welchem Herr Reye in seinem oben angezeigten Werk handelt, Gegenstand weiterer Betrachtung; es mag daraus hervorgehoben werden, dass alle Linien A, welche so gelegen sind, dass die Ebenen nach 4 festen Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 ein gegebenes Doppelverhältniss haben, einen solchen Strahlencomplex bilden, für welchen die vier festen Punkte Hauptpunkte sind. Daran schliesst sich eine Untersuchung über die Lage der Axen von Ebenenbüscheln, in denen Ebenen, welche durch feste Punkte gehen, gegebene Doppelschnittverhältnisse haben. Endlich geht der Verf. zur Behandlung der Aufgabe über, welche Herr Chasles

in den „Comptes rendus, 1857 pag. 194“ gestellt hat: „Auf einem Hyperboloide sind zwei Raumcurven dritter Ordnung gegeben, welche die Strahlen der nämlichen Kegelschaar zu Sekanten haben; man soll die vier Durchschnittspunkte derselben suchen.“ Auf die zahlreichen Bemerkungen, welche der Verf. bezüglich der von ihm behandelten Materie macht, im Einzelnen einzugehen, würde an dieser Stelle zu weit führen. Schn.

M. Gardiner. On the inscription, by a simplification of Sir W. R. Hamilton's process of reduction, of closed n-gons in any quadric, so that the sides of each shall pass in order through n given points. Proc. of L. M. S. II 63-66. 1869.

Sei S eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung und $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$ sei irgend ein dieser inschriebenes offenes oder geschlossenes Polygon, dessen Seiten $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ... $a_n a_{n+1}$ der Reihe nach durch die n gegebenen Punkte resp. o_1, o_2, ... o_n gehen. P sei eine beliebige Ebene, welche S nicht berührt; die Linie $o_1 o_2$ treffe P in p_1, $p_1 a_1$ treffe S zum zweiten Male in b_2, dann wird, wie auch a_1 seine Lage auf der Oberfläche ändere, $b_2 a_3$ stets durch einen festen Punkt q_1 von $o_1 o_2$ gehen. Die Linie $q_1 o_3$ treffe P in p_2, $p_2 b_2$ treffe S in b_3, dann wird $b_3 a_4$ die Gerade $q_1 o_3$ stets in einem und demselben festen Punkte q_2 schneiden, wie auch a_1 seine Lage auf S ändere. $q_2 o_4$ treffe P in p_3, $p_3 b_3$ treffe S in b_4, dann wird $b_4 a_5$ die Gerade $q_2 o_4$ stets in demselben festen Punkte q_3 schneiden u. s. f. So erhalten wir ein Polygon $a_1 b_2 b_3 \dots b_n a_{n+1}$, dessen erste $n-1$ Seiten durch $n-1$ bekannte Punkte $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ einer Ebene gehen, während die letzte Seite $b_n a_{n-1}$ durch einen, im Allgemeinen, ausserhalb dieser Ebene befindlichen Punkt $\varrho_n = q_{n-1}$ geht. Ziehen wir in der Ebene P eine Gerade L, so können wir in ähnlicher Weise von diesem ein drittes Polygon $a_1 c_2 c_3 \dots c_{n-1} b_n a_{n+1}$ [illegible] dessen erste $n-2$ Seiten durch $n-2$ feste Punkte [illegible] der Geraden L gehen, dessen $(n-1)^{te}$ Seite [illegible] durch einen Punkt ϱ_{n-1} ausserhalb L in der Ebene P, und dessen letzte Seite $b_n a_{n+1}$ durch den Punkt ϱ_n ausserhalb P geht. [illegible]

haben die Anfangs- und die Endecken gemeinsam; schliesst sich das eine, so auch die beiden anderen.

Ist nun n eine ungrade Zahl, so ist auch $n-2$ ungrade, und die Linie $a_1 c_{n-1}$ geht durch einen festen Punkt β der Linie L. Die Aufgabe, der Oberfläche ein geschlossenes n-eck einzuschreiben, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte o gehen, reducirt sich hiernach auf die Aufgabe, der Oberfläche S ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch die drei Punkte β, ϱ_{n-1}, ϱ_n, gehen, welche bekanntlich zwei Lösungen giebt. Ist n grade, so ist $n-2$ grade und die Linie $a_1 c_{n-2}$ geht durch einen festen Punkt γ der Linie L. Die angegebene Aufgabe ist daher zurückgeführt auf die Construction eines einer Oberfläche zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecks $a_1 c_{n-2} c_{n-1} c_n a_1$, dessen Seiten der Reihe nach durch die vier Punkte γ, r_{n-2}, ϱ_{n-1}, ϱ_n gehen. Schiesslich wird noch die Lösung dieser beiden speciellen Aufgaben besprochen. Schz.

J. Lüroth. Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raum. Clebsch Ann. III. 124-133. 1870.

Die Aufgabe lautet: „Die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, welche eine Curve vierter Ordnung erster Species in drei und fünf ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen, ohne durch einen den Sehnen und der Curve gemeinsamen Punkt zu gehen.“ Die Lösung beruht auf dem Princip, dass die Ordnung der Fläche, auf welcher alle Kegelschnitte einer einfach unendlichen Schaar liegen, durch die Zahl der Schnittpunkte bestimmt wird, in denen eine beliebige Linie von Kegelschnitten der Schaar getroffen wird. Es sei bemerkt, dass den Bedingungen der Aufgabe zwei Kegelschnitte genügen. Schn.

R. Townsend. Solution, by the method of ordinary homographic division, of the problem, „To inscribe in a given ruled quadric a polygon of any given order whose sides shall pass in any prescribed order of sequence through an arbitrary system of given points in space. Proc. of the L. M. S. II 21-24. 1869.

P_1, P_2, ... P_n seien die gegebenen Punkte in der gegebenen

Reihenfolge, S die gegebene Regelfläche zweiter Ordnung, und n werde zunächst als grade angenommen. Denkt man sich durch drei beliebige Generatricen A, B, C derselben Schaar von S, welche wir kurz als die erste Schaar bezeichnen wollen, und durch P_1 drei Ebenen gelegt, so schneiden dieselben die Oberfläche S ausserdem noch in drei Generatricen A_1, B_1, C_1 der zweiten Schaar; die Ebenen durch P_2 und A_1, B_1, C_1 resp. schneiden S in drei Generatricen A_2, B_2, C_2 der ersten Schaar; legt man nun die Ebenen durch P_3 und resp. A_2, B_2, C_2 u. s. f., so erhält man schliesslich drei Generatricen A_n, B_n, C_n, der ursprünglichen Schaar angehörig, welche mit A, B, C zwei projectivische Systeme bestimmen, auf deren Doppel-Elementen $M = M_n$ und $N = N_n$ die ersten Ecken des zu construirenden Polygons liegen müssen. Wählt man nun drei beliebige Generatricen der zweiten Schaar A', B', C' und verfährt in gleicher Weise, so erhält man zwei Doppel-Generatricen $M' = M'_n$ und $N' = N'_n$ der zweiten Schaar, auf welchen die ersten Ecken des Polygons ebenfalls liegen müssen. Die vier Schnittpunkte P, Q, R, S dieser Geraden sind demnach die gesuchten Anfangspunkte zur Beschreibung des Polygons. Ist n ungrade, so leitet man durch ein gleiches Verfahren von drei beliebigen Generatricen A, B, C derselben Schaar zwei Triaden von Generatricen der anderen Schaar A_n, B_n, C_n und A_{-n}, B_{-n}, C_{-n} ab, die eine, indem die Punkte P in der gegebenen Reihenfolge P_1, P_2, ... P_n, die andere, indem dieselben in der entgegengesetzten Reihenfolge P_n, P_{n-1}, ... P_1 angewendet werden. In den durch die entsprechenden Geraden A_n, B_n, C_n und A_{-n}, B_{-n}, C_{-n} bestimmten projectivischen Systemen construirt man die Doppel-Generatricen $M_n = M_{-n}$ und $N_n = N_{-n}$, dann sind die Schnittpunkte einer jeden derselben mit derjenigen Generatrix resp. M oder N des ursprünglichen Systems, welche durch den umgekehrten Process von ihr abgeleitet werden kann, die beiden Anfangspunkte für die Beschreibung des Polygons. Es wird ferner der Grund für die Verschiedenheit der Zahl der Lösungen besprochen, und die besonderen Fälle, in denen die Aufgabe theilweise oder ganz unbestimmt wird, werden erörtert. Schz.

C. F. Geiser. Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. Borchardt J. LXX 249-257. 1869.

Siehe Abschn. IX Cap. 5.

H. Durrande. Sur les surfaces du quatrième ordre. C. R. LXX 920. 1870.

Betrachtung der Fläche vierter Ordnung als Erzeugniss zweier projectivischer Flächenbüschel zweiter Ordnung, und Aufzählung einiger Eigenschaften der Fläche, welche sich auf diese Erzeugungsart beziehen. A.

Th. Reye. Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung. Clebsch Ann. I. 455 bis 466. 1869.

Die vorliegende Arbeit enthält allgemeine Erzeugungsarten der Flächen dritter und vierter Ordnung durch projectivische Flächenbündel und zeichnet zugleich einen Weg vor, auf welchem man zu analogen Erzeugungsarten einer Fläche n^{ter} Oodnung gelangt. Nachdem der Verf. eine Reihe Relationen zwischen den 16 Schnittpunkten zweier Flächen zweiter Ordnung F^2 und F_1^2 einer Fläche vierter Ordnung F^4 entwickelt hat, wendet er sich dazu, die Curven $C^{2.4}$ und $C^{2.3}$, das sind die Durchdringungscurven einer Fläche F^2 mit einer F^4 oder F^3, durch projectivische Curvenbüschel zu erzeugen. Die Elemente der Erzeugung geben ihm folgende Betrachtung. Zwei Flächenbüschel zweiter Ordnung sind bekanntlich projectivisch, wenn die Polarebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf ihre Flächen zwei projectivische Ebenenbüschel bilden; sie erzeugen alsdann eine F^4. Auf einer beliebigen F^2 wird jedes Element eines Flächenbüschels eine Curve $C^{2.2}$ verzeichnen, und alle diese Curven $C^{2.2}$ werden ein Büschel von Curven $C^{2.2}$ mit 8 Knotenpunkten bilden. Die beiden projectivisch auf einander bezogenen Flächenbüschel zweiter Ordnung geben also Veranlassung zu zwei projectivischen Curvenbüscheln $C^{2.2}$ auf der Fläche F^2, und der Schnitt der entsprechenden Elemente liefert die Curve $C^{2.4}$,

welche durch die zweimal 8 Knotenpunkte der Büschel hindurchgeht. Die so erzeugte Curve ist aber, wie der Verf. ausführt, die allgemeine Durchdringungscurve einer F^2 und F^4. Nach einigen Bemerkungen über die Natur von $C^{2.4}$ giebt der Verf. eine Erzeugung einer F^3 oder F^4 durch reciproke Flächenbündel. Ein Flächenbündel, bestimmt durch drei Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2, wird nicht nur als Totalität aller zum Bündel gehörigen Flächen aufgefasst, sondern umfasst auch die Totalität aller Curven $C^{2.2}$, welche je 2 Elemente des Bündels bilden. Die Polarebenen und Polarstrahlen eines Punktes in Bezug auf alle F^2 und $C^{2.2}$ des Bündels bilden ein Strahlenbündel, und zwei Flächenbündel zweiter Ordnung sind nunmehr reciprok dadurch auf einander zu beziehen, dass die einem Punkte des Raums in Beziehung auf sie entsprechenden polaren Strahlenbündel reciprok bezogen werden. Zwei reciproke Flächenbündel zweiter Ordnung erzeugen nach dem Verf. eine F^4, welche durch die zweimal acht Knotenpunkte der Bündel hindurchgeht, und jede gegebene F^4 kann als Erzeugniss von zwei reciproken Flächenbündeln zweiter Ordnung dargestellt werden. Schliesslich zeigt der Verf., dass wie jede F^4 durch einen Flächenbündel dritter Ordnung und einen zu ihm reciproken Strahlenbündel erzeugt werden kann, so allgemein jede Fläche F^{n+1} sich als Durchschnitt der entsprechenden Elemente eines Flächenbündels n^{ter} Ordnung und eines zu ihm reciproken Strahlenbündels auffassen lässt.

Schn.

R. Sturm. Ueber die römische Fläche von Steiner.
Clebsch Ann. III 76-123. 1870.

Nach einigen einleitenden Worten über frühere Bearbeitungen der römischen Fläche gelangt der Verfasser folgendermassen zu ihrer Erzeugung:

Es sei eine Flächenschaar 2ter Classe $S(F_2^r)$ gegeben, d. h. eine Reihe von Flächen 2ten Grades, welche 8 beliebige Ebenen und in Folge dessen sämmtliche Ebenen einer abwickelbaren Fläche 4ter Classe D_4 berühren. (Das Wort „Ebenen“ wird im Folgenden öfters für „Tangentialebenen“ gebraucht.) Zu dieser

Schaar gehören 4 Kegelschnitte Q. Durch jede Tangente eines solchen Kegelschnitts gehen 2 Ebenen von D_4, die nämlich, welche von der Tangente an irgend eine andere Fläche der Schaar, z. B. an einen zweiten der 4 Kegelschnitte gelegt sind. Also gehen von jedem Punkte eines solchen Kegelschnitts Q zwei Generatricen von D_4 aus; in jedem beliebigen Punkte einer Generatrix berührt nur eine Fläche der Schaar. Bezieht man daher die Punktreihe einer Generatrix von D_4 auf die einer beliebigen Geraden, so ist die Punktreihe dieser Geraden auf die Schaar der Flächen bezogen. Die Lage der beliebigen Geraden G wird nun dahin eingeschränkt, dass sie sich auf 2 der vorhin erwähnten Kegelschnitte Q' und Q'' stützt; sie treffe Q' in ω' und Q'' in ω''; die Tangenten B' und B'' in ω' und ω'' an die resp. Kegelschnitte Q' und Q'' mögen einander nicht treffen; bei der projectivischen Beziehung, in die G zu einer Generatrix von D_4 und hierdurch zur Flächenschaar gebracht wird, entsprechen ω' dem Kegelschnitt Q' und ω'' dem Kegelschnitt Q''. Legt man nun von jedem Punkte der Geraden G an seine entsprechende Fläche der Schaar den Tangentialkegel, so hüllen diese sämmtlichen Kegel, oder was dasselbe ist, ihre Berührungsebenen die römische Fläche F_3 ein, eine Fläche dritter Classe mit 4 Doppel-(tangenten)ebenen. Die Gerade G ist eine Doppelgerade auf F_3, die Paare der Berührungsebenen desselben Punktes bilden eine Involution. Die beiden Ebenen (G, B') und (G, B'') sind die Asymptotenebenen der Involution, und die Punkte ω' und ω'' sind die Cuspidalpunkte der Doppelgeraden G. Durch jede der beiden Geraden B' und B'' gehen zwei Doppelebenen der römischen Fläche F_3, welche diese in unendlich vielen Punkten, die einen Kegelschnitt bilden, berühren. Von den Flächen der Schaar S geht ausser den Kegelschnitten Q' und Q'' nur eine einzige Fläche F_2^0 durch ihren entsprechenden Punkt a^0 auf G. Seien nun G' und G'' die beiden Geraden auf F_2^0, die sich in a^0 kreuzen, so sind dies auch Doppelgerade der Fläche F_3. Ausser den drei Doppelgeraden G, G', G'', die in dem dreifachen Punkt a^0 zusammenstossen, existiren keine vielfachen Punkte der Fläche F_3. Jede der drei Doppelgeraden begegnet zweien Gegenkanten des Tetraeders der 4 Doppelebenen. Durch die

drei Doppelgeraden geht eine doppelt unendliche Schaar von Kegeln zweiten Grades, welche F_3 in einem Gebilde zweiter Ordnung schneiden; dies Gebilde muss ein Kegelschnitt sein, da ausser den drei Doppelgeraden keine Geraden auf F_3 existiren.

Nach einer eingehenden Behandlung alles dessen, was hier angedeutet ist, betrachtet der Verfasser den besonderen Fall, in welchem die oben erwähnten Tangenten B' und B'' sich schneiden, — in welchem also G eine Generatrix von D_4 wird. Weiterhin wird folgender specielle Fall betrachtet: Die Ebene jedes der vier Kegelschnitte Q, die zur Schaar $S(F_2^x)$ gehören, z. B. Q'' schneidet aus der Fläche D_4, auf der Q'' doppelt liegt, noch 4 Generatricen aus, in denen die von dem Schnittpunkte der Ebenen der drei übrigen Kegelschnitte an die Fläche D_4 gelegten Ebenen dieselbe berühren. Diese 4 Generatricen berühren den Kegelschnitt Q'' und sind als Geraden der Fläche Q'' anzusehen, weil durch sie unendlich viele Tangentenebenen derselben gehen. Nimmt man nun eine dieser 4 Generatricen zur Geraden G, so hat man den zweiten vom Verfasser behandelten speciellen Fall, der übrigens weniger allgemein ist, als die erste Specialisirung.

Hierauf nimmt der Verfasser die Fläche wieder ganz allgemein an, und geht zur Betrachtung der auf ihr liegenden Curven über. Auf der Steiner'schen Fläche giebt es keine Curve ungrader Ordnung. Es giebt ferner auf ihr keine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species ohne Doppelpunkt.

Der Verfasser giebt eine punktweise Abbildung der Curven auf der Fläche F^4 in Curven einer Ebene E an, und ferner eine grosse Zahl von Sätzen über Curven und Curvenschaaren auf der Fläche. Mz.

C. Geometrie der Anzahl.

H. SCHUBERT. Zur Theorie der Charakteristiken. Borchardt J. LXXI 366-386. 1870.

Die von Herrn Chasles erfundene, im Jahre 1864 veröffentlichte, ausser von ihrem Erfinder namentlich noch von den Herren

Jonquières und Zeuthen weiter ausgebildete Methode der Charakteristiken will im Wesentlichen die Anzahl der Curven oder Flächen finden, welche gegebenen Bedingungen genügen. Die vorliegende Arbeit beweist einige der von Herrn Chasles in den Comptes rendus ohne Beweis angegebenen Resultate und führt einige ebendaselbst ausgesprochene Gedanken aus.

Unter einem Systeme von Flächen n^{ter} Ordnung wird in der Theorie der Charakteristiken die einfach unendliche Mannichfaltigkeit aller derjenigen Flächen verstanden, welche gleichzeitig einer Bedingung weniger genügen, als zur endlichdeutigen Bestimmung einer Fläche n^{ter} Ordnung immer nothwendig sind, und unter den drei Charakteristiken μ, ν, ϱ eines solchen Systems beziehungsweise die Anzahl derjenigen Flächen des Systems, welche ausser den Bedingungen des Systems auch noch der Bedingung Genüge leisten, einen irgend wo gegebenen Punkt zu enthalten, eine Gerade oder eine Ebene zu berühren. Wenn dann $\alpha.\mu+\beta.\nu+\gamma.\varrho$ die Anzahl derjenigen Flächen des Systems ist, welche eine beliebige neu hinzukommende Bedingung befriedigen, so heissen α, β, γ die Parameter dieser Bedingung. Beispielsweise und behufs späterer Anwendung sind in der Abhandlung des Verfassers die Parameter der Bedingung, eine Fläche m^{ter} Ordnung zu berühren, geometrisch hergeleitet, wobei $\alpha = m(m-1)^2$, $\beta = m(m-1)$, $\gamma = m$ gefunden ist. Dies heisst mit anderen Worten, dass es in einem Flächensysteme mit den Charakteristiken μ, ν, ϱ, $m(m-1)^2.\mu+m(m-1).\nu+m.\varrho$ Flächen geben muss, welche eine gegebene Fläche m^{ter} Ordnung berühren. Darauf ist die allgemeine Formel für die Anzahl der Flächen zweiter Ordnung entwickelt, welche irgend welchen neuen durch die 27 Parameter gegebenen Bedingungen Genüge leisten. In dieser Formel treten nothwendig die Zahlen auf, welche angeben, wieviel Flächen zweiter Ordnung 9 elementaren Bedingungen genügen, das heisst solchen, welche aussagen, dass die Flächen entweder einen Punkt enthalten, oder eine Gerade oder eine Ebene berühren sollen. Ein System von Flächen, die nur derartige Bedingungen befriedigen, ist Elementarsystem, die Charakteristiken eines solchen sind Elementarcharakteristiken genannt. Diese letztern oder die Zahlen, welche an-

geben, wieviel Flächen zweiter Ordnung allen möglichen neun elementaren Bedingungen genügen, sind im Jahre 1866 von Herrn Chasles im 62[ten] Bande der Comptes rendus ohne Beweis angegeben und etwa gleichzeitig, wie dem Verfasser später bekannt geworden ist (Cf. Schubert, Schreiben an den Herausgeber, Borchardt J. LXXIII.) auch von Herrn Zeuthen in Kopenhagen gefunden. Letzterer hat in demselben Jahre auch eine Tabelle veröffentlicht, in der diese Zahlen aus den Zahlen berechnet sind, welche angeben, wieviel degenerirte Flächen zweiter Ordnung in einem Systeme (μ, ν, ϱ) vorkommen. Diese letzteren Zahlen nun sind in der vorliegenden Abhandlung nicht bloss angegeben, sondern, so weit es erforderlich war, auch ausführlich berechnet, nachdem einige nicht ganz unnöthig erscheinende allgemeine Betrachtungen über die Elementargebilde der Geometrie der Lage in ihrem Zusammenhange mit dem Degeneriren der Flächen zweiter Ordnung vorangeschickt sind. Schon Herr Chasles hatte gefunden, dass die Anzahl der in einem Systeme (μ, ν, ϱ) vorhandenen kegelartigen Flächen zweiter Ordnung $2\varrho-\nu$, die Anzahl der kegelschnittartigen $2\mu-\nu$ beträgt. Später fand Herr Zeuthen, dass die Anzahl der Flächen zweiter Ordnung, deren sämmtliche Punkte auf zwei Ebenen liegen, deren sämmtliche Tangenten alle die Schnittgerade dieser Ebene schneidende Geraden sind, und deren sämmtliche Tangentialebenen die Ebenen sind, welche durch zwei auf jener Schnittgerade liegende Punkte gehen, dass die Anzahl solcher Flächen in einem Systeme $(\mu, \nu, \varrho) 2\nu-\mu-\varrho$ beträgt. Daraus ist ersichtlich, dass vermittelst dieser Gleichungen sich die sämmtlichen 55 Elementarcharakteristiken ergeben müssen, sobald ein gewisser Theil der Zahlen σ, ε, $\varkappa$ bekannt ist, welche ausdrücken, wieviel ausgeartete Flächen von jeder der drei Weisen der Ausartung allen möglichen 8 elementaren Bedingungen genügen.

Der Tabelle, welche diese Zahlen und die daraus abgeleiteten Elementarcharakteristiken enthält, sind gewisse sich unmittelbar aus ihr ergebende Bemerkungen angefügt, wie zum Beispiel, dass alle Ebenen, welche sechs Gerade in einem Pascal'schen Sechseck schneiden, eine Fläche achter Classe umhüllen, dass der Ort der Mittelpunkte aller 7 Gerade berührender Kegelflächen

von der 34ten Ordnung ist, und dass es 128 Kegelflächen giebt, welche durch zwei gegebene Punkte gehen und 6 gegebene Gerade berühren.

Den Schluss der Abhandlung bildet die durch die vorhergehenden Betrachtungen ermöglichte Berechnung der Anzahl der quadratischen Flächen, welche neun gegebene quadratische Flächen berühren. Es ergiebt sich dafür 666841088, eine Zahl, die vielleicht dadurch einiges Interesse gewinnen könnte, dass sie entsprechend ist der gleichzeitig von Herrn Chasles und Theodor Berent richtig zu 3264 bestimmten, von Jacob Steiner aber falsch zu $6^5 = 7776$ angegebenen Zahl, welche aussagt, wieviel Kegelschnitte fünf gegebene Kegelschnitte berühren.

Scht.

H. G. Zeuthen. Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. Brioschi Ann. (2) III. 175-218. 1869.

Bekanntlich hat Herr Cayley aus den Plücker'schen Gleichungen zwischen den Anzahlen der sechs einfachsten Singularitäten einer ebenen Curve sechs Gleichungen zwischen den Zahlen für die neun einfachsten Singularitäten einer Raumcurve abgeleitet, wobei zu der als Punktreihe aufzufassenden Curve auch die als Ebenenreihe aufzufassende abwickelbare Fläche hinzugerechnet werden muss, welche reciprok zu der Curve, als die Einhüllende ihrer sämmtlichen Osculationsebenen erscheint. Darauf haben die Herren Cayley, Salmon, Zeuthen vermittelst der neun Cayley'schen Zahlen andere Singularitätenzahlen für eine Curve und eine abwickelbare Fläche aufgestellt. In der vorliegenden Abhandlung beweist nun Herr Zeuthen diese von ihm früher durch die Comptes rendus (siehe Fortsch. d. M. I. p. 231.) veröffentlichten Resultate, und fügt eine Reihe neuer hinzu. Die Singularitäten, deren Anzahlen hergeleitet werden, sind sämmtlich von der ersten Ordnung, das heisst, sie setzen nur Punkte, Ebenen oder Gerade mit der Curve in Beziehung.

Nach Einführung übersichtlicher symbolischer Bezeichnungen für die Anzahl der Gebilde, welche gewissen gegebenen Be-

dingungen genügen, fügt der Verfasser den gewöhnlichen neun Singularitäten noch drei andere hinzu, nämlich das Begabtsein der Curve mit Doppelpunkten, das der abwickelbaren Fläche mit Doppeltangentialebenen, und das Enthalten von Inflexionstangenten, d. h. Geraden, die durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gehen oder reciprok auf drei aufeinanderfolgenden Ebenen der abwickelbaren Fläche liegen. Die Zahlen für diese Singularitäten führt er in die Cayley'schen Formeln ein, indem er die Plücker'schen Formeln auf den Kegel, welcher die gegebene Curve von irgend einem Punkte aus projicirt, resp. auf die ebene Curve anwendet, in welcher die abwickelbare Fläche von irgend einer Ebene geschnitten wird. Die Herleitungen der Formeln für die neuen Singularitätenzahlen beruhen auf dem von Herrn Chasles in die Geometrie eingeführten algebraischen Princip der Correspondenz, welches aussagt, dass, wenn in einer geraden Punktreihe einem beliebigen Punkte in gewisser Weise m Punkte entsprechen, von denen jeder zu n Punkten der entsprechende ist, es $m+n$ Stellen auf der Geraden geben muss, wo zwei einander so entsprechende Punkte zusammenfallen, und welches das Analoge von ebenen Strahlbüscheln behauptet. Die Schwierigkeiten, welche bei der Anwendung dieses Princips die Frage verursacht, wie vielfach jede Lösung zu rechnen ist, löst der Verfasser durch zwei Methoden, In der ersten sieht er die Entfernungen x und u zweier einander entsprechender Punkte einer Geraden von einem auf ihr liegenden festen Punkte als die Coordinaten einer Curve S an, deren Schnittpunkte mit der Geraden $x=u$ dann mit den Punkten der Geraden correspondiren, in denen zwei einander entsprechende Punkte vereinigt sind. Eine Untersuchung, wieviel Punkte S und $(x=u)$ in jedem dieser Schnittpunkte gemeinsam haben, ergiebt dann, wievielmal entsprechende Punkte an der zugehörigen Stelle des Trägers der Punktreihe zusammenfallen. Die zweite vom Verfasser experimentell genannte Methode beruht darauf, die unbekannten Coefficienten durch Gleichsetzung von Ausdrücken zu bestimmen, die auf verschiedene Weise nach dem Princip der Correspondenz für dieselbe Zahl gefunden sind. Zur Auseinandersetzung dieser beiden Methoden wird zuerst die

Zahl der Geraden bestimmt, welche zwei feste Gerade treffen, und ausserdem noch die gegebene Curve m^{ter} Ordnung in zwei verschiedenen Punkten schneiden, und daran sich anschliessend, die Zahl der Geraden, welche eine feste Gerade und dreimal die Curve treffen. Bei dieser letzten Aufgabe ergiebt sich, um ein Beispiel solcher Singularitätenformeln hier anzuführen,

$$(m-2)\left[h-\frac{m(m-1)}{6}\right],$$

wo h die Zahl der Geraden ist, welche, von einem Punkte ausgehend, die gegebene Curve zweimal treffen. Hierauf folgen mehr als vierzig Bestimmungen der Anzahlen von Punkten, Geraden und Ebenen, welche mit der gegebenen Curve in Beziehung stehen, und zwar sind diese Zahlen in ihrer Abhängigkeit von den früher erwähnten zwölf fundamentalen Singularitätenzahlen dargestellt. Zu den complicirteren der hier gelösten Aufgaben gehört zum Beispiel die Bestimmung der Anzahl der Dreiecke, deren Ecken auf der Curve liegen, und deren Seite dieselbe noch einmal treffen, und die Bestimmung der Anzahl der Dreiecke, deren drei Seiten je drei Schnitte mit der Curve haben, ohne dass eine Ecke auf sie fällt. Scht.

HALPHÉN. Sur le nombre des droites qui satisfont à quatre conditions données. C. R. LXVIII 141-145. 1869.

Die Arbeit enthält den Beweis des Satzes, dass die Anzahl derjenigen Geraden, welche zweien Paaren von Bedingungen genügen, $\mu\mu_1+\nu\nu_1$ ist, wenn μ, ν und μ_1, ν_1 die Charakteristiken für die Bedingungen sind. Eine Anzahl specieller Anwendungen des Satzes bildet den Schluss der Note. T.

A. CAYLEY. On the problem of the inscribed = and = circumscribed triangle. Rep. Britt. Ass. 1869/70.

Das Problem, dessen Lösung der Verfasser giebt, ist folgendes: Gesucht wird die Zahl der Dreiecke, deren Winkel in einer oder mehreren gegebenen Curven gelegen sind und deren Seiten eine oder mehrere gegebene Curven berühren. Es giebt

im Ganzen 52 Fälle dieses Problems, je nachdem die Curven, welche die Winkel enthalten, und die, welche die Seiten berühren, verschieden oder dieselben sind. Bezeichnet man mit a, c, e die Ordnungen der Winkelcurven und mit B, D, F die Classen der Seitencurven, so ist die Zahl der Dreiecke $2aceBDF$. Sind die Winkelcurven dieselben, so ist die Zahl

$$\{2a(a-1)(a-2)+A\}BDF,$$

wo a und A die Ordnung und Classe der Winkelcurven bezeichnen. Im analogen Fall, wo die Seitencurven dieselben sind, ergiebt sich $2\{B(B-1)(B-2)+b\}ace$. Der schwierigste Fall ist der, wo die 6 Curven alle dieselben sind. Dann wird die Anzahl der Dreiecke ausgedrückt durch ein Sechstel von

$$A^4(\cdots+1)+A^3(\cdot 2a^3-18a^2+52a-46)+A^2(\cdot-18a^3+162a^2-420a+221)+A(\cdot 52a^3+221a^2+704a+172)+a^4-46a^3+221a^2+172a+\alpha\{A^2(\cdots-9)+A(\cdots-12a+135)-9a^2+135a-600\}.$$

Hierbei bezeichnet a die Ordnung, A die Classe der Curve, und α ist gleich 3 Mal der Ordnung der Zahl der Inflexionen.

Csy. (O.)

R. Sturm. Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches? Brioschi Ann. (2) III 28-32 1869.

Die Resultate sind folgende:

1) Haben zwei Raumcurven dritter Ordnung keinen Punkt mit einander gemein, so giebt es 10 gemeinschaftliche Secanten (d. h. Gerade, welche jede der beiden Curven in 2 Punkten treffen).

2) Haben diese Curven aber einen Punkt gemein, so gehen durch diesen 4; also giebt es ausserdem noch 6 gemeinschaftliche Secanten.

3) Haben die Curven 2 Punkte gemein, so gehen ausser der Verbindungsgeraden beider, durch jeden derselben noch drei; ausserdem giebt es daher noch drei gemeinschaftliche Secanten.

4) Haben die Curven 3 Punkte gemein, so hat man erstens das Dreieck dieser drei Punkte; ferner gehen durch jeden Punkt zwei gemeinschaftliche Secanten; daher giebt es ausserdem nur noch eine.

5) Haben die Curven 4 Punkte gemein, so hat man erstens die 6 Verbindungsgeraden dieser 4 Punkte, und durch jeden Punkt dann noch eine gemeinschaftliche Secante; ausserdem existirt keine. Der Fall, in welchem beide Curven auf derselben Fläche 2ten Grades liegen, wird hierbei noch besonders behandelt. In diesem Falle giebt es unendlich viele gemeinschaftliche Secanten.

6) Haben die Curven 5 Punkte mit einander gemein, so sind die 10 Verbindungsgeraden dieser 5 Punkte die gemeinschaftlichen Secanten.

7) Die Curven können nicht 6 Punkte mit einander gemein haben, ohne identisch zu sein. Mz.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

R. Heger. Die Grundformeln der analytischen Geometrie der Ebene in homogenen Coordinaten. Schlömilch Z. XV. 389-426. 1870.

Den Gegenstand der Arbeit bilden die grundlegenden Rechnungen und Sätze der analytischen Geometrie der Ebene in homogenen Punkt- und Geraden-Coordinaten. Als homogene Coordinaten eines Punktes werden definirt die senkrechten Abstände dieses Punktes von den drei Seiten eines Dreiecks (Axen- oder Coordinaten-Dreieck). Als homogene Coordinaten einer Geraden dagegen die Quotienten aus den Abständen derselben von den Ecken des Coordinaten-Dreiecks und dem Abstande von dem willkürlich in der Ebene angenommenen Fixpunkte. Es wird nun zunächst erörtert, dass der Uebergang von einem orthogonalen Systeme zu einem homogenen oder von einem homogenen Systeme in ein anderes durch homogene, der Uebergang von einem homogenen in ein orthogonales aber durch lineare Substitutionen erfolgt. Daran schliesst sich die Behandlung der Gleichung der Geraden und des Punktes in homogenen Coordinaten des Punktes und der Geraden, die Behandlung einzelner Aufgaben über Punkt und Gerade und die Herleitung von Sätzen über Curven zweiten Grades.

Zunächst ergiebt sich allgemein, dass die Gleichung einer jeden Curve n^{ten} Grades oder n^{ter} Classe in homogenen Coordinaten als homogene Function n^{ten} Grades dargestellt werden kann. Ebenso allgemein werden die Untersuchungen über die Gleichung der Tangente in einem Punkt einer Curve, über die Gleichung des Tangentialpunktes in einer einhüllenden Geraden einer Curve geführt. Diese Untersuchung führt zu dem Resultate, dass die Curven zweiten Grades zugleich auch Curven zweiter Classe sind und umgekehrt. Hieran reihen sich Untersuchungen über Pol und Polaren der Kegelschnitte. Es lässt sich für einen jeden Kegelschnitt (ausgenommen sind nur gewisse Abarten) stets ein ganz im Endlichen liegendes Dreieck auffinden, dessen Seiten Polaren der Gegenecken oder dessen Ecken Pole der Gegenseiten sind. Ein solches Dreieck heisst sich selbst conjugirt. Transformirt man die homogenen Gleichungen der Kegelschnitte in Bezug auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck, dann nehmen sie einfache Gestalten an und gestatten dadurch eine bequeme Discussion. Sätze über zwei Dreiecke, welche für einen und denselben Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind, bilden den Schluss der Arbeit. T.

R. Heger. Neue homogene Plancoordinaten. Schlömilch Z. XV. 117-121. 1870.

Der Verf. nimmt ein Coordinatentetraeder an und definirt: Unter den neuen Plancoordinaten u, v, w, r einer Ebene versteht man die Quotienten aus den Abständen der Ebene von den Tetraederecken und von dem Centrum der eingeschriebenen Kugel; sie werden positiv gerechnet für die Tetraederecken, die mit dem Centrum auf derselben Seite der Ebene liegen, im Gegenfalle negativ. — Weiterhin macht er noch auf einige Entwickelungen aufmerksam, die für diese Coordinaten Gültigkeit haben, aber nicht für die gewöhnlichen homogenen Plancoordinaten [d. i. die Abstände einer Ebene von den Ecken des Coordinatentetraeders.] Mz.

H. G. Zeuthen. Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. Clebsch Ann. I. 432-454. 1869.

Während Plücker (Neue Geometrie des Raumes; cf. Fortschr.

d. M. I. 1868 p. 198, II. 1869 u. 1870 Abschn. IX. Cap. 4) und Cayley (Quart. J. III. 226 Trans. of. Camb. XI. part. II) zur Einführung von Linien-Coordinaten von Punkt- oder Ebenen-Coordinaten ausgehen, benutzt der Verf. zur Erreichung desselben Zweckes in der oben genannten Note eine der Mechanik entlehnte Darstellungsweise.

Unter Moment einer als Einheit angenommenen Kraft in Bezug auf eine feste Axe versteht man das Produkt, gebildet aus dem kürzesten Abstande zwischen Kraft und Axe und aus dem Sinus des Winkels, den Kraft und Axe mit einander bilden. Nach dieser Analogie nennt man, in rein geometrischem Sinne, Moment zweier Geraden das ebenso gebildete Product; dabei kann jede der beiden Geraden als Axe aufgefasst werden. Eine beliebig angenommene Gerade K ist durch ihre sechs Momente in Bezug auf die sechs Kanten eines festen Tetraeders (tétraèdre de référence) bestimmt.

Statt dieser sechs Momente kann man auch die sechs Grössen nehmen, welche man erhält, wenn man den Inhalt der sechs Tetraeder, die als Gegenkanten ein der Einheit gleiches Segment der Geraden K und eine Kante des ursprünglichen Tetraeders enthalten, durch den Inhalt dieses letzteren dividirt. Diese sechs Grössen werden — auch von Cayley — die Linien-Coordinaten der Geraden K genannt. Die Gleichungen, welche zwischen diesen bestehen, gestatten aus vier Verhältnissen der Coordinaten diese selbst zu berechnen.

Um die Anwendbarkeit dieser Coordinaten zu zeigen, werden die Bedingungen erörtert, die erfüllt sein müssen, damit mehrere Gerade durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen; es werden ferner einige Eigenschaften der Plücker'schen Complexe und Complexflächen hergeleitet. T.

H. G. ZEUTHEN. Om et nyt Rumkoordinatsystem. Forh. af Christ. 1869. 148.

Siehe Mathematische Annalen Bd. I. p. 432, und das vorhergehende Referat.

E. d'Ovidio. Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee. Battaglini G. VIII. 241-283. 1870.

Eine sehr grosse Anzahl metrischer Relationen an Punkten, geraden Linien und Ebenen. Es werden auf Grund dieser Relationen Punkt-, Linien- und Ebenencoordinaten definirt. Man findet ferner Ausdrücke für den Winkel zweier Geraden, zweier Ebenen; die Entfernung zweier Punkte, zweier Geraden u. a. m. Das Ganze zeichnet sich durch eine grosse Allgemeinheit der Betrachtung aus. Mz.

Neuberg. Étude sur les coordonnées tétraédriques. Rapport de Gilbert. Bull. de Belg. (2) XXVIII. 529-539. 1869.

Die Arbeit enthält Anwendungen dieser Coordinaten auf Gerade. Z. B. wird die Entfernung zweier Punkte aus der Gleichung der dem Fundamental-Tetraeder umschriebenen Kugel auf eine directere Weise als bei Salmon hergeleitet. O.

J. Toeplitz. Die constanten Relationen bei den Dreiecks- und tetraedrischen Coordinaten. Schlömilch Z. XIV. 253-260. 1869. Mz.

F. Klein. Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Clebsch Ann. II. 366-370. 1870.

Zur Definition der Liniencoordinaten geht der Verf. wie H. Zeuthen (Clebsch Ann. I, 432-454) von dem Momente zweier geraden Linien in Bezug auf einander aus. Er erörtert dann die geometrische Bedeutung der allgemeinen linearen Transformation der Liniencoordinaten. T.

A. Hall. Transformations in Hansen's method of perturbations. Messenger V. 15-23. 1869.

Die Arbeit besteht in einem Résumé eines Theils der Hansen'schen Untersuchungen über Transformirung von Systemen seiner „Ideal coordinates“. Aus einer der Transformationen, welche H. Hansen mit Hülfe von imaginären Exponentialfunctionen bildet, leitet der Verfasser eine geometrische Construction her, welche denselben Gegenstand betrifft. Glr. (O.)

C. Taylor. On some equivalent equations. Quart. J. X. 93-96. 1869.

Erörterungen über die Frage, in wie weit die Ausdrucksweise berechtigt ist, dass ein Kegelschnitt continuirlich in zwei reelle oder imaginäre Gerade bez. in zwei reelle oder imaginäre Punkte ausarten kann. —

Der Verf. benutzt bei der Discussion Punkt- und Linien-Coordinaten, oder, wie er sich ausdrückt, Cartesische und Booth'sche Coordinaten. Hinsichtlich dieser Bezeichnung mag die folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden. Die Coordinaten der Linie in der Ebene, so wie der Ebene im Raume sind in der jetzt angewandten Weise zuerst von Plücker eingeführt worden (Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen. Crelle J. VI. 1830), nachdem vorher Möbius in seinem barycentrischen Calcul (1827) zuerst den Gedanken ausgesprochen hatte, dass man eine Gerade in der Ebene gleich dem Punkte durch Coordinaten bestimmen könne. In dem zweiten Bande seiner „Analytisch geometrischen Entwickelungen" (1831) hat Plücker den Gegenstand des Weiteren untersucht. Als Coordinaten der geraden Linie benutzt er dabei namentlich die negativ und reciprok genommenen Abschnitte derselben auf zwei Coordinaten-Axen. Auf diese particuläre Linien-Coordinaten-Bestimmung ist dann einige Jahre später auch Booth geführt worden. (On tangential Coordinates. 1840. vergl. Salmon's Treatise on the Higher plane Curves. p. 16 Note.) Die Plücker'schen Untersuchungen scheinen in England einige Zeit unbekannt geblieben zu sein, und so ist es wohl gekommen, dass einige englische Geometer die betr. Linien-Coordinaten (und die entsprechenden Ebenen-Coordinaten) als Booth'sche Coordinaten bezeichnen. (vergl. z. B. die Aufsätze von Jeffery im Quart. J. IX. Fortschr. d. M. I. 154, 241.) Die allgemeinen homogenen Linien-Coordinaten benennen dieselben Three-point (Tangential) Coordinates, im Gegensatze zu den Three-line Coordinates, welches die homogenen Punkt-Coordinaten sind. Kln.

Fiedler. Ueber die projectivischen Coordinaten. Wolf J. XV. 152-182. 1870.

H. M. JEFFERY. On conicoids referred to four-points tangential coordinates. Quart. J. X. 97-110. 1869.

Fortsetzung zu der Arbeit des Verfassers, die Fortschr. d. M. I. p. 154 besprochen ist. Mz.

W. ESSON. Axial coordinates. Quart. J. X. 113-121. 1869.

Verbindet man einen Punkt P mit den Punkten, in denen eine Gerade L die Seiten eines Dreiecks schneidet, so kann man die Lage des Punktes durch die Richtungen dieser Geraden bestimmen.

Als „Axial Coordinates" werden nun die Differenzen der Cotangenten derjenigen Winkel genommen, welche die Gerade L mit einer Dreieckseite und den entsprechenden Verbindungsgeraden einschliesst, so dass, wenn s eine Dreieckseite, r die entsprechende Verbindungsgerade bedeutet,

$$\text{cotan}\, s.L - \text{cotan}\, r.L$$

eine der 3 Coordinaten des Punktes ist.

Der Verfasser giebt die fundamentalen Relationen zwischen diesen Coordinaten und behandelt dann die Gerade in diesem System. He.

J. HOÜEL. Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis (Calcul des équipollences). Nouv. Ann. (2) VIII. 289-312. 337-357. 1869.

Die Grundzüge des von Bellavitis erdachten geometrischen Algorithmus, welche der Verfasser hier reproducirt, sind die folgenden.

Aequipollent heissen zwei gerade Linien von gleicher Länge und Richtung. Die geometrische Summe mehrerer Geraden heisst der Abstand der Endpunkte einer gebrochenen Linie, deren gerade Stücke einzeln den Summanden äquipollent sind. Verschiedene Länge bei gleicher Richtung wird durch Coefficienten bezeichnet. Zum Ausdruck der Aequipollenz verwendet Hoüel das Gleichheitszeichen. Ist in diesem Sinne

$$x.AB = y.CD,$$

so ist entweder AB parallel CD oder $x = y = 0$. Der Ausdruck $i.AB$ bezeichnet eine Gerade normal zu AB von gleicher Länge.

Ebenso können durch $i^u . AB$ alle Neigungen ausgedrückt werden. Ein Winkel wird als Differenz zweier Neigungen gedacht. Die geometrische vierte Proportionale

$$\frac{AB . CD}{EF} = GH$$

heisst eine Gerade, deren Länge aus der Proportion resultirt, und deren Richtung durch

$$\text{Neig.} GH = \text{Neig.} AB + \text{Neig.} CD - \text{Neig.} EF$$

bestimmt ist. Direct gleich heissen zwei ebene Figuren, die durch Parallelverschiebung in der Ebene, conjugirt, die durch Drehung der Ebene um eine Axe zur Deckung gelangen können. Zur Anwendung der Theorie auf Curven hat man das Linienelement als Gerade aufzufassen.

Diese Einführungen gestatten in ziemlichem Umfange Schlüsse nach Art der Algebra, die man bei einiger Uebung leicht kennen lernt. Mit dem Zeichen i wird ebenso gerechnet, wie sonst mit $\sqrt{-1}$. Eine Anzahl durchgeführter Aufgaben und Sätze aus der Planimetrie, einschliesslich der ebenen Curven, zeigt, dass der Algorithmus viele Deductionen ungemein vereinfacht.

H.

G. Darboux. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. C. R. LXIX. 392-394. 1869.

Wenn man ein orthogonales System mit beliebig vielen Variabeln kennt, kann man eine unendliche Anzahl von dreifach orthogonalen und algebraischen Systemen erhalten, welche dem Systeme der confocalen Flächen zweiten Grades analog sind. Die Principien der zum Beweise dieses Satzes befolgten Methode werden erörtert. T.

M. Lévy. Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales. J. de l'Ec. Pol. Cah. 43. 157-200. 1870.

Der Verfasser theilt im Eingange mit, dass H. Bouquet zuerst gezeigt hat, es lassen sich nicht immer zu einer gegebenen Flächenfamilie zwei andere finden, die mit der ersten ein dreifach orthogonales System bilden. H. Serret ging von den 3 Relationen aus, denen die Parameter ϱ, λ und μ von 3 Flächen-

familien, die sich rechtwinklig schneiden, genügen müssen, und zeigte nach Elimination von λ und μ, dass ϱ zugleich 2 partielle Differentialgleichungen 6ter Ordnung erfüllen muss. Bonnet wies nach, dass die Aufgabe, dreifach orthogonale Flächensysteme zu bestimmen, auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung führt. In einer längeren Abhandlung behandelt nun der Verfasser die Bedingung für solche Systeme analytisch und geometrisch, zeigt die Wichtigkeit der Oerter der Nabelpunkte auf den hier vorkommenden Flächen, betrachtet die orthogonalen Systeme, welche irgend eine Familie von Flächen zweiten Grades enthalten und weist endlich nach, dass seine Methode in einer grossen Zahl von Fällen zur Entdeckung neuer Coordinatensysteme führt.

Die geometrische Bedingung eines dreifach orthogonalen Systems, wie sie vom Verfasser angegeben wird, möge hier eine Stelle finden:

Damit eine Flächenfamilie an einem orthogonalen System Theil nehmen könne, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie folgende Bedingungen erfüllt: Es sei M ein Punkt einer der vorgelegten Flächen. Durch diesen Punkt ziehen wir Tangenten MT und MT_1 an die beiden Krümmungslinien der Fläche durch M, und ferner die Normale MM', die wir bis zu ihrem Durchschnitt M' mit der unendlich nahen Fläche vorlängern. Endlich ziehen wir durch den Punkt M' die Tangenten $M'T'$ und $M'T'_1$ an die beiden Krümmungslinien durch M'. Damit nun die vorgelegte Flächenfamilie orthogonale Flächen zulasse, ist nothwendig und hinreichend, dass die Tangente $M'T'$ einen Winkel mit der Ebene $M'MT$ bilde, der ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist — oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass der kürzeste Abstand zwischen den beiden Geraden MT und $M'T'$ unendlich klein von der zweiten Ordnung sei. Ist diese Bedingung für die Tangenten MT und $M'T'$ an das eine System von Krümmungslinien erfüllt, so ist sie es schon von selbst auch für die Tangenten MT_1, $M'T'_1$ an das andere System. Mz.

AOUST. Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. Brioschi Ann. (2) III. 55-70. 1870.

Fasst man von den Coordinatenflächen ϱ_1 eine bestimmte

in's Auge und nimmt an, dass dieselbe von den Schaaren ϱ und ϱ_2 rechtwinklig durchschnitten werde, so ergeben sich aus den Gleichungen des ersten Theiles (Brioschi Ann. (1) VI. No. 2 — s. Fortschr. d. M. I. 213-17) zahlreiche und einfache Relationen für die Curvenschaaren σ und σ_2. Die Seitenkrümmungen der Elemente $d\sigma$ und $d\sigma_2$ nach $d\sigma_1$ erhalten eine von der sonstigen Beschaffenheit der Coordinatenfläche ϱ und ϱ_2 unabhängige Bedeutung, weil die zugehörigen Contingenzwinkel in die Winkel zwischen je zwei unendlich nahen Normalen der Fläche ϱ_1 übergehen. Die Untersuchung beschränkt sich ganz auf die Coordinatenlinien σ und σ_2 der Fläche ϱ_1 und bezieht sich wesentlich auf den Zusammenhang zwischen den Componenten der Krümmungen, ihren Variationen und dem Krümmungsmaass der Fläche ϱ_1. Die erhaltenen Beziehungen gestatten eine zwanglose Behandlung des Problems der Deformation und führen zu Grundgleichungen allgemeinster Art, aus denen sich diejenigen von Bour (Journ. de l'Éc. Polyt. 39) als specielle Fälle ergeben, wenn man die Voraussetzung macht, dass auf der zu deformirenden Fläche ϱ_1 die Schaar σ_2 geodätische Linien, die andere σ deren rechtwinklige Trajectorien vorstellen. Diese Gleichungen fallen natürlich verschieden aus, je nach der Wahl der Unbekannten. Von den in der vorliegenden Abhandlung besprochenen drei Fällen führt auf die Bour'schen Gleichungen das System, in welchem folgende Grössen als Unbekannte gelten: Die nach der Normalen von ϱ_1 genommenen Componenten der Haupt- und Seitenkrümmungen der Elemente $d\sigma$ und $d\sigma_2$, nämlich

$$\frac{1}{r^{(1)}}, \quad \frac{1}{r_2^{(1)}}, \quad \frac{1}{l_{02}^{(1)}}, \quad \frac{1}{l_{20}^{(1)}}.$$

Da die beiden letzten Quantitäten einander gleich werden, so reduciren sich diese Unbekannten auf drei, welche einer gewöhnlichen und 2 linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu genügen haben. Für den Bour'schen Fall ist

$$\varphi_1 = 90^\circ, \quad \frac{1}{r_2^{(1)}} = 0,$$

$\left(\frac{1}{r_2^{(1)}}\right.$ nach $d\sigma$ genommene Componente der Hauptkrümmung von $\left.d\sigma_2\right)$.

K.

AOUST. Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 205-233. 1869.

Denkt man die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als gegebene Functionen einer unabhängigen Variable t, so bestimmen sie eine Raumcurve, welche auf keiner der Coordinatenflächen liegt; die Bestimmung der Krümmungen dieser Curven nach den in der oben genannten Fundamental-Arbeit aufgestellten Principien, bildet den Inhalt der vorliegenden Abhandlung. An Stelle der Krümmungen setzt Herr Aoust auch hier die drei nach $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ genommenen Componenten, welche sich mit Hülfe der Seitenkrümmungen der Coordinatenlinien in mehrfacher und übersichtlicher Weise ausdrücken lassen. Ausser den gewöhnlichen Krümmungen der Raumcurve definirt H. Aoust, analog wie für die Coordinatenlinien σ, σ_1, σ_2, Seitenkrümmungen. Denkt man nämlich durch jeden Punkt der Raumcurve eine Gerade gezogen, jede unendlich nahe der vorhergehenden, dann ist Seitenkrümmung eines Elementes $\alpha\beta$ der unendlich kleine Winkel der durch α und β gehenden Geraden, dividirt durch $\alpha\beta$. Nennt man die variable Gerade r, so redet Aoust von der Seitenkrümmung des Elementes $\alpha\beta$ (ds) nach r, A_r. Interesse verdient der Fall, in welchem die Geraden Tangenten der Coordinatencurven σ sind, welche die Raumcurve treffen, weil die Componenten dieser auf $d\sigma$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ bezogenen Seitenkrümmungen höchst einfache Formen für die Variationen liefern, welche die Winkel φ, φ_1, φ_2 längs der Raumcurve erfahren. In dem zweiten Theil der Arbeit zeigt Aoust, wie diese Behandlung der Curven im Raume für verschiedene Fragen der Mechanik nutzbar gemacht werden kann. K.

AOUST. Note sur les équations fondamentales du probléme de la déformation des surfaces. C. R. LXIX. 1095. 1869.

Behandelt die Frage, wie der zweite Theil der oben genannten Arbeit in Brioschi Ann. K.

AOUST u. GILBERT. Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. Inst. 1. sect. XXXVII. 118-119. 183-184. 206-208. 1869.

In den genannten drei Nummern sind Briefe von Aoust und

Gilbert über einen Prioritätsstreit veröffentlicht, den Herr Aoust mit grosser Leidenschaftlichkeit, aber, wie dem Ref. scheint, mit den besten Gründen führt. Auffallend erscheint, dass Herr Gilbert den Raum für seine Briefe nicht mit einer positiven Widerlegung der genau bezeichneten Ansprüche von Aoust ausfüllt. Hätte er auch nur eine einzige der Formeln, an der ihm das Prioritätsrecht bestritten wird, discutirt und gezeigt, dass er sie auf wesentlich verschiedenem Wege gefunden hätte, es würde ihm mehr geholfen haben, als der Apell an das Urtheil der Geometer. Auf der anderen Seite scheint Herr Aoust seine Verdienste um die Theorie der krummlinigen Coordinaten doch auch zu überschätzen, indem er sich für den Erfinder von Principien hält, die wohl allgemein, also auch Herrn Gilbert bekannt gewesen sind. Die Vorzüge der Aoust'schen Theorie sind wohl im folgenden zu suchen. Seine Formeln sprechen von Grössen, die geometrisch leicht anschaulich sind, und seine Relationen sind verhältnissmässig übersichtlich und einfach; an die Stelle der Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten treten ausser der gewöhnlichen Krümmung die Seitenkrümmungen. Die Einfachheit der Formeln wird aber noch wesentlich durch Einführung der Krümmungs-Componenten hervorgebracht; ohne dieselbe würden sehr complicirte unübersichtliche Ausdrücke entstehen. Der Begriff der Seitenkrümmung wird aber leicht gebildet, wenn man die krumme Fläche als Grenze der Oberfläche eines von Elementar-Dreiecken begrenzten Polyeders auffasst, und er könnte durch manche andere Quantität, welche ebenfalls geeignet ist, die gegenseitige Lage zweier aneinanderstossenden Elementar-Dreiecke zu bestimmen, ersetzt werden; aus dieser allbekannten Auffassung ergiebt sich mit Nothwendigkeit der Gang der Rechnung. Das Verdienst des Herrn Aoust liegt darin, dass er diesen Weg mit Consequenz verfolgt hat, nicht darin, dass er ihn überhaupt fand. Der Gedanke, die Krümmungen als Linien darzustellen, und dies als Bilder von Kräften aufzufassen, ist ebensowenig neu; schon Lamé hat ihn gehabt.

K.

D. Codazzi. Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Brioschi Ann. (2) IV. 16-25. 1870.

In dieser Fortsetzung der früheren Arbeiten (siehe Fortschr. d. M. I. p. 212) hat Herr Codazzi den Begriff Seitenkrümmung von Aoust aufgenommen und die wichtigsten Formeln aus dessen erster Abhandlung Tortolini Ann. (1) VI auf rein analytischem Wege reproducirt. Kr.

F. Lippich. Die Ebene und Gerade als Elemente des barycentrischen analytischen Calculs. Graz, Leuschner und Lubensky 1870.

E. Françoise. Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de géométrie élémentaire. Nouv. Ann. (2) IX. 66-73. 1870.

Es ist die Aufgabe gelöst, ein Polygon zu construiren, von dem man die Spitzen der Dreiecke kennt, welche, einem gegebenen Dreiecke ähnlich, auf den Seiten des Polygons construirt sind. Dreieck und Viereck wird besonders erörtert.

T.

G. Bardelli. Sulla trasformazione delle coordinate nello spazio. Rend. d. Ist. Lomb. (2) II. 1869.

In dieser Note werden die Transformationsformeln von Euler, Monge, Rodrigues, Brioschi bewiesen. Es werden die Relationen festgestellt, durch welche man von einer Transformation zu einer anderen übergehen kann, und die verschiedenen Systeme von Hülfsvariabeln, die diese Gelehrten eingeführt, geometrisch gedeutet. Jg. (O.)

A. Cayley. On the six coordinates of a line. Trans. of Cambridge XI. 290-323. 1869.

Der Verf. bemerkt, dass die Bezeichnung der 6 Coordinaten einer Linie, so viel ihm bekannt, zuerst in seiner Arbeit „On a new analytical representation of curves in space“ (Quart. J. III. 1860) gegeben ist; dass aber diese Coordinaten sich unabhängig davon darboten in Plückers Theorie „On a new geometry

of space" (Trans. of London CLV. 1865.) Der Ausgangspunkt der Theorie ist folgender: Man benutze irgend welche quadriplanare Coordinaten x, y, z, w und betrachte eine Linie, auf der Linie 2 Punkte mit den Coordinaten α, β, γ, δ und α', β', γ', δ', durch die Linien 2 Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax+By+Cz+Dw=0, \qquad A'x+B'y+C'z+D'w=0$$

sind. Dann ist:

$$\beta\gamma'-\beta'\gamma : \gamma\alpha'-\gamma'\alpha : \alpha\beta'-\alpha'\beta : \alpha\delta'-\alpha'\delta : \beta\delta'-\beta'\delta : \gamma\delta'-\gamma'\delta$$
$$= AD'-A'D : BD'-B'D : CD'-C'D : BC'-B'C : CA'-C'A : AB'-A'B,$$

und setzt man beide Reihen von Verhältnissen $= a:b:c:f:g:h$, dann sind die Grössen a, b, c, f, g, h, welche, wie man zugleich sieht, der Gleichung $af+bg+ch=0$ genügen, die „sechs Coordinaten" der Linie. Cly. (M.)

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

A. Steen. Begyndelsegrunde i den analytiske Geometri. Kjnhavn Rectyl 1869.

O. Schlömilch. Ueber rectificable Curven. Schlömilch Z. XV. 124-126. 1870.

Siehe Abschn. VI. Cap. 3 p. 145.

J. Somof. Note sur la rectification approximative des courbes quelconques. Mém. de St. Pét. 1869.

Dans mon mémoire: „Sur les accélérations des divers ordres" sagt der Verfasser, j'ai déduit de la théorie de ces grandeurs cinématiques, le développement en série: de la corde d'un arc d'une courbe quelconque et de projections de cette corde sur la tangente et les deux normales principales, ménées par l'une des extrémités de l'arc."

Aus diesen Entwickelungen leitet Herr Somof einen allgemeinen und sehr einfachen Ausdruck der angenäherten Länge

eines Bogens ab, der hinreichend klein ist, um die fünfte Potenz vernachlässigen zu können. Er findet nämlich: Die Länge des Bogens ist gleich 4 Dritteln der Sehne weniger dem 6ten Theil der Summe der Projectionen dieser Sehne auf die äussersten Tangenten. Der Verfasser fügt dieser Note einige Zahlenbeispiele hinzu. Z. (O.)

A. Steen. Ogtan en Methode til Integration af

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = f(x^2+y^2).$$

G. Mittag Leffler. Integration af Differentialequationer

$$f(x^2+y^2) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dillner Tidsskr. III. 24 u. 28. 1870.

Siehe Abschn. VI. Cap. 5. p. 169.

E. Ribaucour. Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan. Inst. XXXVII. 1. sect. 124-125. 1870. T.

G. Dostor. Relations nouvelles entre les tangentes, normales, sous-tangentes et sous-normales des courbes en général, avec application aux lignes du second degré. Grunert Arch. LI. 129-190. 1870.

Die vorliegende Abhandlung giebt eine vollständige Entwickelung der Beziehungen, welche zwischen Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen, und zwar denjenigen Theilen dieser Geraden bestehen, welche einerseits zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenaxe, andererseits zwischen dem Berührungspunkte und der Ordinatenaxe liegen. Es werden zunächst diejenigen Relationen zwischen diesen Grössen und den Coordinaten des Berührungspunktes aufgesucht, welche vom Coordinatenwinkel unabhängig sind, dann diejenigen, welche sich mit der Grösse dieses Winkels ändern. Daran schliessen sich

dann diejenigen, welche speciell für ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelten. Es folgen nun Relationen zwischen den in Rede stehenden Grössen, die mit Hilfe der Gleichung der Curve und des Coordinatenwinkels gebildet werden. Die gewonnenen Resultate werden dann noch ausführlich auf die Ellipse, Hyperbel und Parabel angewandt. T.

L. Painvin. Courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface. C. R. LXVIII 131-135. 1869.

Eine Sammlung von Lehrsätzen über die Krümmung an einem vielfachen Punkt einer Curve und (weiterhin) einer Fläche. Es werden die Berührungen verschiedener Ordnung besprochen und die Fälle betrachtet, in denen die Curve oder Fläche Rückkehrpunkte besitzt. Mz.

L. Lindelöf. Sur la courbure moyenne d'une courbe plane fermée. Mondes (2) XXII. 110-112. 1870.

Von der Gleichung $2A = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n$ ausgehend, wo A die Fläche, $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Seiten, $p_1, p_2, \ldots p_n$ die von einem beliebigen Punkte auf die entsprechenden Seiten gefällten Lothe sind (positif oder negativ, je nachdem sie ausserhalb oder innerhalb fallen), beweist H. Lindelöf folgenden Satz: Die mittlere Krümmung einer ebenen geschlossenen Curve erhält man, indem man den Umfang durch das Doppelte der Fläche dividirt. O.

H. M. Jeffery. On dual curvature, and the duals of evolutes and involutes. Quart. J. X. 321-344. 1870.

Der Verfasser betrachtet neben dem Krümmungskreis einer ebenen Curve, als ihm entsprechend, und als dessen Dual benannt, den Kegelschnitt, welcher mit derselben Curve eine Berührung zweiter Ordnung und den Anfangspunkt zum einen Brennpunkt hat, giebt jedoch über die Bedeutung seiner Einführungen und über Ziel und Gesichtspunkt seiner Untersuchung keine genügende Auskunft. H.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870 Question 4. Messenger V. 187-190. 1870.

Der Winkel zwischen der Normale einer ebenen Curve und

der Linie, die man vom Punkte nach dem Mittelpunkte der Sehne, die parallel und unendlich nahe der Tangente in diesem Punkte, zieht, wird bestimmt. Auf einer Oberfläche kann eine ähnliche Frage nicht aufgestellt werden. Es wird noch bemerkt, dass die Indicatrix nie eine Parabel ist, sondern dass der Uebergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel ein Paar paralleler gerader Linien ist. Glr. (O.)

de la Gournerie. Note sur les singularités élevées des courbes planes. Liouville J. (2) XIV. 425-435. 1869.

Nach Herrn Cayley ist jede Singularität einer ebenen Curve bestimmten Zahlen von Doppelpunkten, Rückkehrpunkten, Doppel- und Inflexionstangenten aequivalent, so dass, wenn diese 4 Zahlen für alle Singularitäten einer Curve bekannt sind, man sofort die 3 Plücker'schen Gleichungen auf diese Curve anwenden und auch bestimmen kann, welchem Geschlecht sie angehört. Herr Cayley hat ausserdem Formeln angegeben, die 4 Zahlen, welche eine Singularität ausdrücken, auszurechnen, wenn man für die verschiedenen Zweige, in der sie vorkommt, besondere Gleichungen, die nach einer der Coordinaten aufgelöst sind, hat. Der Verfasser unternimmt nun zu zeigen, wie man diese Gleichungen aus der allgemeinen Gleichung der Curve ableiten kann. Es folgen dann einige Resultate über die Krümmungsradien an einem vielfachen Punkt und über die Berührungen, welche die verschiedenen Zweige mit einander haben können. In einem zweiten Theile der Arbeit finden sich Anwendungen auf drei Curven, resp. vom Grade 32, 27 und 30.

Mz.

H. M. Jeffery. On cusps and points of inflexion, on cuspidal points and lines of inflexion. Quart. J. X. 232-238. 1869.

Bemerkungen über die genannten Singularitäten; grossentheils Bekanntes oder doch unmittelbar aus Bekanntem folgend. Besonders berücksichtigt sind die dualen Verhältnisse; es wird jedoch eine particuläre Form der Dualität gebraucht, indem als Punktcoordinaten nur die auf die Seiten des Fundamental-Drei-

ecks, als Liniencoordinaten die von den Ecken desselben gezogenen Perpendikel auftreten. St.

W. H. Besant. Mathematical notes. Quart. J. XI 38-42. 1870.

Die dritte Note enthält eine Formel für gleitende Curven. Gleitet ein rechter Winkel auf dem Bogen einer Curve entlang $p=f(\varphi)$ (auf Polarcoordinaten bezogen, wo aber p das Loth vom Ursprung auf die Tangente des betrachteten Punktes, φ der Winkel des Lothes mit der festen Axe ist), so ist die Bewegung derjenigen aequivalent, als wenn die Curve

$$x=f\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-f'(\varphi),\quad y=f(\varphi)+f'\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

auf der folgenden rollt

$$x'=\cos\varphi\,.\,f'\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\varphi\,.\,f'(\varphi),$$
$$y'=\cos\varphi\,.\,f'(\varphi)-\sin\varphi\,.\,f'\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Mz.

Levi. Sulle evolventi allungate e associate delle linee piane. Atti di Torino IV. 1869. Jg.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 2. Messenger V. 41-42. 1869.

In einem System von Curven, definirt durch eine Gleichung mit einem variabeln Parameter, ist die Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Curven zu untersuchen. Sind $f(x,y,c)=0$ und $f(x,y,c+\delta c)$ zwei aufeinanderfolgende Curven, so ist die normale Entfernung am Punkte

$$(x,y) = \frac{df}{dc}\delta c \div \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}$$
$$= \delta c \div \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2},$$

wenn das System gegeben ist in der Form $V-c=0$. Für parallele Curven ist die normale Entfernung allenthalben dieselbe, d. h. $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2$ muss für alle Werthe von (x,y), die

der Relation $V=c$, viz. $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2=\varphi(V)$ genügen — φ willkürlich — einen constanten Werth haben. Die Gleichung des Systems paralleler Curven kann daher geschrieben werden $V=c$, wo $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2=1$. Glr. (O.)

R. W. G. On geometrical methodes in maxima and minima. Messenger V. 122-124. 1870.

Siehe Abschn. VI. Cap. 2. p. 134.

W. K. Clifford. On a generalization of the theory of polars. Proc. of L. M. S. II. 116-118. 1869.

B_n sei eine Curve n^{ter} Ordnung und c_m eine Curve m^{ter} Klasse, nämlich:

$$B_n \equiv (A, B, C\dots)(xyz)^n,$$
$$c_m \equiv (a, b, c\dots)(\xi\eta\zeta)^m$$

resp. in Punkt- und Linien-Coordinaten; schreibt man nun in c_m $\frac{\delta}{dx}, \frac{\delta}{dy}, \frac{\delta}{dz}$ resp. für ξ, η, ζ und operirt mit dem so gebildeten Symbol in B_n und bezeichnet das Resultat kurz mit

$$c_m B_n \equiv \widehat{(a, b, c\dots)}\left(\frac{\delta}{dx}\frac{\delta}{dy}\frac{\delta}{dz}\right)^m \cdot \widehat{(A, B, C\dots)}(xyz)^n,$$

so ist, wenn

1) $m<n$, $c_m B_n$ eine Covariante von der Klasse $n-m$, welche der Hr. Verf. die „Polar-Curve" von c_m in Bezug auf B_n nennt;

2) $m=n$, $c_m B_n$ eine Invariante der beiden Curven; wenn dieselbe verschwindet, werden dieselben „harmonisch" genannt;

3) $m>n$, $c_m B_n$ stets gleich Null.

Diese mit den Worten „polar" und „harmonisch" verbundenen allgemeineren Begriffe schliessen die gewöhnlichen ein. Um nämlich aus denselben im gewöhnlichen Sinne die m^{te} Polare eines Punktes xyz zu erhalten, ist nur nöthig, diesen Punkt, dessen Gleichung $p=x.\xi+y.\eta+z.\zeta=0$ ist, $m$mal gesetzt,

als eine Curve m^{ter} Klasse anzusehen:

$$p^m . B_n = \left(x \cdot \frac{\delta}{dx} + y \frac{\delta}{dy} + z \frac{\delta}{dz}\right)^m \cdot B_n = 0.$$

Setzt man analog in $B_n \frac{\delta}{d\xi}, \frac{\delta}{d\eta}, \frac{\delta}{d\zeta}$ für resp. x, y, z, so ist das Resultat der Operation in c_m $B_n c_m$ für $n > m$ gleich Null, für $n = m$ die harmonische Invariante und für $n < m$ eine Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Klasse, die Polar-Curve von B_n in Bezug auf c_m. Es folgen noch einige Anwendungen, insbesondere auf die Curven $S^{(r)}$, welche Hr. Henrici die „Steiner'schen" nennt. Schz.

W. H. A. Russell. On the mechanical description of curves. Proc. of London XVIII. 72-74. 1869. Rep. Brit. Ass. 1869/70.

Beschreibung eines Apparates von Rädern und Rollen zur mechanischen Darstellung der Curve $x = a \sin\vartheta$, $y = a \sin\varphi$, wo $\alpha \sin(m\vartheta + n\varphi) + \alpha' \sin(m\vartheta - n\varphi) + \alpha'' \sin(m'\vartheta + n'\varphi) + \cdots = a \sin\vartheta$, die allgemeine Gleichung einer geometrischen Curve irgend welcher Ordnung. Cly. (M.)

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Weyr. Ueber algebraische Curven. Prag. Ber. 1869. 33-37.

Der Herr Verfasser giebt zuerst eine kurze Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde und begründet dann hierdurch die bekannten Sätze von der Classenzahl, der Zahl der Doppeltangenten und Inflexionspunkte einer allgemeinen ebenen Curve n^{ten} Grades. Mz.

E. Weyr. Ueber höhere Involutionen. Prag. Ber. 1870. 14-19.

Es wird eine Punktinvolution n^{ten} Grades auf einer Geraden durch die Gleichung definirt:

$$f(x) - \lambda \varphi(x) = 0,$$

wo x die Abscisse eines variablen Punktes der Geraden in Be-

zug auf einen festen Anfangspunkt, λ ein veränderlicher Parameter, f und φ ganze Functionen n^{ten} Grades sind. Soll diese Gleichung eine zweifache Wurzel besitzen, so ergiebt sich für λ eine Bedingungsgleichung vom Grade $2(n-1)$. Der Verfasser bildet dann diejenige Gleichung $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln die Abscissen der Doppelpunkte sind. Zum Schluss werden Involutionen betrachtet, deren Gleichung

$$(x-a)^n - \lambda(x-b)^n = 0,$$

und eine Anwendung auf Curven n^{ten} Grades mit einem $(n-1)$fachen Punkte und zwei $(n-1)$-punktig osculirenden Geraden gegeben.

Mz.

Emil Weyr. Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involution. Clebsch Ann. III. 34-44. 1870.

Sind a und b zwei feste Elemente eines Grundgebildes erster Stufe, so möge, je nachdem eine Punktreihe oder ein Strahlbüschel vorliegt, der Quotient von $\frac{ax}{bx}$ resp. von $\frac{\sin ax}{\sin bx}$, welchen ein variabeles Element x bestimmt, kurzweg mit x bezeichnet sein. Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale Functionen vom Grade n, so stellt $f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$ eine Elementeninvolution n^{ten} Grades dar, wenn λ als veränderlicher Parameter gefasst wird. Zwei Involutionen:

$$f(x) - \lambda\varphi(x) = 0,$$
$$F(y) - \mu\psi(y) = 0,$$

beziehlich vom Grade n und m, sind projectivisch, wenn jeder Elementengruppe der einen eine Elementengruppe der anderen eindeutig zugeordnet wird, wenn also zwischen λ und μ eine Relation

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

statt hat, welche in Bezug auf λ und auf μ linear ist. Es entsprechen daher jedem Elemente der ersten Involution m Elemente der zweiten und jedem Elemente der zweiten n Elemente der ersten Involution. Je zwei derartige projectivische Strahleninvolutionen erzeugen eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, für welche der Scheitel der einen Involution ein $n$facher, der der anderen ein $m$facher Punkt ist. Sind beide Involutionen vom n^{ten} Grade

und vereinigen sich in der durch beide Scheitel gehenden Geraden zwei einander entsprechende $n$fache Strahlen beider Involutionen (fallen in einer Involution n^{ten} Grades sämmtliche n Elemente einer Gruppe in eines zusammen, so entsteht ein $n$faches Element dieser Involution), so ist ihr Erzeugniss eine Curve n^{ter} Ordnung. Jede Curve n^{ter} Ordnung, welche durch die n^2 Schnittpunkte zweier $n$strahligen Büschel hindurchgeht, lässt sich als ein Erzeugniss zweier projectivischen Involutionen n^{ten} Grades auffassen; für diese Involutionen sind die beiden $n$strahligen Büschel entsprechende Strahlengruppen und der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel ist ein sich selbst entsprechender $n$facher Strahl. Auf einer beliebigen Curve C_n lassen sich im Allgemeinen nicht zwei Punkte finden, die als Scheitel solcher Involutionen genommen werden könnten, sondern nur, wenn $n = 1, 2, 3$ ist. Im Falle $n = 3$, sind je zwei correspondirende Punkte der Hessse'schen Curve zu Scheiteln zweier projectivischen cubischen Strahleninvolutionen zu nehmen, welche alsdann die Curve erzeugen. Schn.

P. Güssfeldt. Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, und darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, mit besonderer Berücksichtigung der Curven dritter Ordnung. Clebsch Ann. II. 65-127. 1869.

Die umfang- und inhaltreiche Abhandlung Steiner's über algebraische Curven, die einen Mittelpunkt haben (Crelle J. XLVII), veranlasst den Herrn Verf. einen Theil der in der citirten Arbeit enthaltenen Resultate herzuleiten. Diese beziehen sich auf die allgemeine Theorie der von Steiner betrachteten besonderen Curven, auf das Auftreten derselben bei Betrachtungen über allgemeine Curven und auf die Anwendung der gewonnenen Resultate auf die Curven dritter Ordnung. Die Beweise der Sätze sind theils durch Analysis, theils durch rein geometrische Betrachtungen gewonnen. Die Fülle der Sätze gestattet leider nicht ein Eingehen auf Einzelheiten. T.

O. Henrici. On series of curves, especially on the singularities of their envelopes; with applications to polar curves. Proc. of L. M. S. II. 177-195. 1869.

Ein in einer früheren Abhandlung (On certain formulae concerning the theory of discriminants etc. Proc. of. Lond. M. S. vol. II. p. 109) von dem Hrn. Verf. bewiesener Satz über Discriminanten von Discriminaten (vergl. das Referat in diesem Jahrbuch Bd. II. p. 76) wird auf Functionen verschiedener Form angewendet. Mit Hilfe der daraus sich ergebenden Ordnungszahlen der Discriminante Ξ und der Factoren von $D = A.B^2.C^3$ werden die Ordnung, die Klasse, sowie die Zahlen der ausgezeichneten Elemente 1) der Enveloppe einer einfachen Curvenreihe; 2) der Steiner'schen Curven; 3) der r^{ten} Polare einer Curve; 4) der gemischten $(r, \varrho)^{\text{ten}}$ Polare zweier Curven; 5) der ϱ^{ten} Steiner'schen von der r^{ten} Polare eines Punktes y und ferner auf diese Curven wie auf Reihen dieser Curven bezügliche Sätze abgeleitet. Dabei sind immer einfache Curven und einfache Curvenreihen und für die Polare und Steiner'schen Curven eine einfache Fundamentalcurve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte und ohne Spitzen vorausgesetzt.

Wir können aus der Fülle von Sätzen hier nur Weniges anführen. Der Ort derjenigen Pole, deren r^{te} Polaren einen Doppelpunkt haben, oder der Ort von Doppelpunkten $(n-r-1)^{\text{ter}}$ Polaren wird mit $S^{(r)}$ bezeichnet und die r^{te} Steiner'sche Curve genannt; dann ist $S^{(n-r-1)}$ der Ort von Doppelpunkten r^{ter} Polaren und heisst die conjugirte Steiner'sche Curve. Die r^{te} Polare hat die Form:

$$f\left(\frac{n-r}{x_1 x_2 x_3};\quad \frac{r}{y_1 y_2 y_3}\right) = 0,$$

$S^{(r)}$ ist also die Discriminante dieser Function in Bezug auf $(x_1 x_2 x_3)$. Bezeichnet man $m = n-r-1$, so ist

die Ordnung von $S^{(r)}$	$3rm^2$,
die Klasse	$3rm(2mr+r-m)$,
die Zahl der Doppelpunkte	$\frac{3}{2}r^2m(m-1)(3m^2+3m-11)$,
- - - Spitzen	$12r^2m(m-1)$

die Zahl der Wendetangenten $3mr(10mr-r-6m)$
- - - Doppeltangenten $\frac{3}{2}mr\{3mr(2mr+r-m)^2$
$-32mr+2r+18m\}$.

Durch Vertauschung von m und r erhält man die Singularitäten von $S^{(m)}$.

Die Curven $S^{(\varrho)}_{y^r}(z)$ oder die ϱ^{ten} Steiner'schen Curven der r^{ten} Polaren von Punkten y auf einer geraden Linie bilden eine einfache Reihe, deren

Ordnung $3\varrho(n-r-\varrho-1)^2$;

Klasse $3\varrho(n-r-\varrho-1)^2\{2\varrho(n-r-\varrho)-n+r+1\}$;

parametrische Ordnung, d. i. Zahl der Curven, welche durch einen Punkt gehen

$$3r(n-r-\varrho-1)^2;$$

parametrische Klasse d. i. Zahl der Curven, welche eine Gerade berühren

$$6r(n-r-\varrho-1)\{2\varrho(n-r-\varrho)-n+r+1\};$$

Die Enveloppe der Reihe ist von der Ordnung:

$$6\varrho(n-r-\varrho-1)\{2r(n-r-\varrho)-n+r+1\};$$

Der Ort der Doppelpunkte ist von der Ordnung;

$$3r\varrho(n-r-\varrho-1)(n-r-\varrho-2)\{3(n-r-\varrho)^2-3(n-r-\varrho)-11\};$$

Der Ort der Spitzen ist von der Ordnung:

$$24r\varrho(n-r-\varrho-1)(n-r-\varrho-2).$$

$S^{(\varrho)}_{y^r}(z)$ ist die Discriminante einer Function von der Form:

$$F\left(\frac{n-r-\varrho}{x_1x_2x_3};\ \frac{r}{y_1y_2y_3};\ \frac{\varrho}{z_1z_2z_3}\right)=0.$$

Schz.

C. F. Haase. Zur Theorie der ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- oder Rückkehrpunkten. Clebsch Ann. II. 515. 1870. K.

M. Reiss. Analytisch-geometrische Studien. Clebsch Ann. II. 385. 1870.

Handelt von der Elimination der Coefficienten aus homogenen Gleichungen von k Veränderlichen, welche für die Fälle $k=3$, $k=4$ mit gewissen Fragen der Geometrie (Bestimmung einer Curve resp. Fläche durch Punkte) zusammenhängt. Das Elimina-

tionsresultat wird in verschiedene Formen gebracht, welche eine geometrische Deutung zulassen. K.

H. Lemonnier. Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion. Nouv. Ann. (2) IX. 531. 1870.

Aus der analytischen Definition des Inflexionspunktes einer ebenen Curve wird unter Benutzung der charakteristischen Eigenschaft der ganzen homogenen Functionen die Bedingung, dass die bekannte Hesse'sche Functional-Determinante aus den zweiten Differentialquotienten gleich Null sei, entwickelt als Discriminante einer Gleichung zweiten Grades, deren Coefficienten diese Differentialquotienten sind. Schz.

A. Transon. Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes. Nouv. Ann (2) VIII. 114-121. 1869.

Durchläuft der Punkt, welcher der unabhängig Veränderlichen z der Gleichung $\varphi(u, z) = 0$ entspricht, irgend eine Curve, dann durchläuft der Punkt, welcher der abhängig Veränderlichen u entspricht, soviel andere Curven, als der Grad der Gleichung $\varphi(u, z) = 0$ in Beziehung auf u Einheiten enthält. Eine jede dieser Curve kann als eine Transformation der ersten Curve aufgefasst werden. (Nouv. Ann. (2) VII. 145-157. 193-208. 241-264 s. Fortschr. d. M. I. p. 149-150.) Gegenstand der oben genannten Arbeit ist nun die Ermittelung der Beziehungen, welche zwischen den Krümmungsradien der ursprünglichen Curve und denen ihrer Transformationen bestehen. Als Resultate ergeben sich folgende beiden Sätze:

Alle Geraden, welche durch denselben Punkt der Transformations-Ebene gehen, haben als Transformationen Curven, deren Krümmungsmittelpunkte für den entsprechenden Punkt in einer Geraden liegen.

Wenn mehrere Curven, welche durch denselben Punkt a der ursprünglichen Curve gehen, in diesem Punkte denselben Krümmungsradius ϱ haben, dann sind die entsprechen Krümmungsradien aller ihrer Tiansformationen Leitstrahlen eines und desselben Kegelschnitts, der als Brennpunkt die Transformation des

Punktes a hat. Die Gattung des Kegelschnitts ändert sich mit dem Werthe von ϱ, aber seine Leitlinie ist fest, sie ist diejenige Linie, in welche der Kegelschnitt zusammenschrumpft, wenn ϱ unendlich wird.

Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen stereographischer Projection sphärischer Figuren und der Transformation ebener Figuren bilden den Schluss. T.

J. Casorati e L. Cremona. Considerazioni intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere. Rend. d. Ist. Lomb. (2) II. 1869.

Riemann hat in seiner Theorie der Abel'schen Functionen $3p-3$ als Zahl der algebraischen Gleichungen oder Curven gegeben, welche zu einer gegebenen Ordnung p gehören, während Herr Cayley auf anderem Wege die Zahl $4p-6$ dafür erhalten hat. In der vorliegenden Note stellen die Verfasser Betrachtungen über die Natur der verschiedenen Resultate an, durch welche sie dazu geführt werden, die von Riemann gegebene Zahl für richtig zu erklären. Herr Cremona behandelt speciell die Fälle $p=4, 5, 6$; den letzten Fall auf eine sehr sinnreiche Weise, mittelst der er folgenden Satz beweist: „Curven der Ordnung $p=6$ können in eine Curve 6ter Ordnung mit 4 Doppelpunkten transformirt werden." Die Normalcurve für $p=6$, die in der Theorie der Abel'schen Functionen von den Herren Clebsch und Neumann gegeben, ist von der Ordnung 7 und hat 9 Doppelpunkte. Auf analytischem Wege hat Herr Brill diese Resultate erhalten und auch auf den Fall $p=7$ ausgedehnt. (s. Clebsch Ann. II. 471. Forschr. d. M. II. p. 45.) Jg. (O.)

J. Brioschi. Nota sulla equazione che dà i punti di flesso di curve ellittiche. Rend. d. Ist. Lomb. (2) II. 1869.

Der Verfasser nennt elliptische Curve eine ebene Curve der Ordnung n mit $\frac{n(n-3)}{2}$ Doppel- oder Rückkehrpunkten. Die Coordinaten derselben werden mittelst eines Parameters x ausgedrückt und dann eine Gleichung bestimmt, deren Wurzeln die

Werthe des Parameters x sind, die den Flexionspunkten der Curve entsprechen. Diese Gleichung ist vom Grade $3n$, wenn n grade, $3(n+1)$, wenn n ungrade ist. Wenn jedoch die Gleichung einen fremden Factor dritten Grades enthält, dessen Vorhandensein aus der Relation zwischen der Function von x, welche in den angedeuteten Ausdruck der Coordinaten eintritt, festzustellen ist, so lässt sich dieselbe durch dieselbe Formel darstellen, mag nun n grade oder ungrade sein. Der Verfasser wendet seine Gleichungen sodann an, um die Gleichungen vom 9ten und 12ten Grade zu finden, welche die Flexionen einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung und einer Curve 4ter Ordnung mit 2 Doppelpunkten geben. Aus der Betrachtung, dass die Gleichung 9ten Grades, welche die Flexionen einer Curve dritter Ordnung giebt, der Dreitheilung der elliptischen Functionen entspricht, zieht er nicht allein das Kriterium, dass sie algebraisch lösbar seien (in anderer Weise hat dies Herr Hesse bewiesen, siehe Crelle J. XXVIII), sondern leitet auch eine einfache Methode ab, um solche Lösungen zu finden, welche von einer Gleichung 4ten und zweien 3ten Grades abhängen. Daraus kann man, wie er bemerkt, die bekannte Eigenschaft der Flexionen einer cubischen Curve finden. Jg. (O.)

A. Clebsch. Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p=2$ ist. Clebsch. Ann. I. 170-172. 1869.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2 p. 245.

G. Yung ed A. Armenante. Sulle trasformazioni birazionali univoze e sulle curve normale e subnormale del genere p. Battaglini G. VII. 235.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 44.

A. Brill. Ueber zwei Eliminationsprobleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen. Gött. Nachr. 1870. 525-539.

„Es ist die Anzahl (α_r) derjenigen Curven eines Büschels s^{ter} Ordnung $\sum_0^r{}_i\lambda^{(i)}\varphi^{(i)}(x_1, x_2, x_3)=0$ zu bestimmen, welche eine

gegebene Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ von der Ordnung m und dem Geschlechte p an einer Stelle $r$punktig berühren. Unter den Basispunkten des Büschels mögen σ mit einfachen, τ mit Doppelpunkten der Curve $f=0$ zusammenfallen". Mit Hülfe einer gewissen Reciprocität, welche denjenigen der Elemente einer Determinante mit den Elementen der adjungirten analog ist, gelangt man zur Formel

$$(a.) \quad \alpha_r = (r+1)[M+(p-1)r]-r\beta_r.$$

Hier ist $M = ms-3-2\tau$, β_r bezeichnet die Anzahl derjenigen Punkte von $f=0$, für welche die Gleichungen bestehen

$$\varphi^{(i)}(x_1, x_2, x_3) = \varrho\varphi^{(i)}(x_1+\Delta x_1, \ldots) \qquad (i=0, 1, \ldots r).$$

(ϱ ein Proportionalitätsfactor). — Die Formel (a) lässt auch eine Deutung zu für Gebilde im Raume von r Dimensionen, die aus einer einfach unendlichen Anzahl von Elementen (Punkten) bestehen. So ist z. B. die Anzahl der Wendungsberührebenen einer algebraischen Raumcurve $=\alpha_3$, wenn M die Ordnung, p das Geschlecht, β die Anzahl der Rückkehrpunkte derselben bedeuten.

Das Verfahren, welches zur algebraischen Lösung vorstehender Aufgabe führt, lässt sich auch auf das Problem ausdehnen: „die Anzahl $N_{i,k}$ derjenigen Curven s^{ter} Ordnung eines Büschels zu bestimmen, welche mit der gegebenen Curve $f=0$ eine $i$punktige Berührung in einem Punkte und eine $k$punktige in einem andern besitzen". Der für $N_{i,k}$ gefundene Werth sowie die Formel (a) stimmen mit den von Cayley auf geometrischem Wege abgeleiteten Resultaten überein. St.

L. Cremona. Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. Rend. d. Ist. Lomb. (2) II. 1869.

Hyperelliptisch nennt man eine Curve, deren Coordinaten rational durch einen Parameter λ und die Quadratwurzel einer ganzen Function $Q(\lambda)$ vom Grade $2p+2$ ausdrückbar sind. Auf eine Weise, ähnlich der, die die Herren Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Function p. 69 und 77) zur Transformation der Curven von der Gattung $p=1$ und $p=2$ benutzt haben, und durch passende Wahl des Netzes der Curve trans-

formirt der Verfasser Punkt für Punkt die hyperelliptische Curve

$$A. \qquad x_i = w_i + q_i \sqrt{Q}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo w und q ganze Functionen von λ respective vom Grade m und $m-p-1$ sind, in eine andere von der Form

$$B. \qquad y_3^2 \cdot \varphi(y_1 y_2) - \Psi(y_1 y_2) = \sigma,$$

wo φ und Ψ ganze Functionen vom Grade p und $p+2$ sind. Die transformirte Curve ist von der Ordnung $p+2$ und hat einen p fachen Punkt (deshalb gehört sie zur Gattung p), welcher für sie ein Centrum der harmonischen Analogie ist. Was die p Tangenten betrifft, die durch den vielfachen Punkt O gehen, so haben sie mit der Curve $p+2$ coincidirende Schnitte, und folglich gehen durch diesen Punkt O nur $p+2$ Tangenten, deren Berührungspunkte alle in der Geraden $y_3 = 0$ liegen. Diese Punkte der transformirten Curve sind der Art zu 2 und 2 conjugirt, dass 2 conjugirte Punkte immer harmonisch durch die feste Gerade $y_3 = 0$ und den vielfachen Punkt getrennt sind.

Indem der Verfasser darauf eine der von ihm in seinen beiden Noten: „Sulle trasformazioni geometriche delle curve piani" (Accad. Bologna 1863. 1865) betrachteten Transformationen benutzt, zeigt er, wie man sie verbinden kann mit der für die specielle Curve (B), indem man von einer allgemeinen Curve der Ordnung n und der Classe p mit einem $(n-2)$ fachen Punkte und $n-2-p$ Doppelpunkten ausgeht. Um eine geometrische Deutung der Formel zu geben, welche die Transformation der Curve (A) in (B) bewirkt, zeigt der Verfasser eine bemerkenswerthe Eigenschaft der hyperelliptischen Curve. Für die Curve (A) muss auf dem Netz, welches zur Transformation dient, ein Büschel von Curven $\mu + \lambda\nu = 0$ von der Ordnung s existiren, welche die Curve nur in 2 variabeln Punkten schneiden: ein Büschel, welches den Geraden, die vom Punkte O der Transformirten (B) ausgehen, entspricht. Wenn v_r $(r = 1, 2, \ldots 2p+2)$ die Werthe von λ sind, die den Curven des Büschels entsprechen die durch Vereinigung der beiden variabeln Punkte in einen einzigen zu Tangenten für die gegebene Curve werden, und wenn $\Xi = 0$ eine Curve von der Ordnung s' ist, welche durch die Punkte geht, in denen die gegebene Curve von den Curven

$$\mu + a_1 \nu = 0, \quad \mu + a_2 \nu = 0, \quad \ldots \quad \mu + a_p \nu = 0$$

geschnitten wird, so existirt eine Curve $\Phi = 0$ von der Ordnung $s+s'$, die nicht allein durch die Grundpunkte des Büschels $\mu+\lambda\nu=0$ und durch die übrigen $ns'-p$ Schnitte von $\Xi=0$ mit der gegebenen Curve geht, sondern auch durch die Punkte, wo dieselbe von den $p+2$ Curven

$$\mu+a_{p+1}\nu=0,\quad \mu+a_{p+2}\nu=0,\quad \ldots\quad \mu+a_{2p+2}\nu=0$$

geschnitten wird. Die Existenz dieser Curve $\Phi=0$ stellt die erwähnte Eigenschaft dar. Jg. (O.)

E. Beltrami. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. Mem. di Bologna X. 1870.

Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, dass es vortheilhaft ist, die Betrachtung complexer Zahlen in die algebraische Theorie der binären Formen einzuführen. Als Beispiel mögen einige Resultate dienen.

Bezeichnet man mit $J=(a_0, a_1, a_2, a_3)(z, 1)^3$ eine ganze rationale algebraische Function vom dritten Grade mit complexen Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3 und einer complexen Variabeln z, mit D die Determinante

$$= a_0^2a_3^2+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-3a_1^2a_2^2-6a_0a_1a_2a_3,$$

so ist die Bedingung dafür, dass drei Wurzelpunkte der Gleichung $J=0$ in gerader Linie liegen, die, dass die Grösse

$$\frac{1}{a_0}\cdot\frac{d\sqrt{D}}{da_3}$$

des reellen Theiles entbehre. Als Corollar zu diesem Satze ergiebt sich, dass, wenn man eine quadratische Function

$$U = b_0z^2+2b_1z+b_2$$

hat, die Gleichung der Geraden, welche die Wurzelpunkte der Gleichung $U=0$ verbindet, erhalten wird, wenn man den reellen Theil der Grösse $\frac{1}{\sqrt{b_0b_2-b_1^2}}\cdot\frac{dU}{dz}$ gleich Null setzt. Setzt man den imaginären Theil dieser Grösse gleich Null, so erhält man die Gleichung der geraden Linie, auf der die von den oben erwähnten Punkten äquidistanten Punkte liegen.

Wenn z_1, z_2, z_3 die Indices von drei Punkten einer Ebene sind und z der eines vierten, so dass man hat

$$z = -\frac{\lambda z_2z_3+\mu z_3z_1+\nu z_1z_2}{\lambda z_1+\mu z_2+\nu z_3},$$

und wenn man die reellen Zahlen so variiren lässt, dass sie immer der Relation $\lambda + \mu + \nu = 0$ genügen, so ist der geometrische Ort des Punktes z der Kreis durch die drei Punkte z_1, z_2, z_3.

Damit die 4 Wurzelpunkte einer biquadratischen Function auf einem Kreise liegen, müssen die 3 Wurzelpunkte der cubischen Resultante in gerader Linie liegen. Aus diesem Satze und einem der vorhergehenden folgt dann, dass wenn man mit S, T und Δ die quadratische und cubische Invariante und die Discriminante der biquadratischen Function bezeichnet, die Bedingung dafür, dass die 4 Wurzelpunkte auf einem Kreise liegen, darin zu suchen ist, dass die Grösse $\frac{T}{\sqrt{\Delta}}$ reell sei, oder die Grösse $\frac{27 T^2}{S^3}$ reell sei und zwischen 0 und 1 nicht verschwinde.

Weiter zeigt der Verfasser, dass, wenn man auf einer Ebene die drei Wurzelpunkte der cubischen Form J als gegeben voraussetzt, man auch die 3 Wurzelpunkte der Evectante E und die 2 Wurzelpunkte der Hesse'schen Determinante H finden kann. Diese Constructionen geben auch Gelegenheit zu einer Anwendung der Methode der Dreiliniencoordinaten, wenn man das Wurzelpunktdreieck als Fundamentaldreieck nimmt. Bezeichnet man mit H_1, H_2 die 2 Wurzelpunkte der Hesse'schen Determinanten, mit ζ den Schwerpunkt der 3 Wurzelpunkte der cubischen Function J, so kann diese Function ($O_0 = 1$ der Einfachheit wegen) immer auf die Form $J = \frac{(\zeta - H_1)(H_2 - z)^3 - (H_2 - \zeta)(z - H_1)^3}{H_1 - H_2}$ gebracht werden, während die Discriminante D, die Hesse'sche Determinante H und die Evactante E folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} D &= \{(\zeta - H_1)(\zeta - H_2)(H_1 - H_2)\}^2, \\ H &= -(\zeta - H_1)(\zeta - H_2)(z - H_1)(z - H_2), \\ E &= (\zeta - H_1)(\zeta - H_2)\{(\zeta - H_1)(H_2 - z)^3 + (H_2 - \zeta)(z - H_1)^3\}. \end{aligned}$$

Aus dieser für J erhaltenen Form geht klar hervor, dass mittelst der Lösung der quadratischen Gleichung $H = 0$, die vollständige cubische Gleichung $J = 0$ zurückgeführt ist auf die binomische Form $\left(\frac{z - H_1}{H_2 - z}\right)^3 = \frac{\zeta - H_1}{H_2 - \zeta}$, während die Wurzeln der Evectante

gegeben sind durch $\left(\frac{z-H_1}{H_2-z}\right)^3 = -\frac{\zeta-H_1}{H_2-\zeta}$. Diese Methode der Auflösung der cubischen Gleichung hängt genau mit der von Cayley zusammen. Die vorstehende Formel ist einer ziemlich einfachen geometrischen Interpretation fähig, welche den Verfasser zu einer speciellen cubischen Involution mit 2 dreifachen Punkten führt. Diese Involution ist durch die Gleichung $J + \varkappa E = 0$ darstellbar und aus allen Ternen von Punkten zusammengesetzt, für welche das Hesse'sche Determinanten-Paar (H_1, H_2) unveränderlich ist. Sie besitzt viele geometrische Eigenschaften, betreffs deren wir nur auf die Abhandlung selbst verweisen können. Jg. (O.)

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

Grunert. Allgemeine Discussion der Gleichung der Linien des zweiten Grades. Grunert Arch. LI. 276-325. 1870.

Der Herr Verf. giebt in dieser Abhandlung vollständig entwickelte, allgemeine Formeln, durch welche alle Bestimmungsstücke der Linien zweiten Grades lediglich durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden, während die Coordinaten der Curvenpunkte auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen werden. Von den entwickelten Formeln wird Anwendung auf eine grössere Anzahl von Beispielen gemacht. T.

Grunert. Die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises in Dreilinien-Coordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten. Grunert Arch. LI. 257-275. 1870.

Grunert. Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades: $Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=0$ zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten. Grunert Arch. LI. 326-352. 1870.

Beide in der Ueberschrift genannte Arbeiten stehen in einem

innern Zusammenhange. In der ersten wird die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte aus der bekannten Eigenschaft derselben, dass sie der geometrische Ort derjenigen Punkte sind, für welche das Verhältniss der Abstände von einem festen Punkte und einer festen geraden Linie ein constantes ist, durch Dreilinien-Coordinaten ausgedrückt. (cf. Grunert Arch. XXXVIII, No. XXXVI.) Es ergiebt sich als allgemeine Kegelschnittsgleichung

$$A'p_0^2+B'p_1^2+C'p_2^2+D'p_0p_1+E'p_1p_2+F'p_2p_0 = 0;$$

darin bezeichnen p_0 p_1 p_2 die veränderlichen Dreilinien-Coordinaten eines Kegelschnittpunktes. Als allgemeine Gleichung des Kreises als geometrischer Ort derjenigen Punkte betrachtet, welche von einem festen Punkte gleichen Abstand haben, wird gefunden;

$$A_1p_0^2+B_1p_1^2+C_1p_2^2+D_1p_0p_1+E_1p_1p_2+F_1p_2p_0 = 0.$$

So ist also die Gleichung eines jeden Kegelschnitts (Kreis eingeschlossen) zwischen Dreilinien-Coordinaten eine Gleichung von der Form:

$$Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0 = 0.$$

Es werden dann noch einige Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung entwickelt.

In der zweiten der obengenannten Arbeiten wird die in der ersten gefundene Gleichung discutirt. Zur Discussion wird die Gleichung in Dreilinien-Coordinaten in eine solche transformirt, welche cartesische Coordinaten enthält. Da die nöthigen Substitutionen linear sind, so geht die Gleichung:

$$Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0 = 0$$

über in eine Gleichung von der Form:

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F' = 0.$$

Zwischen den ursprünglichen Coefficienten $A, B, \dots$ und den neuen: $A', B', \dots$ bestehen gewisse Relationen, welche sich schon durch die Transformation ergeben. Die Discussion der Gleichung $A'x^2+B'y^2+\dots = 0$, die mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck in Vollständigkeit vom Herrn Verf. in Grunert Arch. LI. 276-325 gegeben ist, führt dann auch unmittelbar zur Discussion der Gleichung $Ap_0^2+Bp_1^2+\dots$, wenn man in die Relationen für $A', B', \dots$ ihre durch $A, B, \dots$ ge-

gebenen Ausdrücke setzt. Die gewonnenen Kriterien werden auf Beispiele angewandt.

Es wird ferner noch die Bedingung hergeleitet, die erfüllt sein muss, wenn die Gleichung einer Ellipse in die eines Kreises, oder die einer Hyperbel in die einer gleichseitigen Hyperbel übergehen soll. Auch die Coordinaten des Mittelpunktes der Ellipse oder Hyperbel werden bestimmt, ebenso auch die Quadrate der Halbaxen. Noch andere Relationen kann man auf dem eingeschlagenen Wege aus der vollständigen Discussion der Gleichung: $A'x^2+B'y^2+\cdots$ herleiten. T.

J. Zampieri. Altes und Neues. Eine kleine Excursion auf dem Gebiete der Kegelschnittlinien. Pr. Wien. 1870.

Die Kegelschnitte werden als ebene Schnitte eines Kegels aufgefasst, auf Grund dieser Auffassung werden die einzelnen Gleichungen abgeleitet und discutirt. Es folgt dann die Entwickelung der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte, und endlich die Berechnung der Elemente derselben aus den Coefficienten der allgemeinen Gleichung. Numerische Beispiele bilden den Schluss. T.

W. P. Turnbull. Review. Messenger V. 118-120. 1869.

Uebersicht über: „Properties of conic sections proved geometrically. Part. I. The Ellipse by the Rev. H. G. Day. M. A."
Glr. (O.)

E. d'Ovidio. Nuova esposizione della teoria generale delle curve di 2^0 ordine in coordinate trilineari. Battaglini G. VII. 1-16. 1869.

Es ist dies die Fortsetzung einer Theorie der Kegelschnitte. Man findet daselbst aus der allgemeinen Kegelschnittsgleichung die Gleichungen der Directricen und der Axen abgeleitet; ferner die Längen der conjugirten Durchmesser, die einen gegebenen Winkel bilden, die Relation zwischen den Halbmessern (dass die Quadratsumme zweier conjugirter Halbmesser constant u. s. w.), dann die Grösse der Excentricität, des Parameters und des Krümmungsradius. Mz.

P. Cassani. Studio intorno alla conica dei 9 punti e delle 9 rette. Battaglini G. VII. 369-374. 1869.

Der geometrische Ort der Pole einer Geraden $L = 0$ in Bezug auf ein Kegelschnittsbüschel

$$S + \lambda S_1 = 0$$

ist ein Kegelschnitt, der durch die drei Durchschnitte gegenüberliegender Seiten des Basisvierecks und ferner durch diejenigen 6 Punkte geht, die auf jeder der sechs Seiten des Vierecks dem Durchschnitt dieser Seite mit L und den beiden auf dieser Seite liegenden Viereckseсken harmonisch zugeordnet sind. Dieser Kegelschnitt heisst derjenige der neun Punkte.

Der eben gegebene Satz wird analytisch bewiesen; und im Anschluss hieran werden Eigenschaften dieses Kegelschnitts entwickelt, so: Dieser Kegelschnitt berührt die 16 Kegelschnitte, welche durch die Doppelpunkte der Involution (auf L) gehen und den 4 Dreiecken eingeschrieben sind, die zwei Seiten und eine innere Diagonale des Basisvierecks zu Seiten haben. (Satz von Steiner.) Der Verfasser wiederholt hier den Beweis von Beltrami.

Es werden dann einige besondere Fälle erwähnt; hierauf folgt die reciproke Betrachtung, die von einem Punkte $L = 0$ und einem Kegelschnittsbüschel ausgeht, das einem Vierseit eingeschrieben ist. Es ergiebt sich dann auf analoge Weise der Kegelschnitt der 9 Geraden. Am Schlusse werden den Kegelschnitten Curven n^{ten} Grades substituirt. An die Stelle des Kegelschnittes der 9 Punkte tritt dann eine Curve vom Grade $2(n-1)$. Mz.

P. Cassani. Nota sulla conica dei 9 punti e delle 9 rette. Battaglini G. VIII. 374-377. 1870.

Discussion des im vorigen Referat betrachteten Kegelschnitts der 9 Punkte, — und desjenigen der 9 Geraden in Bezug darauf, wann dieser Kegelschnitt, Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist. Mz.

M. Jesser. Kurz gefasste Lehre von den Kegelschnittslinien auf elementarem Wege. Wien. L. W. Seidel und Sohn 1869.

Dieser Leitfaden ist bestimmt, als Grundlage des Unterrichts

an den k. k. österreichischen Truppendivisionsschulen zu dienen und soll in so fern Ergänzung der Elementar-Mathematik von Kambly sein, welche für die übrigen mathematischen Disciplinen als Lehrbuch an diesen Schulen im Gebrauch ist. Dieser Zwek des Buches bestimmt naturgemäss seine engen Grenzen. Nur das Nothwendigste über rechtwinklige Coordinatensysteme, über die Gerade, über die einzelnen Kegelschnittlinien, über ihre Entstehung am Kegel bildet den Gegenstand des Buches. Diesen Untersuchungen schliesst sich dann noch die Cubatur des Sphäroids (verlängerten und abgeplatteten) und die des Paraboloids an.

T.

RHEIN. Von den Kegelschnitten. Pr. Moers. 1870.

Die Arbeit behandelt vorzugsweise die Gleichungen der Kegelschnitte. Es werden diese Curven als ebene Schnitte eines Kegels aufgefasst und auf Grund dieser Auffassung werden die Gleichungen entwickelt, verallgemeinert und specialisirt.

T.

C. TAYLOR. The principles of geometrical conics. Messenger V. 141-160. 1869.

Ausgehend von den Eigenschaften des Focus und der Directrix werden folgende Principien aufgestellt: 1) Es ist eine wichtige Aufgabe der Geometrie, die Analysis zu interpretiren; daraus soll, caeteris paribus, der Rang der Analysis bestimmt werden. 2) Unter welchen Voraussetzungen können Sätze als aus der Definition folgend bewiesen werden. 3) Beweise für die Eigenschaften der Sehnen können zu Beweisen für die Eigenschaften der Tangenten führen. Dies letzte Princip ist in obigen mit einbegriffen.

Zwei Hauptpunkte in dem ersten Theil sind: 1) Die Geometrie der Polar-Coordinaten wird auf Tangenten, Sehnen und Polaren angewandt. 2) Die Eigenschaft der Durchmesser der Kegelschnitte wird zur Grundlage des Systems genommen. Glr. (O.)

DE SAINT GERMAIN. Détermination des foyers dans les coniques. Nouv. Ann. (2) VIII. 230-232. 1869.

Die Brennpunkte werden als diejenigen Punkte definirt, deren

Abstand von einem beliebigen Kegelschnittpunkte rational und linear durch die Coordinaten ausgedrückt werden kann. Durch die analytische Gleichung, die dieser Definition entspricht, in Verbindung mit der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte werden dann Gleichungen aufgestellt, durch welche die Coordinaten der Brennpunkte bestimmt sind. T.

G. Dostor. Relations nouvelles entre les tangentes, normales, sous-tangentes et sous-normales des courbes en général, avec applications aux lignes du second degré. Grunert Arch. LI. 129-190. 1870.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2A. p. 462.

L. Painvin. Note sur la construction géométrique des normales à une conique. Nouv. Ann. (2) IX. 348. 1870.

Folgende drei Lehrsätze geben die Mittel zur Construction der Normalen, welche man von einem Punkte P an einen Kegelschnitt Σ ziehen kann.

I. Fällt man von dem einen Scheitelpunkt A_1 (gleichviel welchem) auf der grossen Axe des Kegelschnitts Σ Lothe auf die 4 Normalen, welche von P nach Σ gehen, so treffen diese Lothe den Kegelschnitt Σ ausser in A_1 noch in 4 Punkten M_1, M_2, M_3, M_4, welche auf einem Kreise Ω liegen.

II. Fällt man von A_1 auf denjenigen Kegelschnittsdurchmesser, der durch P geht, ein Loth, so trifft dieses den Kegelschnitt Σ noch in einem Punkte s; und es ist die Tangente in s an Σ die Chordale (Potenzlinie) des Kreises Ω und desjenigen Kreises, der mit Σ concentrisch ist und durch A_1 geht.

III. Man ziehe durch A_1 eine Parallele zur Polare von P in Bezug auf Σ; diese Parallele treffe Σ noch in p; der Mittelpunkt des Kreises durch p, und ω, ω' (Schnittpunkte der oben genannten Chordale mit Ω) sei π; der Schnittpunkt der Polare von P in Bezug auf Σ mit dem Kegelschnittsdurchmesser durch P — sei ϱ; dann liegt der Mittelpunkt von Ω auf derjenigen Geraden durch P, welche zur Geraden $\pi\varrho$ parallel ist.

Die beiden ersten Sätze sind von Joachimsthal; der dritte

von Smith. Mit Hülfe des letzteren kann man die Aufgabe lösen; denn ω und ω' sind auch Schnittpunkte der Tangente in s mit dem Kreise über der grossen Axe von Σ als Durchmesser; der Mittelpunkt von Ω lässt sich daher finden und hiermit auch die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4, worauf das Uebrige leicht folgt. Der Verfasser giebt von der einfachen Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ausgehend, die analytischen Beweise der drei genannten Lehrsätze.

Mz.

R. W. G. On the chords of conic curvature. Messenger V. 115-117. 1870.

Geometrische Behandlung der Krümmung, abgeleitet aus dem Satze, dass die gemeinschaftliche Sehne eines Kegelschnittes und ihres Krümmungskreises in P dieselbe Neigung zur Axe hat, wie die Tangente in P. Glr. (O.)

Grunert. Ueber die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise, insbesondere auch über die Maxima und Minima dieser Sehnen. Grunert Arch. L. 69-103. 1869.

Als Resultat der Untersuchung ergiebt sich, dass ein jeder Kegelschnitt nur eine Sehne besitzt, welche ihm und dem Krümmungskreise in einem seiner Punkte gemeinschaftlich ist. Ferner kann die gemeinschaftliche Sehne des Kegelschnittes und der in den Scheiteln construirten Krümmungskreise, welche stets verschwindet, als ein Minimum aufgefasst werden. Dagegen besitzen Parabel und Hyperbel im Sinne der Differentialrechnung kein Maximum der gemeinschaftlichen Sehnen, während die Ellipse deren vier symmetrisch gelegene und daher gleiche besitzt. In Hinsicht auf die befolgte Methode ist zu bemerken, dass die Untersuchungen über die Ellipse durch die Substitutionen $x=a\cos u$, $y=b\sin u$ geführt werden (cf. Grunert Arch. XXIV No. XXIX und XXXVII No. X).

Die Behandlung der Hyperbel wird durch Einführung der hyperbolischen Functionen (cf. Grunert Arch. XXXVIII No. II) und durch Substitution von $x=a\cos u$, $y=b\sin u$ der der Ellipse angepasst.

In einem Nachtrage findet sich dann noch eine Darstellung der Lage der grössten gemeinschaftlichen Sehne der Ellipse und des Krümmungskreises lediglich durch die Hauptaxen der Ellipse (cf. J. J. Walker, The educational Times. Vol. XXII. April 1. 1869. p. 21. No. 2869.) T.

G. Dostor. Ellipse et Hyperbole. Relation entre les deux angles que font les deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal. Grunert Arch. LI. 99-101. 1870.

Die bewiesene Beziehung ist folgende: Für die Ellipse ist der Quotient der Tangenten der halben Neigungswinkel der Leitstrahlen eines Punktes gegen die grosse Axe (in demselben Sinne gezählt) constant, und zwar gleich dem Verhältniss der Summe der grossen Axe und des Abstandes der Brennpunkte von einander zur Differenz dieser Grössen. In der Hyperbel ist das Product dieser Tangenten constant, und zwar gleich dem Verhältnisse der Differenz des Abstandes der Brennpunkte von einander und der grossen Axe zur Summe dieser Grössen. Daraus folgt dann, dass $4qx^2+(1+q)^2y^2 = 4a^2q$ die Gleichung aller Ellipsen (oder Hyperbeln) ist, für welche q den constanten Quotienten (oder das constante Product) der Tangenten bezeichnet, wenn q positiv und > 1 (oder negativ und < 1) ist.

T.

G. Dostor. Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole. Grunert Arch. LI. 102. 1870.

Die Tangente des halben Neigungswinkels des Leitstrahles eines Punktes gegen die Axe der Parabel ist gleich dem Verhältniss des Parameters zur Ordinate des Punktes. T.

M. Kuhn. Einiges über die Entwickelung der Kegelschnittslinien aus zwei gegebenen Kreisen in analytischer Behandlung. 1869.

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene berühren, liegen auf zwei Kegelschnitten; der eine dieser Kegelschnitte, unter denen aber keine Parabeln sind, enthält die Mittelpunkte der Kreise, welche die gegebenen gleichartig, der

andere diejenigen, welche sie ungleichartig berühren. Die Arten der resultirenden Kegelschnitte sind durch die Lage der gegebenen Kreise und durch die Grösse ihrer Radien bedingt. Der eine der beiden Kegelschnitte lässt sich stets durch die Summe, der andere durch die Differenz der Radien statt der einzelnen Radien ausdrücken. Daher kann, wenn man die Radien variabel nimmt, doch ihre Summe oder Differenz constant bleiben, d. h. einer der beiden resultirenden Kegelschnitte kann für veränderliche Grössen der Radien der gegebenen Kreise constant bleiben. Von diesen beiden Kegelschnittschaaren, die man erhält, jenachdem man die Summe oder die Differenz der Radien variiren lässt, sind die Curven des einen Systems orthogonale Trajectorien zu denen des andern.

Die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise zeigen, dass die etwa vorhandenen Asymptoten der Kegelschnitte paarweis auf ihnen senkrecht stehen, ferner dass die Tangentenstücke zwischen den Berührungspunkten durch die Asymptoten halbirt werden. Daraus ergiebt sich eine Construction der Asymptoten, welche keine Kenntniss der übrigen Constanten voraussetzt.

Die nun folgende Untersuchung über Potenzlinie und Aehnlichkeitspunkte lässt den oben angegebenen Satz von den Asymptoten als speciellen Fall eines anderen erscheinen und führt auch noch zu einer andern geometrischen Definition der Kegelschnittslinien.

Lässt man endlich einen der gegebenen Kreise unendlich gross werden, d. h. in eine Gerade übergehen, dann erhält man als resultirende Kegelschnitte zwei Parabeln.

(Dr. L. C. Schultz von Strassnitski: Handbuch der Geometrie für Praktiker 1850. Dr. J. Th. Kulik: Lehrbuch der höhern Analysis 1844. Bd. II. Christoph Taulus: Grundlinien der neuern Geometrie. VI. Buch). T.

F. D. Thomson. The equation to the axes of a conic. Messenger V. 65-66. 1869.

Die Gleichung der Axen des Kegelschnittes

$$S \equiv (A, B, C, F, G, H)(xyz)^2 = 0$$

wird in der Form

$$0 = \begin{vmatrix} \left(c\frac{dS}{dy} - b\frac{dS}{dz}\right)^2, & \left(a\frac{dS}{dz} - c\frac{dS}{dx}\right)^2, & \left(b\frac{dS}{dx} - a\frac{dS}{dy}\right)^2 \\ c^2B+b^2C-2bcF, & a^2C+c^2A-2caG, & b^2A+a^2B-2abH \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

erhalten, wenn man die Punkte sucht, in denen der Krümmungskreis eine 4punktige Berührung mit dem Kegelschnitte eingeht, d. h. die Punkte, in denen die gemeinschaftliche Sehne des Kegelschnittes und des Kreises Polare des Berührungspunktes wird.

He.

H. G. Day. Note on conic sections. Messenger V. 86. 1869.

Der äussere Winkel zwischen den Tangenten, die man von einem Punkte ausserhalb einer Ellipse an diese ziehen kann, ist gleich den Summen der Winkel, unter denen irgend eine dieser Tangenten von den beiden Brennpunkten aus gesehen wird.

He.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 7. Messenger V. 49-51. 1869.

Es wird gezeigt, wie eine Ellipse construirt werden kann als die Enveloppe eines variabeln Kreises, der seinen Mittelpunkt auf einer der Axen hat, und es werden die geometrischen Eigenthümlichkeiten entwickelt, die sich ergeben, je nachdem die grosse oder die kleine Axe benutzt ist. Glr. (O.)

A. Bertrand. Rectification directe de l'ellipse. Inst. 1. sect. XXXVIII. 88 1870.

Die Note enthält die Angabe einer stark convergirenden Reihe für den Quadranten der Ellipse. Die Reihe ist nach Angabe des Herrn Verf. durch Kinematik ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung erhalten. Auch andere Curven können durch die angewandte Methode rectificirt werden.

T.

A. Cayley. Solution of a Senate-House Problem. Messenger V. 24-27. 1869.

Das Problem in der Form, in der der Verfasser es ausspricht, ist dieses:

Wenn

$$\frac{\cos\theta_1 \cos\varphi}{a^2} + \frac{\sin\theta_1 \sin\varphi}{b^2} + 1 = 0,$$

$$\frac{\cos\theta_2 \cos\varphi}{a^2} + \frac{\sin\theta_2 \sin\varphi}{b^2} + 1 = 0,$$

wo $a^2 + b^2 = 1$, so ist auch

$$\frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{a^2} + \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{b^2} + 1 = 0.$$

Nachdem der Beweis geliefert, wird der Satz unter Vernachlässigung der Bedingung $a^2 + b^2 = 1$ verallgemeinert und lautet dann in geometrischer Form:

Sei (x, y) ein Punkt auf dem Kegelschnitt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, welcher von der Polare dieses Punktes, genommen in Bezug auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, in den Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) geschnitten wird, so sind diese beiden Punkte harmonisch in Rücksicht auf den Kegelschnitt

$$\left(\frac{a^4}{\alpha^4} + \frac{b^4}{\beta^4} - 1\right) + \left(\frac{a^4}{\alpha^4} - \frac{b^4}{\beta^4} - 1\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(-\frac{a^4}{\alpha^4} + \frac{b^4}{\beta^4} - 1\right)\frac{y^2}{\beta^2} = 0.$$

Dieser Satz wird ferner specialisirt, indem statt des Kegelschnittes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ein Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ genommen wird.

He.

H. G. Day. Notes on geometrical conics. Quart. J. X. 125-126. 1869.

Verkürzt man die auf einem Durchmesser errichteten Ordinaten eines Kreises (des Hülfskreises) in gegebenem Verhältniss, so erhält man eine Ellipse. Von dieser Definition ausgehend wird in elementar-geometrischer Weise bewiesen:

1) Dass jeder Durchmesser einer Ellipse gleich ist der Sehne des Hülfskreises, welche durch einen Brennpunkt parallel dem excentrischen Radius des Hülfskreises gezogen ist, der dem Durchmesser entspricht.

2) Dass für irgend einen Punkt der Curve die Summe der Entfernungen von den Brennpunkten constant ist.

He.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 1. Messenger V. 40-41. 1869.

Wenn $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2}$ und c reell und positiv sind, so darf man in der Gleichung

$$\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\pm\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2} = c$$

die Zeichen nicht willkürlich wählen, sobald man sie als Gleichung einer Curve betrachtet. Ellipse und Hyperbel werden folgendermassen unterschieden: Schreibt man die Gleichung in der Form $\pm\sqrt{S}\pm\sqrt{S'} = c$, so muss im ersten Fall für einen reellen Punkt der Curve die Relation $\sqrt{S}+\sqrt{S'} = c$ stattfinden und $c > \sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$ sein; im zweiten Fall ist die Relation $\sqrt{S}-\sqrt{S'} = c$ oder $-\sqrt{S}+\sqrt{S'} = c$ (jede für einen Zweig) und $c < \sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$. Glr. (O.).

P. Cassani. Soluzione della quistione No. 178 dei Nouvelles Annales. Battaglini G. VIII. 202. 1870.

Schz.

Un Dilettante. Sopra due quistioni del Salmon nel trattatto delle coniche. Battaglini G. VII. 254-255. 1869.

Lösung von 2 Aufgaben aus Salmon, Anal. Geometrie der Kegelschnitte, übers. von Fiedler, Cap. 15. O.

E. Leclert. Propriétés de la parabole. Nouv. Ann. (2) IX. 337-339. 1870.

Beschreibt man um einen Punkt der Axe einer Parabel einen Kreis, welcher die Parabel in ihrem Scheitel O berührt, projicirt man dann einen Parabelpunkt M auf die Axe nach H und verlängert MH bis zum Durchschnitt S mit der Kreisperipherie, dann ist das Verhältniss von MH und OS constant, für jede Lage des Parabelpunktes M. Die Umkehrung des Satzes bleibt auch richtig. Diese Sätze geben einerseits eine Beziehung zwischen der Parabel und einem berührenden Kreise, und gestatten andererseits eine Construction von Parabelpunkten, sobald nur der Scheitel, die Lage der Axe und ein Parabelpunkt gegeben ist.

T.

S. Morel. Problèmes de géométrie analytique. Nouv. Ann. (2) VIII. 272-274. 1869.

Nur die Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen, hat die Eigenschaft, dass immer das Stück einer Tangente, das zwischen den beiden Coordinatenaxen liegt, durch den Berührungspunkt halbirt wird.

Mit Hülfe dieses Satzes, dessen Beweis allgemein gegeben wird, wird dann bewiesen, dass diejenige Fläche, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die sich, ohne sich zu schneiden, um eine verticale Axe dreht, ein Umdrehungs-Hyperboloid ist.

T.

G. Dostor. Propriété des bissectrices d'un angle du triangle, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole. Nouv. Ann. (2) IX. 547-550. 1870.

Durch Benutzung des bekannten Satzes, dass die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels sich mit dem im Halbirungspunkte der Gegenseite errichteten Lothe auf der Peripherie des dem Dreieck umschriebenen Kreises schneidet, wird der Satz hergeleitet, dass das Product zweier Dreiecksseiten gleich dem Product der Halbirungslinien des eingeschlossenen Winkels oder seines Nebenwinkels ist. Die Länge der Halbirungslinien wird gerechnet im ersten Falle vom Scheitel des Winkels bis zum Durchschnittspunkt mit der Gegenseite, und im zweiten Falle vom Scheitel des Winkels bis zum Durchschnitt mit dem umschriebenen Kreise. Die Anwendung dieses Satzes auf Ellipse und Hyperbel führt zu Sätzen, die über die Längen von Normalen und Tangenten eines Curvenpunktes handeln. T.

G. Dostor. Propriétés nouvelles des diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole. Nouv. Ann. (2) VIII. 481-492. 1869.

Um über den Inhalt dieser Arbeit eine Uebersicht zu erhalten, sei es gestattet, die erhaltenen Lehrsätze, der Kürze wegen in ihrer analytischen Form wiederzugeben; wo sich doppelte Vorzeichen finden, gelten die oberen (unteren) für die

Ellipse (Hyperbel). Die Gleichung der Curven sei:

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2, \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 \mp b^2.$$

Der Mittelpunkt der Curven sei O, P sei einer ihrer Punkte mit den Coordinaten x, y; F, F' seien die Brennpunkte, dann werde bezeichnet: OP, FP, $F'P$ respect. durch ϱ, r, r'; die Winkel, welche FP und $F'P$ mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bilden, seien durch F und F', und der Winkel FPF' durch 2φ bezeichnet; die analogen Grössen für den OP conjugirten Halbmesser OP_1, der mit OP den Winkel V bildet, seien durch den Index 1 von den für OP geltenden unterschieden. Diejenigen Sätze, welche einfache Folgen schon genannter sind, ebenso Resultate, die sich im Laufe der Rechnung ergeben, mögen übergangen werden.

Für beide Curven zugleich gelten folgende Sätze:

$$\varrho^2 = a^2 \pm b^2 \mp rr', \qquad \varrho_1^2 = rr', \qquad \varrho^2 = r_1 r'_1,$$

$$x^2 \pm x_1^2 = a^2, \qquad y^2 \pm y_1^2 = b^2, \qquad \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{2\varrho}{2\varrho_1}.$$

Getrennt für beide Curven gelten die folgenden:

Ellipse.	Hyperbel.
$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}F}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}F'} = \frac{a+c}{a-c}$,	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}F . \operatorname{tg}\frac{1}{2}F' = \frac{c-a}{c+a}$,
$\varrho_1^2 \sin^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\varphi_1 = c^2$,	$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{2\varrho}{2\varrho_1} . \frac{2a}{2b}$,
$\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi_1 = \frac{c^2}{b^2}$,	$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{2b}{2a}$,
$\sin V = \frac{a}{b}\cos\varphi . \cos\varphi_1$,	$\sin V = \sin\varphi . \sin\varphi_1$.

Die Fälle, dass die beiden conjugirten Halbmesser einander gleich sind, und dass die Hyperbel gleichseitig ist, werden besonders am Schlusse erörtert. T.

G. Dostor. Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle. Grunert Arch. LI. 97-99. 1870.

Gegenstand der Arbeit ist der Beweis des Satzes, dass die Tangente des Neigungswinkels der Halbirungslinie eines Dreieckswinkels gegen die gegenüberliegende Seite sich zur Tangente des halben Dreieckswinkels verhalte, wie die Summe der den

ganzen Winkel einschliessenden Seiten zu ihrer Differenz. Von diesem Satze wird eine Anwendung auf Ellipse und Hyperbel gemacht. T.

R. B. Worthington. On the parabola. Messenger V. 95-102. 1869. 166-168. 1870.

1) Zieht man von einem festen äussern Punkt *O* beliebig viele Sehnen *OBC*, so werden diese mittel-proportional getheilt von einem festen Durchmesser. 2) Berühren die Seiten eines Dreiecks *ABC* eine Parabel in *P, Q, R*, so schneidet der durch *Q* gezogene Durchmesser *PR* in einem Punkte *D*, so dass *ABCD* ein Parallelogramm ist.

Diese Sätze werden auf folgende Probleme angewandt: Man soll eine Parabel beschreiben, die 1) 2 Linien berührt und durch 2 Punkte geht, 2) 3 Linien berührt und durch einen Punkt geht, 3) durch 3 Punkte geht und einen gegebenen Durchmesser hat, 4) durch 3 Punkte geht und 1 Linie berührt. Glr. (O.)

C. T. Two short proofs. Messenger V. 170. 1870.

Es wird eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel abgeleitet und der Beweis geliefert, dass der äussere Winkel zwischen irgend zwei Tangenten gleich der halben Summe der Winkel ist, welche ihre Sehnen vom Berührungspunkte nach den Brennpunkten bilden. Glr. (O.)

E. Hochheim. Ueber geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Schlömilch Z. XV. 33-41. 1870.

In der vorliegenden Arbeit werden die geometrischen Oerter der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks (nämlich des Höhendurchschnittspunktes, des Schwerpunktes und des Mittelpunktes des ein- und umgeschriebenen Kreises) für den Fall behandelt, dass die eine Seite des Dreiecks constant und fest ist, der gegenüberliegende Eckpunkt aber auf einem Kegelschnitt hingleite. Die Gleichungen der geometrischen Oerter werden abgeleitet, und aus denselben werden Schlüsse über ihre Form gezogen. T.

K. Mette. Ueber die Kegelschnitte: a) Von der Parabel. Pr. G. Zerbst. 1869.

Elementare Behandlung der einfachsten Sätze und Aufgaben von der Parabel. Die Methode und deren Mängel bieten keinen Anlass zu weiterer Beachtung. H.

G. Dostor. Généralisation d'un théorème d'Euler sur le cercle et son extension á l'ellipse. Grunert Arch. LI. 106-109. 1870.

Der behandelte Satz ist eine Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes vom Kreise, der nach Angabe des Herausg. d. Arch. von Euler selbst in der Abhandlung: „Variae demonstrationes geometricae. N. Comm. A. Petrop. T. I. p. 49" Fermat's Lehrsatz genannt wird. Auf den speciellen und erweiterten Satz bezügliche Abhandlungen finden sich in Grunerts Arch. XXVII, 116. XXX, 120. XXXI, 61. Der auf die Ellipse ausgedehnte Satz lautet:

Errichtet man über einer der Axen, (etwa über $AA' = 2a$) ein Rechteck, dessen Höhe gleich dem Product der andern Halbaxe und $\sqrt{2}$ ist (hier $= b.\sqrt{2}$), verbindet man dann irgend einen Ellipsenpunkt M mit den ausserhalb der Ellipse liegenden Ecken C und C' des Rechtecks, und verlängert die Verbindungslinien MC und MC' bis zu den Durchschnitten D und D', mit der grossen Axe, dann ist für jede Lage des Punktes M:

$$AD'^2 + A'D^2 = 4a^2 = AA'^2.$$

Der Beweis wird in der Art geführt, dass die Höhe des Rechtecks zunächst beliebig angenommen und dann durch Rechnung gefunden wird, dass sie $= b\sqrt{2}$ sein muss, wenn die Behauptung richtig sein soll. Für $a = b$ erhält man den für den Kreis geltenden Satz. Eine Folgerung zeigt dann, in welchem Verhältniss die grosse Axe durch die Punkte D und D' getheilt wird. T.

F. de Lanneau. Instrument destiné à tracer une ellipse d'un mouvement continu. C. R. LXVIII. 1573. 1869.

Das Instrument beruht auf dem Princip, dass, wenn 2 Punkte einer geraden Linie sich auf den Schenkeln eines rechten

Winkels bewegen, die Punkte ihrer Verbindungslinie Ellipsen beschreiben. O.

V. N. Bitonti. Dimostrazione delle quistioni 2, 3 e 4. Battaglini G. VIII. 291. 1870.

Es werden einige Formeln für gewisse Winkel am sphärischen Dreieck und die folgenden beiden Sätze bewiesen:

Sind die Tangenten einer Ellipse an den Schnittpunkten mit einer confocalen Hyperbel parallel den Asymptoten dieser letzteren, so verhalten sich die Axen der Ellipse, wie die Quadrate der Axen dieser Hyperbel.

Unter allen Dreiecken, welche denselben Umfang haben und einen gegebenen Winkel enthalten, hat das gleichschenklige Dreieck mit diesem Winkel an der Spitze den grössten Flächeninhalt. Schz.

Bröckerhoff. Das Apollonische Tactionsproblem. Pr. Beuthen 1870.

Zur analytisch-geometrischen Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene berührt, sind die Kegelschnitte betrachtet, von denen jeder der Ort für die Mittelpunkte der sämmtlichen Berührungskreise an zwei der gegebenen Kreise ist. Durch Combination der Gleichungen zweier der drei Kegelschnitte, welche so zu den drei gegebenen Kreisen gehören, sind die Coordinaten der Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise berechnet. Daran schliesst sich die Discussion der Fälle, in denen einer oder mehrere der gegebenen Kreise in Punkte oder Gerade degeneriren. Neue Resultate enthält die Abhandlung nicht. Scht.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper 1869. Question 5. Messenger V. 45-47. 1869.

Der Ort der Schnittpunkte zweier Tangenten an einen Kegelschnitt, harmonisch bezogen auf einen zweiten Kegelschnitt, ist ein Kegelschnitt. Der Verfasser zeigt, es folge aus diesem Satze, dass der Winkel in einem Halbkreise in der ebenen Geometrie ein rechter Winkel sei, in der sphärischen dagegen nicht.

Glr. (O.)

R. STAUDIGL. Ellipsenconstructionen. Wien. Ber. LIX. 189-200. 1869.

Mit Hilfe eines affinen Kreises werden Ellipsen construirt, welche.

a) durch zwei der Lage nach gegebene conjugirte Durchmesser und zwei Punkte oder einen Punkt und eine Tangente oder zwei Tangenten oder eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt,

b) durch einen der Lage und Grösse nach gegebenen Durchmesser und zwei Elemente (Punkte oder Tangenten)

bestimmt sind. Schz.

L. PAILLOTE. Moyen simple de mener la normale à l'ellipse. Nouv. Ann. (2) VIII. 269. 1869.

Hat man mit Hilfe der beiden concentrischen Kreise, deren Radien die Halbaxen der Ellipse sind, die Ellipsenpunkte in bekannter Weise construirt, dann kann man vermittelst eines dritten concentrischen Kreises, dessen Radius gleich der Summe der Halbaxen ist, die Ellipsennormalen construiren. T.

J. WOLSTENHOLME. On a certain system of trigonometrical equations, with applications to the porisms of two coaxal conics. Quart. J. X. 356-368. 1870.

Mit Porisma wird der Fall bezeichnet, wo einer Bedingung entweder keine oder unendlich viele Lösungen entsprechen, wie er z. B. bei einem zwischen zwei Kreise beschriebenen Vieleck stattfindet. Hiernach sind die Gleichungen

$$(A.) \quad \begin{cases} a\cos\beta\cos\gamma + b\sin\beta\sin\gamma = c, \\ a\cos\gamma\cos\alpha + b\sin\gamma\sin\alpha = c, \\ a\cos\alpha\cos\beta + b\sin\alpha\sin\beta = c, \end{cases}$$

als Bestimmungen der ungleichen α, β, γ zwischen O und 2π porismatisch, sofern sie für $bc+ca+ab=0$ unendlich viele, ausserdem keine Lösung haben.

Sind nun

$$x = a\cos\varphi,\ a'\cos\varphi; \quad y = b\sin\varphi,\ b'\sin\varphi$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte S, S' von gemeinsamen

Axen, α, β, γ die Werthe des excentrischen Winkels φ für die Ecken eines in S und um S' beschriebenen Dreiecks, so haben die Bedingungen für α, β, γ die Form der porismatischen Gleichungen (A.) und zwar zeigt sich, dass der Fall der Lösung eintritt für

$$\frac{a'}{a} \pm \frac{b'}{b} \pm 1 = 0.$$

Die Normalen für die Eckpunkte wie für die Berührungspunkte schneiden sich in einem Punkte; der Ort eines jeden der Schnittpunkte ist ein coaxaler Kegelschnitt; das gleiche gilt von den Orten des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises, des Schwerpunkts und des Höhendurchschnitts des Dreiecks. Ist S' ein Kreis, so ist der Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises $= \frac{1}{2}(a+b)$.

Schliesslich werden in gleicher Weise die zwischen zwei coaxale Kegelschnitte beschriebenen Vier- und Fünfecke untersucht.

H.

G. Rossi. Sulla locale de' centri delle coniche, che toccano due rette e passano per due punti. Battaglini G. VII. 174-175. 1869.

Zwei gegebene Tangenten eines variabeln Kegelschnitts werden zu Axen der x, y genommen, in Bezug auf welche zwei gegebene Punkte der Curve durch die Coordinaten $x'y'$, $x''y''$ ausgedrückt sind. Die Gleichung des Kegelschnitts hat dann die Form

$$xy = (ax+by+c)^2.$$

Ihre partiellen Ableitungen bestimmen die Coordinaten des Mittelpunkts, dessen Ort gesucht wird, und geben zusammen:

$$ax = by.$$

Die Anwendung der Gleichung selbst auf die gegebenen Punkte liefert 2 neue, in a, b, c lineare Gleichungen mit Doppelvorzeichen vor $\sqrt{xy}$. Hierdurch bestimmen sich leicht die Werthe von $a, b, c,$ nach deren Einsetzung in eine der partiellen Differentialgleichungen man eine Gleichung zweiten Grades für jenen Ort findet, und zwar zeigt sich, dass derselbe aus 2 Hyperbeln besteht, deren gemeinsamer Mittelpunkt die Mitte des Radius-

vectors der Mitte der Verbindungslinie der 2 gegebenen Punkte ist. Schliesslich wird noch eine Regel zur Construction der Asymptoten aufgestellt. H.

G. Mirabello. Sopra una quistione proposta nel giornale di Terquem. Battaglini G. VII 176. 1869.

Die Aufgabe ist, den Ort des Mittelpunkts eines in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises zu berechnen, dessen eine Ecke im Brennpunkt eines festen Kegelschnitts, und dessen Gegenseite eine durch den andern Brennpunkt gehende Sehne ist. Es ergiebt sich eine Ellipse. Zu Hülfe genommen wird der Umstand dass der beschreibende Punkt der Durchschnitt der zwei Normalen in den Endpunkten der Sehne ist. Dieselbe Aufgabe, zuerst gestellt von Rouché, hatte, wie der Verfasser sagt, Grouvelle auf andere Weise gelöst, indem er theilweise geometrische Betrachtungen anwandte. H.

V. Mollame. Dimostrazione dei teoremi 3 e 4, enunciati a pag. 228. Battaglini G. VIII. 366-369. 1870.

Beweis folgender Sätze:

1) Sind S und S' zwei concentrische Kegelschnitte von der Art, dass sich in S Dreiecke einschreiben lassen, die S' umgeschrieben sind; und ist ABC ein solches Dreieck, dessen Seiten in A', B', C' den Kegelschnitt S' berühren; — so ist das Verhältniss der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleich demjenigen der Flächeninhalte von S und S' für den Fall, dass S und S' Ellipsen sind; sind S und S' dagegen Hyperbeln, so ist das Verhältniss jener Dreiecke gleich dem Verhältniss derjenigen Dreiecke, die in S und in S' durch die beiden Asymptoten und irgend eine Tangente gebildet werden.

2) Von allen Dreiecken mit gleichem Umfang und einem constanten Winkel hat dasjenige den grössten Inhalt, in welchem die Seiten, die den constanten Winkel einschliessen, einander gleich sind. Mz.

V. N. Bitonti. Soluzione della quistione I. p. 228. Battaglini G. VIII. 371-374. 1870.

Beweis des ersten Satzes vom vorhergehenden Referat, — doch in einer anderen Weise. Mz.

E. d'Ovidio. Nota sopra due teoremi del Sig. Mannheim. Battaglini G. VII. 107-111. 1869.

Die beiden Theoreme von Mannheim sind:

1) Es seien zwei Kreise (O), (O') in einer Ebene gegeben, und man beschreibe durch einen festen Punkt A des ersten Kreises einen Kegelschnitt (C), der diesen Kreis in A und ausserdem den Kreis (O') doppelt berührt. (C) treffe (O) in den Punkten D und E; die Gerade DE treffe die Berührungssehne von (C) und (O') in M. Dann ist der Ort des Punktes M, wenn man alle möglichen Kegelschnitte (C) obiger Bedingung gemäss beschreibt, ein Kreis.

2) In einer Ebene seien zwei homofocale Kegelschnitte (O), (O') gegeben, und man beschreibe durch einen festen Punkt A des ersten Kegelschnitts einen Kegelschnitt (C), der jenen in A, und ausserdem den zweiten Kegelschnitt doppelt berührt; die gemeinschaftlichen Tangenten an (O) und (C), [abgesehen von derjenigen in A. Zus. d. R.] mögen sich in M treffen; betrachtet man alle Kegelschnitte, die dem (C) analog sind, so ist der Ort des Punktes M ein den gegebenen Kegelschnitten homofocaler Kegelschnitt.

Diese Theoreme werden vom Verfasser verallgemeinert, indem den Kreisen und homofocalen Kegelschnitten, — beliebige Kegelschnitte substituirt werden. Die Beweise sind analytisch, und zwar sehr abgekürzt und einfach. Mz.

A. Milinowski. Kegelschnitte in doppelter Berührung. Pr. Tilsit. 1870.

Verbindet man die entsprechenden Elemente zweier krumm-projectivischen Gebilde paarweise mit einander, dann entsteht ein Kegelschnitt, der denjenigen Kegelschnitt, durch dessen Vermittelung die krumm-projectivischen Gebilde erhalten waren, doppelt berührt. Aus diesem Satze werden in der vorliegenden

Arbeit die Eigenschaften der Kegelschnitte, welche eine doppelte Berührung eingehen, hergeleitet. Diese Sätze beziehen sich einmal auf einen, zwei, drei und mehr Kegelschnitte, welche einen andern doppelt berühren und dann auf zwei und mehr Kegelschnitte, welche mit zwei andern eine doppelte Berührung eingehen.

Ein Kegelschnitt, welcher einen oder zwei andere doppelt berührt, giebt Veranlassung zur Gewinnung neuer projectivischer Gebilde, deren Erzeugnisse kurz besprochen werden. Am Schluss wird der Zusammenhang berührt, in dem die Erzeugnisse von projectivischen Punktreihen mit denen von ein- zwei- deutigen Punktreihen stehen. Die Herleitung noch anderer Sätze ist angedeutet.

An litterarischen Notizen ist zu bemerken: Crelle J. XXXVI Abhandlung von Goepel, XXXVII und XLV Abhandlungen von Steiner, LIV Abhandlung von Schröter. Chasles: Traité des sections coniques. Salmon: Analytische Geometrie der Kegelschnitte bearbeitet von Fiedler § 280. Schröter: Theorie der Kegelschnitte p. 160. Pfaff: Neuere Geometrie II. § 316. Reye: Geometrie der Lage. T.

J. Griffiths. On a property of the eight circles which can be drawn through the six points of intersection of three given circles. Quart. J. X. 230-232. 1869.

Die acht Kreise, welche drei der sechs Schnittpunkte dreier gegebener Kreise enthalten, ordnen sich in vier Paare, indem man jedesmal solche zwei Kreise zu einem Paare rechnet, welche zusammen durch sämmtliche Schnittpunkte hindurchgehen. Je zwei solche Paare bilden nun eine Gruppe von vier Kreisen, die einen gemeinschaftlichen Berührungskreis haben. Kln.

W. S. Burnside. On the invariants and covariants of a system of three conics. Quart. J. X. 239-244. 1869.

Der Verf. zeigt insbesondere, wie die Invarianten dreier Kegelschnitte $u=0$, $v=0$, $w=0$ durch zehn unter ihnen ausgedrückt werden können, nämlich durch die Entwickelungs-Coefficienten der Determinante von $\lambda u+\mu v+\nu w$. Kln.

A. Cayley. Note on a relation between two circles. Quart. J. XI. 82-83. 1870.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. p. 385.

P. Cassani. Nota sul triangolo conjugato di due coniche. Battaglini G. VIII. 200-202. 1870.

Die Aufgabe: „Die Lage eines Punktes zu bestimmen, der in Bezug auf zwei gegebene Kegelschnitte dieselbe Gerade zur Polaren hat" führt zur Bestimmung und zur Definition des zweien Kegelschnitten conjugirten Dreiecks. Der Verfasser entwickelt nun die Gleichung 3ten Grades, deren Wurzeln die 3 Lagen des fraglichen Punktes bestimmen, und fügt eine Discussion dieser Gleichung hinzu. Mz.

J. J. Walker. On the anharmonic-ratio sextic of a pair of conics. Quart. J. X. 162-167. 1869.

Der Verfasser stellt in dieser Arbeit die Gleichung sechsten Grades auf, welche die anharmonischen Verhältnisse des Büschels von vier Geraden bestimmt, welche einen Punkt O auf einem Kegelschnitte S mit den Punkten verbinden in denen S von einem zweiten Kegelschnitt S' geschnitten wird. Bedeuten Δ, Δ' die Discriminanten, θ, θ' die von Salmon so bezeichneten simultanen Invarianten von S, S', so dass

$$(1) \qquad \Delta k^3 + \theta k^2 + \theta' k + \Delta'$$

die Discriminante von $kS+S'$ ist, so ist die verlangte Gleichung in λ

$$\delta(A+1)^3 - \iota A^2 = 0, \text{ wo } A = \lambda(\lambda-1).$$

Hierin bedeutet

$$\delta = 4(\theta^2 - 3\Delta\theta')^3 - (2\theta^3 - 9\Delta\theta\theta' + 27\Delta^2\Delta')^2$$

die mit Δ^2 multiplicirte Discriminante von (1) in Bezug auf k während

$$\iota = 3\Delta\theta' - \theta^2.$$

Siehe auch Abschn. II. Cap. 1. p. 55. He.

M. Neuberg. Triangles et coniques combinés. Nouv. Ann. (2) IX. 53-66. 1870.

Es werden die Axen eines Kegelschnittes berechnet, von

welchen ein Brennpunkt und ein inschriebenes, conjugirtes oder umschriebenes Dreieck gegeben sind. Ist

$$x^2+y^2 = (mx+ny+pz)^2 \quad (z=1)$$

die auf den gegebenen Brennpunkt bezogene Gleichung des zu bestimmenden Kegelschnittes, so ist der Parameter $\frac{b^2}{a} = p$ und die numerische Excentricität $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{m^2+n^2}$, also

$$\frac{b^2}{a^2} = 1-m^2-n^2 = q.$$

Sind ferner

$$\left(\frac{x_1}{z_1}\frac{y_1}{z_1}\right)\left(\frac{x_2}{z_2}\frac{y_2}{z_2}\right)\left(\frac{x_3}{z_3}\frac{y_3}{z_3}\right) \qquad z_1 = z_2 = z_3 = 1$$

die homogenen Cartesischen Coordinaten der Ecken des gegebenen Dreiecks, S sein Flächeninhalt, so wird gesetzt:

$$\varrho_{rs} = x_r x_s + y_r y_s, \qquad r = 1,\ 2,\ 3;$$
$$t_r = mx_r + ny_r + pz_r, \qquad s = 1,\ 2,\ 3.$$

Durch Lösung der Gleichungen für t_1, t_2, t_3 werden die Coefficienten m, n, p als Functionen der t erhalten; aus diesen folgt:

$$-4S^2p^2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \quad -4S^2q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 1 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ 1 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

worin $f_{rs} = \varrho_{rs} - t_r t_s = f_{sr}$ ist. Diese allgemeinen Formeln dienen zur Berechnung der Axen des Kegelschnittes und werden auf die drei Fälle angewendet, dass das gegebene Dreieck für denselben ein inschriebenes, conjugirtes oder umschriebenes ist.

Schz.

Carnoy. Note sur le triangle circonscrit à une conique. Nouv. Ann. (2) IX. 339-342. 1870.

Die Linien, welche die Spitzen eines Dreiecks, das einem Kegelschnitt umschrieben ist, mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte O; die Seiten dieses Dreiecks werden von denen des entsprechenden eingeschriebenen Dreiecks in Punkten geschnitten, welche auf einer bestimmten Geraden L liegen. Es werden die Gleichungen

des Ortes des Punktes O und der Einhüllenden der Geraden L entwickelt, wenn von den drei tangirenden Seiten eine variabel ist.

T.

A. ZIMMERMANN. Untersuchung der einer Ellipse ein- und umschriebenen Dreiecke und Parallelogramme bezüglich ihrer Fläche. Pr. Czernowitz. 1869.

Ausser der Untersuchung des Flächeninhalts der obengenannten Figuren in Bezug auf seine Grösse, seine Maxima und Minima bringt die Arbeit noch einige Sätze, welche die Seiten oder Eckpunkte dieser Dreiecke oder Parallelogramme betreffen.

T.

H. KÜHL. Untersuchung über das einer Ellipse eingeschriebene grösste n-Eck. Pr. Itzehoe. 1869.

H. KÜHL. Das kleinste n-Eck um eine Ellipse zu beschreiben. Pr. Itzehoe. 1870.

Durch Differentiiren der analytischen Formel, durch welche der Inhalt eines Polygons durch die Coordinaten seiner Eckpunkte bestimmt wird, werden die Bedingungsgleichungen hergeleitet, denen die Coordinaten der Eckpunkte des grössten einer Ellipse eingeschriebenen n-Ecks genügen müssen. Die allgemeinen Resultate werden dann speciell auf das Dreieck angewandt. Setzt man den Satz, dass unter den einem Kreise eingeschriebenen Polygonen das reguläre das grösste ist, als bekannt voraus — der Beweis dieses Satzes wird in grossen Zügen angedeutet — dann kann man mit Hilfe der Projectionslehre das vom Dreieck gewonnene Endresultat auf ein beliebiges n-Eck übertragen und findet, dass die Projection des regulären Kreispolygons auf die Ellipsenebene das verlangte grösste Polygon ist. Sein Inhalt wird berechnet. Als Beispiel wird das einer Ellipse eingeschriebene grösste Fünfeck construirt (siehe Fortschr. d. M. I. 283. Grelle, Ueber das etc.). In der zweiten Arbeit, die als ein Anhang der ersten bezeichnet ist, wird der Satz, dass unter allen einem Kreise umschriebenen Polygonen das regelmässige das kleinste ist, als Ausgangspunkt genommen. Die

Projection dieses regulären Polygons auf die Ebene der Ellipse (wenn die Ellipse selbst die Projection des Kreises ist) ist das gesuchte kleinste n-Eck. Der Inhalt dieses wird berechnet. Durch successive Berechnung des Inhaltes des grössten und kleinsten Dreieckes, Viereckes, etc. kann man dann den Inhalt einer Ellipse in ähnlicher Weise bestimmen, wie man in der Planimetrie den Inhalt des Kreises durch Annäherung bestimmt.

T.

H. Mylord. Lösning af opgave 204. Tychsen Tidsskr. (2) V. 40. 1869.

Lösung des folgenden Problems: Eine Schaar von Dreiecken hat zur Grundlinie eine gerade Linie, die durch den einen Brennpunkt eines Kegelschnitts geht, während die Spitze sämmtlicher Dreiecke im anderen Brennpunkte liegt. Es soll der Ort für die Mittelpunkte der Kreise bestimmt werden, die jenen Dreiecken einbeschrieben sind. Hn. (Wn.)

T. N. Thiele. Lösning af opgave 23. Tychsen Tidsskr. (2) V. 65. 1869.

H. Mylord. Lösning af opgave 70. Tychsen Tidsskr. (2) V. 70. 1869.

Lösung zweier geometrischen Probleme über die grösste Ellipse, die einem Viereck oder einem Dreieck einbeschrieben, und die kleinste Ellipse, die denselben Polygonen umschrieben werden kann. Hn. (Wn.)

Ch. Lindmann. Anteckningar angaende rätliniga figurer, inskrifna uti och omskrifna omkring en ellips. Dillner Tidsskr. II. 219. 1869.

Handelt von den grössten und kleinsten Polygonen, die man um oder in eine Ellipse beschreiben kann. Hn. (Wn.)

R. W. G. On geometrical methods in maxima and minima. Messenger V. 122-124. 1870.

Siehe Abschn. VI. Cap. 2. p. 134.

A. Cayley. On the porism of the in- and circumscribed polygon, and the (2, 2) correspondence of points on a conic. Quart. J. XI. 83-91. 1870.

Der Verfasser weist den Zusammenhang nach, in welchem der Satz vom ein- und umgeschriebenen Polygon eines Kegelschnitts mit einer symmetrischen zwei- und- zweideutigen Correspondenz der Punkte des Kegelschnitts steht, und giebt die hierher gehörigen Rechnungen. Mz.

J. Wolstenholme. Note to the Article on porisms. Quart. J. XI. 66-69. 1870.

Beweis des Satzes: Sind zwei concentrische Kegelschnitte so beschaffen, dass Dreiecke dem einen ein- und zugleich dem andern umgeschrieben werden können; und ist ABC ein solches Dreieck, A', B', C' die Berührungsqunkte auf den Seiten, so steht das Dreieck ABC zu dem $A'B'C'$ in einem constanten Verhältniss. Mz.

F. Folie. Extrait d'une lettre à M. Catalan. Bull. de Belg. (2) XXVII. 385. 1869.

Der folgende Satz wird ohne Beweis mitgetheilt: „Betrachtet man n Punkte auf einem Kegelschnitte, so bestimmen dieselben $\frac{n.(n-1)}{2}$ Polygone. Die Producte aus den Entfernungen eines Kegelschnittpunktes bis zu den Seiten eines jeden Polygons stehen untereinander in constantem Verhältniss". O.

Rosanes und Pasch. Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. Borchardt J. LXX. 169-175. 1869.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 73.

J. J. Walker. Anharmonic properties of conics inscribed in a quadrilateral. Quart. J. X. 317-320. 1869.

Das Theorem, welches der Verfasser mittelst Invariantentheorie beweist, und welches gleichzeitig Townsend auf Walker's vorgängige Aufstellung in den Educational Times dadurch her-

geleitet hat, dass er die zwei Kegelschnitte als reciproke Polaren betrachtete, lautet:

Zieht man die gemeinsamen Tangenten an zwei Kegelschnitte S, S', so ist das von den Verbindungslinien der vier Berührungspunkte mit einem fünften Punkte desselben Kegelschnitts gebildete Büschel (oder das System von 4 Punkten, in welchen eine fünfte Tangente an S von den 4 Tangenten getroffen wird) homographisch mit dem von den Verbindungslinien der 4 Durchschnittspunkte von S und S' und eines fünften Punktes auf dem letztern Kegelschnitt gebildeten Büschel.

Eine leichte Folgerung hieraus ist noch der Satz: Ein variabler in ein Vierseit eingeschriebener Kegelschnitt wird von einem festen in dasselbe Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt in 4 Punkten geschnitten, deren anharmonisches Verhältniss constant und gleich dem der 4 Punkte ist, in welchen eine fünfte Tangente an den festen Kegelschnitt von den 4 Seiten des Vierseits geschnitten wird. H.

E. Weyr. Ueber Kegelschnitte, welche einem Dreieck ein- oder umgeschrieben sind und einen festen Kegelschnitt doppelt berühren. Prag. Ber. 1869. 5-7.

Der Verfasser behandelt nur die Aufgabe, bei welcher die Kegelschnitte dem Dreiecke eingeschrieben sind, da das Andere durch Reciprocität sich ableiten lässt. Er weist nach, dass es vier Kegelschnitte giebt, die einem Dreieck eingeschrieben sind und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren. Ferner giebt er eine Auflösung, die sich auf Vervollständigung projectivischer Systeme an einem Kegelschnitt gründet. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe entwickelt der Verfasser durch vorherige Lösung der folgenden: Man soll die einem räumlichen Dreikant ein- und umgeschriebenen Rotations-Kegel bestimmen, — und durch Betrachtung des Durchschnitts dieses Dreikants und der zugehörigen Rotationskegel mit der unendlich entfernten Ebene, wobei der imaginäre Kugelkreis mit in Betracht kommt.

Mz.

D. Andere specielle Curven.

F. W. Newman. On curves of the third degree or tertians. Rep. Brit. Ass. 1869/70.

Der Gegenstand der Abhandlung ist, eine Nomenclatur für die Curven dritten Grades zu geben, die sich auf die Analogie ihrer Gestalt mit bekannten Gegenständen der Natur und Kunst gründet. Zur Begründung wird eine genaue Discussion der Curven gegeben. Auch ist ein Abschnitt über die Wurzeln der cubischen Gleichung beigefügt. Von den Namen, welche der Verfasser für die Curven vorschlägt, erwähnen wir nur einige, wie: „Whipsnake, Trident, Calyx, Lily Julip Hyacinth, Convolvulus, Pirk, The knotted Calyx, The studded Calyx, The Bulbus" u. s. f. Csy. (O.)

H. Durège. Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte. Prag. Abh. (6) III. 1869.

Legt man an eine Curve dritter Ordnung eine Tangente, so hat diese ausser dem Berührungspunkte noch einen Punkt mit der Curve gemein, welcher der dem Berührungspunkte zugehörige Tangentialpunkt genannt wird. In dem Tangentialpunkte kann man auf's Neue eine Tangente legen, in dem Tangentialpunkt von dieser abermals u. s. f. Die Frage, ob bei fortgesetztem Tangentenziehen der Tangentialpunkt in's Unbestimmte verläuft, oder sich einer bestimmten Grenzlage nähert, oder ob er wieder mit dem ersten Berührungspunkte zusammenfallen kann, ist der Gegenstand vorliegender Untersuchung; jedoch bezieht sich dieselbe nur auf solche Curven, welche einen Rückkehrpunkt, oder einen Doppelpunkt besitzen. Naturgemäss verknüpft der Verf. mit jener Untersuchung zugleich die Erörterung der Fragen, die sich darbieten, wenn man umgekehrt verfährt, wenn man nämlich aus einem Punkte der Curve eine Tangente an dieselbe legt, aus dem Berührungspunkt abermals u. s. f.

Bezeichnen A, B, C lineare Functionen homogener Punktcoordinaten, so lässt sich eine Curve dritten Grades mit einem Rückkehrpunkt darstellen durch $B^2.C = A^3$. Die Gerade $C = 0$

ist alsdann Wendetangente, $B = 0$ Rückkehrtangente, $A = 0$ Verbindungslinie des Rückkehrpunkts mit dem Wendepunkte. Eine Gerade $A = \mu B$ schneidet die Curve in einem Punkt, welcher durch μ bestimmt ist. Die Bedingung dafür, dass 3 Punkte, denen die Werthe $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ zugehören, in gerader Linie liegen, lässt sich ausdrücken durch die Relation $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. Diese Gleichung bildet die Grundlage für die weitere Untersuchung; denn wenn ν der Berührungspunkt und ν_1 der Tangentialpunkt ist, so liefert sie den Zusammenhang $2\nu + \nu_1 = 0$, und dieser lässt erkennen, dass bei fortgesetztem Tangentenziehen der Tangentialpunkt sich dem Rückkehrpunkt nähert, während, wenn man umgekehrt verfährt, der Berührungspunkt bei fortgesetztem Tangentenziehen dem Wendepunkte zustrebt.

Eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkt lässt sich in der Form $(A^2 \mp B^2).C = A^3$ darstellen, je nachdem der Doppelpunkt ein eigentlicher Doppelpunkt oder ein conjugirter Punkt ist. Die Gerade $C = 0$ ist Wendetangente, $A = 0$ die Verbindungslinie des Wendepunktes mit dem Doppelpunkt, $B = 0$ die zu A harmonisch zugeordnete Gerade rücksichtlich der Tangenten im Doppelpunkt. Eine Gerade $A = \mu B$ bestimmt einen Punkt der Curve, dem der Parameter μ entspricht. Die Bedingung dafür, dass drei Curvenpunkte $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ in gerader Linie liegen, lässt sich ausdrücken durch

$$(1.) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \pm \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zwischen dem Berührungspunkt ν und dem Tangentialpunkt ν_1 den Zusammenhang $2\nu + \nu_1 \pm \nu^2 \nu_1 = 0$, und diese Relation lässt die gestellten Fragen beantworten. Ist der Doppelpunkt ein eigentlicher mit reellen Tangenten, so nähern sich bei fortgesetztem Tangentenziehen die fraglichen Punkte bestimmten Grenzlagen, wie bei den Curven dritten Grades mit einem Rückkehrpunkt. Ist hingegen der Doppelpunkt ein conjugirter Punkt, so zeigt sich ein wesentlich anderes Verhalten dieser Punkte. In diesem Fall gilt in obiger Relation (1.) das negative Zeichen und sie lässt sich in der Form darstellen

$$\mu_3 = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2}.$$

Setzt man $\mu = \operatorname{tg} Q$, so folgt $\operatorname{tg} Q_3 = -\operatorname{tg}(Q_1 + Q_2)$ oder

$Q_1+Q_2+Q_3=0$ oder einem Vielfachen von π. Zieht man daher in einem beliebigen Punkt (Q) eine Tangente, so findet zwischen dem Berührungspunkt (Q) und dem Tangentialpunkt (Q_1), abgesehen von einem Vielfachen von π die Gleichung statt $Q_1=-2Q$, und diese lässt durch successive Betrachtung der Tangentialpunkte erkennen, dass sie im allgemeinen einer bestimmten Grenzlage nicht zustreben. Es kann aber der Fall eintreten, dass der Tangentialpunkt später mit dem Ausgangspunkte zusammenfällt, und dieser tritt jedesmal ein, wenn $Q_n=Q+\varkappa\pi$ ist. Man erhält also als Bedingung, dass dieser Fall eintrete, $Q+\varkappa\pi=(-2)^nQ$ oder $Q=\frac{\varkappa\pi}{(-2)^n-1}$. Giebt man $\varkappa$ alle ganzzahligen Werthe, welche kleiner sind, als die numerischen Werthe des Nenners, so liefert dieser Ausdruck diejenigen Punkte, von welchen aus die n^{te} Tangente durch den Ausgangspunkt hindurchgeht; es giebt also bei diesen Curven n-Ecke, welche der Curve zugleich ein- und umgeschrieben sind. Vielecke dieser Art sind bei Curven dritter Classe und vierter Ordnung auch von Herrn Clebsch aufgefunden worden (Borchardt J. LXIV). Solchen Vielecken widmet nunmehr der Verf. eingehendere Untersuchung. Die darauf folgenden Betrachtungen über die successiven Berührungspunkte bei fortgesetztem Tangentenziehen im Einzelnen zu verfolgen, würde an dieser Stelle zu weit führen.

Schn.

A. Clebsch. Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. Clebsch Ann. II. 382-384. 1870.

Die Arbeit enthält die Zusammenstellung einiger Endformeln, welche sich auf das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung oder auf das Problem beziehen, die Gleichung der Curve in die canonische Form:

$$f = a(x^3+y^3+z^3)+6bxyz$$

zu bringen.

T.

E. Weyr. Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. Schlömilch Z. XV. 383-387. 1870.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. p. 402.

HÖSSRICH. Discussion der Cardioide. Pr. Saalfeld 1870.

J. J. WALKER. On tangents to the cissoid. Proc. of L. M. S. II. 161-165. 1869.

Behufs Ziehung der drei Tangenten von einem Punkte $x'y'z'$ an die Cissoide des Diocles:

$$U = x^3 - y^2 z = 0$$

wird aus den allgemeineren in Salmon's „Higher Plane Curves" p. 68 aufgestellten Formeln sowohl die Gleichung desjenigen Kreises abgeleitet, welcher durch die drei Berührungspunkte $T_1 T_2 T_3$ geht, als auch die Gleichung desjenigen Kreises, welcher durch die drei Punkte geht, in welchen die Tangenten die Curve noch schneiden. Die Gleichung des ersteren in trimetrischen Coordinaten ist

$$3x'(z'-3x')x^2 + 3x'z'y^2 + 4y'^2z^2 + 2y'z'yz$$
$$+ (4y'^2 - 9x'^2)zx + 2y'z'xy = 0,$$

die des zweiten ist:

$$3x'(4z'-3x')x^2 + 12z'x'y^2 + y'^2z^2 - 4x'y'yz$$
$$+ (y'^2 - 9x'^2)zx - 4x'y'xy = 0.$$

Als Fundamental-Dreieck ist dabei angenommen die Rückkehrtangente (y), die in der Spitze auf derselben errichtete Senkrechte (x) und die Asymptote (z). Schz.

KUHSE. Abhandlung über die Lemniscaten. Pr. Lyck. 1870.

Als Lemniscate wird diejenige Curve definirt, welche der geometrische Ort der Spitzen derjenigen Dreiecke ist, welche auf derselben Grundlinie stehend ein constantes Product der beiden andern Seiten ergeben. Nach dieser Definition wird die Gleichung der Lemniscate ermittelt, ihre Lage und ihre verschiedenen Formen werden untersucht, eine geometrische Construction der Curve und ihrer Tangenten wird angegeben; dann folgt die Betrachtung der Krümmungskreise, der Evolute, der Rectification im allgemeinen und für die besonderen Formen der Lemniscaten. T.

S. Roberts. On the mechanical description of some species of circular curves of the third and fourth degrees. Proc. of L. M. S. II. 125-136. 1869.

Die ersten der angegebenen Vorrichtungen, um continuirlich eine Curve dritten oder vierten Grades zu ziehen, bestehen in Verallgemeinerungen der „Ellipsograph" des Nicomedes (bekanntlich eine um einen festen Punkt f sich bewegende Gerade, von welcher irgend ein Punkt p die Curve erzeugt, während ein anderer Punkt q derselben eine Gerade g durchläuft). Für den Punkt f kann ein Kreis substituirt werden, welchen die Gerade a beständig berührt; für q ebenfalls ein Kreis, welchen a berührt während sein Mittelpunkt die Gerade g durchläuft; für p irgend ein mit p und a durch einen Arm von gegebener Länge und Neigung verbundener Punkt p'; oder es können zwei dieser Modificationen oder alle vereinigt werden. Die im allgemeinsten Falle entstehende Curve ist eine Curve vierten Grades mit einem unendlich entfernten und zwei endlichen Doppelpunkten; die Gleichung derselben wird entwickelt. Ist die Differenz der beiden Radien gleich der Entfernung der festen Geraden von dem Centrum des festen Kreises, so zerfällt die Curve in eine gerade Linie und eine Curve dritten Grades. Wird statt der festen Geraden g ein zweiter fester Kreis gewählt, so erhält man eine Curve sechsten Grades, welche unter Umständen in einen Kreis und eine Lemniscate zerfällt.

Die zweite Methode besteht darin, dass man eine gerade Linie sich so bewegen lässt, dass einer ihrer Punkte einen Kreis, ein anderer eine feste Gerade durchläuft. Irgend ein mit der Geraden fest verbundener Punkt beschreibt alsdann eine Curve vierten Grades mit zwei endlichen Doppelpunkten; ihre Gleichung enthält die vorige als speciellen Fall. Auch von dieser Methode werden Abänderungen angegeben. Schz.

J. Lüroth. Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung. Clebsch Ann. I. 37-53. 1869.

Herr Clebsch hat in dem Aufsatze über die Theorie der Curven vierter Ordnung (Borchardt J. LIX.) gezeigt, dass es im

Allgemeinen nicht möglich ist, die Gleichung einer Curve vierter Ordnung als eine Summe von fünf vierten Potenzen darzustellen, dass vielmehr diejenigen Curven, welche diese Eigenschaft besitzen, sich durch das Verschwinden einer Invariante auszeichnen. Herr Lüroth führt nunmehr den Beweis, dass das Verschwinden jener Invariante auch eine hinreichende Bedingung ist zur Darstellung der Curve als Summe von fünf Biquadraten und fügt mehrere charakteristische Eigenschaften für die bezeichnete Curvengattung hinzu. Schn.

J. Casey. On bicircular quartics. Trans. of Dublin. XXIV. 457-569. 1869.

Die Abhandlung enthält eine neue Methode, die Eigenschaften von Curven 4ten Grades herzuleiten, deren Kreispunkte im Unendlichen Doppelpunkte sind.

Nimmt man die allgemeinste Gleichung zweiten Grades in α, β, γ, wo diese Variabeln statt Linien Kreise bezeichnen, so lässt sich zeigen, dass eine bicirculare Curve vierten Grades auf vierfache Weise die Enveloppe eines variabeln Kreises ist, welcher einen gegebenen Kreis orthogonal schneidet und dessen Mittelpunkt sich auf einem Kegelschnitt bewegt.

Wenn die 4 Kegelschnitte, auf welchen sich der Mittelpunkt des variabeln Kreises bewegt, mit F, F', F'', F''' und die entsprechenden orthogonal geschnittenen Kreise mit J, J', J'', J''' bezeichnet werden, so wird bewiesen, dass die $4F$ confocal sind, indem die gemeinschaftlichen Brennpunkte Knoten-Brennpunkte der Curve 4ten Grades sind; dass die Mittelpunkte der $4J$ Umkehrcentren und die Schnittpunkte der J mit den entsprechenden F Einzelbrennpunkte der Curven 4ten Grades sind.

Plücker's Charakteristiken für die Curven 4ten Grades und ihre Evoluten werden gegeben und die geometrischen Lagen der Doppelpunkte, Doppeltangenten, Spitzen u. s. f. bestimmt.

Da die angewandte allgemeine Gleichung von derselben Form ist wie die eines Kegelschnittes, nur dass die Variabeln Kreise statt Linien bezeichnen, so haben die modernen Methoden der Invarianten, Covarianten, Reciprocität etc. der Kegelschnitte ihre Analoga bei den bicircularen Curven 4ten Grades. In der

That werden im einen und andern Fall dieselben Gleichungen und Beweisarten angewandt, so dass jeder graphischen Eigenthümlichkeit eines Kegelschnitts eine analoge bei den bicircularen Curven 4ten Grades entspricht. Z. B. dem Satze: „Wenn 4 Kegelschnitte doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt U haben, der durch 3 gegebene Punkte gezogen werden kann, so werden alle durch 4 andere Kegelschnitte berührt, die ebenfalls doppelte Berührung mit U haben" entspricht für die bicircularen Curven 4ten Grades der Satz: „Haben 4 bicirculare Curven 4ten Grades vierfache Berührung mit einer gegebenen bicircularen Curve 4ten Grades, welche so beschrieben werden kann, dass sie doppelte Berührung mit 3 gegebenen Kreisen hat, so haben alle doppelte Berührung mit 4 anderen bicircularen Curven 4ten Grades, die ebenfalls vierfache Berührung mit U haben".

Csy. (O.)

M. W. Crofton. On various properties of bicircular quartics. Proc. of L. M. S. II. 33-45. 1869.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. p. 418.

O. Schlömilch. Ueber einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. Schlömilch Z. XIV. 158-161. 1869.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung einer Aufgabe, welche bereits früher (cf. Grunert Arch. XLVII. p. 477 von Herrn Prof. Grunert) ohne Discussion der gefundenen Ortsgleichung behandelt worden ist. Die Aufgabe lautet: In einen Kegelschnitt ist eine Gerade von constanter Länge als Sehne eingetragen, durch ihre Endpunkte sind die beiden Tangenten des Kegelschnittes gezogen, es wird der geometrische Ort des Durchschnittspunktes dieser Tangenten für die möglichen Lagen der Sehne gesucht. Als Ortsgleichung ergiebt sich, wenn $\xi\eta$ die veränderlichen Coordinaten sind:

$$1 = \frac{1}{A\xi^2+B\eta^2} + \frac{1}{A\left(\frac{C}{B}-1\right)\xi^2+B\left(\frac{C}{B}-1\right)\eta^2}.$$

Dabei ist die Gleichung des ursprünglichen Kegelschnitts:

$$Ax^2+By^2 = 1$$

und als constante Sehnenlänge $2c$ $\left(C = \frac{1}{c^2}\right)$ angenommen.

Die Discussion wird in der Art geführt, dass als ursprünglicher Kegelschnitt der Reihe nach eine Ellipse, Parabel, Hyperbel angenommen wird. Für den ersten und dritten Fall bringt die Anwendung von Polarcoordinaten beziehungsweise die Gleichungen $\varrho^2 = r^2+r_1^2$, $\varrho^2 = r^2-r_1^2$ hervor; darin bezeichnet ϱ den Radiusvector der gesuchten Ortscurve, r den des gegebenen Kegelschnittes und r_1 den eines Hilfskegelschnittes; dieser Hilfskegelschnitt ist je nach der Grösse von c im Verhältniss zur kleinen Halbaxe (beziehungsweise Hauptaxe) eine Ellipse, zwei parallele Gerade, eine Hyperbel. Die Constructionen werden angegeben.

Die Integration der gefundenen Ortsgleichung führt dann noch für den Fall der Ellipse zu einem Satze über den Flächeninhalt; es ergiebt sich nämlich, dass das ringförmige Stück, zwischen der Ortscurve und der gegebenen Ellipse respect. Hilfsellipse ebenso gross wie der Flächeninhalt der Hilfsellipse resp. der gegebenen Ellipse ist.

Der noch übrige Fall, dass der gegebene Kegelschnitt eine Parabel sei, wird besonders behandelt. Die Construction der Ortscurve wird mit Hilfe einer gleichseitigen Hyperbel geliefert. Die Ortscurve hat die Parabel zur Asymptote; die zwischen beiden enthaltene Fläche ist $= \frac{\pi}{2} c^2$, also unabhängig vom Parameter.

T.

A. Hochheim. Tangentialcurven der Kegelschnitte. Schlömilch Z. XV. 377-381. 1870.

Die hier behandelten Curven erhält man dadurch, dass man auf jeder Tangente eines Kegelschnittes nach einer Richtung hin den Punkt bestimmt, welcher um eine constante Strecke t von der Ordinate des Berührungspunktes der Tangente entfernt ist. Es wird zunächst allgemein der Weg angegeben, der zur Lösung führt, und dann wird eine specielle Anwendung auf jede der drei Kegelschnittarten gemacht. Dabei ergiebt sich aus der

resultirenden Gleichung nicht bloss allgemein die Gestalt der Tangentialcurven, sondern auch ihre Construction durch Benutzung zweier Hilfscurven. Die erste derselben ist stets ein dem gegebenen Kegelschnitt congruenter, der aber so gelegen ist, dass sein Scheitel mit dem Anfangspunkt des Coordinatensystems zusammenfällt. Die zweite Hilfscurve ist diejenige Curve, deren Gleichung das $t$fache der Ableitung der Gleichung der ersten Hilfscurve ist. Die Ordinate der Tangentialcurve ist dann die Differenz der Ordinaten der beiden Hilfscurven. Durch Integration der hierdurch erhaltenen Gleichungen ergeben sich dann noch einige Sätze über den von der Tangentialcurve eingeschlossenen Flächenraum. T.

S. Löwenherz. De curvis tangentialibus. Berlin, Calvary 1870.

W. H. Besant. Note on the envelope of the pedal-line of a triangle. Quart. J. X. 110, 111. 1869.

Zieht man von irgend einem Punkte auf dem umschriebenen Kreise Senkrechte auf die Seiten eines Dreiecks, so liegen bekanntlich die drei Fusspunkte auf einer Geraden, welche die Fusspunktenlinie des Punktes P genannt wird.

Es wird bewiesen, dass die Einhüllende der Fusspunktlinien eines Dreiecks eine Hypocycloide mit drei Spitzen ist, deren Mittelpunkt mit dem des Feuerbach'schen Kreises zusammenfällt. He.

J. Griffith. Note on finding the degree of a certain locus connected with a triangle inscribed in a circle. Quart. J. X. 229, 230. 1869.

Nimmt man zwei Punkte p und q auf einem Kreise, so dass die verbindende Gerade eine Curve n^{ter} Classe berührt, so ist der Schnittpunkt der eben erklärten Fusspunktgeraden der Punkte p, q in Bezug auf ein eingeschriebenes Dreieck eine Curve von der $2n^{ten}$ Ordnung. Mehrere specielle Fälle werden erwähnt, z. B. wenn die Gerade pq durch einen festen Punkt geht, so ist der Ort ein Kegelschnitt. He.

F. H. Rump. Construction und Berechnung von Ovalen Pr. Coesfeld. 1870.

Die Arbeit enthält einige allgemeine Aufgaben über Construction und Berechnung von Ovalen, wenn eine der Axen des Ovals oder beide gegeben sind. Die Constructionen werden durch Kreise ausgeführt, deren Mittelpunkte die Ecken von gewissen gleichseitigen oder gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken sind. Die Berechnung erstreckt sich auf Berechnung des Umfangs und Inhalts der Ovale. Den Schluss bildet die Construction der Eilinie, wenn deren Länge und Breite gegeben ist.

T.

H. Mylord. Lösning af Opgawe 223. Tychsen Tidsskr. (2) V. 56. 1869.

Ableitung eines Satzes über die Cassini'sche Curve.

Hn. (Wn.)

J. Petersen. Om et Punkts Potens med Hinsyn til en Curve. Tychsen Tidsskr. (2) V. 106. 1869.

Der Verf. sucht die Curven, für welche die Potenz eines Punktes constant ist.

Er findet für diese Curven folgende Gleichung

$$(x^2+y^2)^p = \varphi(x, y),$$

wo p eine ganze positive Zahl bezeichnet, φ eine ganze rationale Function, die in Bezug auf x und y von niedrigerem Grade ist, als $2p$. —

Hn. (Wn.)

W. S. Burnside. On the invariants and covariants α, a of a binary quartic considered geometrically as a system of two ternary quadrics. Quart. J. X. 211-219. 1869.

Siehe Abschn. II. Cap. 2 p. 71.

Ph. Gilbert. Sur les courbes planes à équations trinomes. Nouv. Ann. (2) IX. 370-371. 1870,

Sind die Parameter $x_1\, y_1$ einer Curve, deren Gleichung:

$$(1.)\quad \left(\frac{x}{x_1}\right)^m + \left(\frac{y}{y_1}\right)^m = 1$$

ist, selbst durch die Gleichung:

$$(2.)\quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^p+\left(\frac{y_1}{b}\right)^p = 1$$

von einander abhängig, dann hat die Einhüllende der ersten Curven die Gleichung:

$$(3.)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1.$$

Es werden specielle Fälle erwähnt, und dann ein Satz über das Verhältniss der Krümmungsradien der Curven (1.) und ihrer Einhüllenden (3.) gegeben. Für den Fall $p=\frac{2m}{m-1}$ und $m>1$ wird das Product des Flächeninhaltes der Curven (2.) und (3.) angegeben. T.

W. Walton. Note on rhizic curves. Quart. J. XI. 91. 1870.

Es sei $f(x)=x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\cdots+p_m$ und $p_1, p_2, \dots p_m$ reelle Constanten. Man setze nun $x=u+v\sqrt{-1}$, wo u und v reelle Grössen, dann wird

$$f(x) = P+Q\sqrt{-1},$$

wo P und Q reelle Functionen von u und v sind. Die beiden Curven $P=0$, $Q=0$ auf rechtwinklige Axen u und v bezogen, werden nun Rhizic-Curven genannt und untersucht. Mz.

Allégret. Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes. Nouv. Ann. (2) IX. 30-32. 1870.

Die Note behandelt den Satz, dass der Krümmungskreis in einem jeden Punkte der Curve: $r^m=a^m\cos m\vartheta$ auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahl ein Stück abschneidet, das sich zum Leitstrahl wie 2 zu $1+m$ verhält. T.

F. Unferdinger. Ueber den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarcoordinaten und über diejenigen Curven, deren Gleichung: $r^k=a^k\sin k\theta$. Grunert Arch. LI. 72-93. 1870.

Der Verfasser leitet zunächst, von der allgemeinen Gleichung

einer Curve in Polarcoordinaten: $r = f(\theta)$ ausgehend, Relationen für den Krümmungsradius ϱ eines Curvenpunktes M mit den Coordinaten r, θ her, unter denen die wichtigste:

$$\frac{rr'}{\varrho} = \frac{d}{d\theta}(r\sin\tau) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}\right),$$

wo $r' = \frac{dr}{d\theta}$, und τ den Winkel der Tangente in M mit dem zugehörigen Radiusvector bezeichnet. Er setzt nun die Bedingung fest: $\tau = k\theta$, wo k eine von Null verschiedene positive Constante, und gelangt durch Integration zu der Gleichung:

$$(1.)\quad \left(\frac{r}{a}\right)^k = \sin k\theta,$$

wo a die Integrationsconstante. Hierauf werden Eigenschaften dieser Curven angegeben; unter anderen: Der Leitstrahl ist immer die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Krümmungsradius und der $(1+k)$fachen Senkrechten vom Pol auf die Tangente.

Für $k=1$ hat man einen Kreis, $k=2$ giebt die Bernoulli'sche Lemniscate, $k=\frac{1}{2}$ die Cardioide, deren Grundkreis $\frac{a}{2}$ zum Durchmesser hat. Quadratur und Rectification sind in geschlossener Form ausführbar, wenn $\frac{1}{k}$ eine ganze Zahl. In einem besondern Paragraphen wird dann gezeigt, dass die im Eingang gegebene Relation zur Auffindung der Curve vorzüglich dann dient, wenn ϱ als Function von r gegeben ist.

Die Fusspunktencurven der Curven (1.), wenn der Coordinatenpol zum Pol gewählt wird, haben die Gleichung:

$$\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{k}{1+k}} = \sin\left[\frac{k}{1+k}(v+90^0)\right],$$

wo p, v die laufenden Coordinaten sind.

Eine zweite Gattung von Curven wird durch die Bedingung erlangt:

$$\tau = 180^0 - k\theta,$$

woraus abgeleitet wird:

$$(2.)\quad \left(\frac{a}{r}\right)^k = \sin k\theta.$$

Für $k=1$ ist dies eine Gerade, $k=\frac{1}{2}$ eine Parabel, $k=2$ eine gleichseitige Hyperbel.

Die Fusspunktencurve wird in diesem Falle:

$$\left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{k}{1-k}} = \sin\left[\frac{k}{1-k}(v-90^{0})\right],$$

Zum Schluss werden noch folgende Sätze bewiesen:

Die Curven, deren Gleichung (1.), haben die Eigenschaft, dass das Product der Entfernungen eines jeden Punktes derselben von k festen Punkten constant ist.

Die Curven, deren Gleichung (2.), haben die Eigenschaft dass das Product der Entfernungen eines jeden Punktes derselben von k festen Punkten der k^{ten} Potenz seines Leitstrahls gleich ist. Mz.

H. Montucci. Mémoire sur la recherche des racines des équations à trois termes de tous les dégrés à l'aide de la cubo-cycloide. C. R. LXIX. 525-526. (Extrait) 1869.

H. Montucci. Dernier mémoire sur la recherche des racines des équations trinômes de tous les degrés à l'aide de la cubo-cycloide. C. R. LXIX. 757. (Extrait) 1869.

Der Verfasser hat 1865 (24. April) den Satz aufgestellt, dass jede trinomische algebraische Gleichung sich mit Hülfe der Curve

$$\lambda^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$$

um 3 Grade erniedrigen lasse. In der ersten Abhandlung wird jetzt die Gültigkeit auf Gleichungen der Form

$$z^{n}+pz^{2}-q=0 \quad \text{und} \quad z^{n}-pz^{n-2}+q=0$$

beschränkt, in der zweiten die Beschränkung widerrufen. Die Ausführung ist im Auszug nicht mitgetheilt. H.

F. Streinz. Ueber Cycloiden. Pr. Troppau. 1869.

Aus der bekannten Definition der Cycloiden als Radlinien wird ihre Gleichung hergeleitet; daraus werden die verschiedenen Formen und Lagen derselben gegen die Coordinatenaxen bestimmt. Die Gleichungen werden discutirt; auch die physikalischen Eigenschaften der Cycloiden werden behandelt: der Zu-

sammenhang der Hypocycloide mit der Ellipse führt zur Erwähnung der Ellipsographen, deren einer beschrieben wird. Historisches bildet den Schluss. T.

FOURET. Sur la double génération des épicycloïdes planes. Nouv. Ann. (2) VIII. 162-168. 1869.

Es wird bewiesen, dass eine jede Epicycloide auf doppelte Weise durch Kreise erzeugt werden kann, die auf andern, ohne zu gleiten, rollen. Die Radien der Kreise der zweiten Erzeugung lassen sich aus denen der ersten ableiten. (Inst. (1) XXXVI. 182 u. 183, 189-192). T.

F. E. ECKARDT. Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide. Schlömilch Z. XV. 129-134. 1870.

Die bewiesenen Sätze lehnen sich an folgenden Satz an: Wenn sich zwei Punkte auf einem und demselben Kreise gleichförmig, aber mit verschiedener Geschwindigkeit ($n:1$) fortbewegen, und wenn die gleichzeitigen Lagen beider Punkte durch gerade Linien verbunden werden, so umhüllen diese Linien eine Epicycloide oder Hypocycloide je nachdem die Bewegung beider Punkte gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist. Daraus ergeben sich dann die übrigen Sätze: Theilt man die Verbindungsgerade der beiden Punkte nach einem constanten Verhältniss ($m:1$) von innen oder aussen, dann beschreibt der Theilungspunkt eine Epicycloide, und zwar eine verlängerte oder gemeine oder verkürzte, je nachdem absolut genommen $m < n$, $m = n$, $m > n$ ist. Unter diesen Curven ist die Epicycloide für $m = -n$ (wo das neg. Zeichen die Theilung von aussen bezeichnet) die Evolvente der für $m = n$, und die für $m = 1$ die Fusspunktcurve der Tangenten der Epicycloide für $m = n$, wenn man den Kreismittelpunkt zum Pol nimmt. Analoge Sätze gelten für die Hypocycloide. Von dem ersten Satze wird dann Anwendung auf die Bestimmung der Katakaustika eines Kreises gemacht, für den Fall, dass der leuchtende Punkt entweder in der Peripherie oder unendlich fern liegt.

Bewegen sich die beiden Punkte auf gleich grossen in parallelen Ebenen gelegenen Kreisen, gleichförmig, aber mit ver-

schiedenen Geschwindigkeiten, dann beschreibt ihre Verbindungsgerade eine Regelfläche, deren Durchschnittscurven parallel mit den Kreisebenen, Epicycloiden (respect. Hypocycloiden) jeder Art sind. Das Resultat gilt im Wesentlichen auch noch, wenn die Radien beider Kreise verschieden sind. T.

L. Painvin. Note sur l'hypocycloide á trois rebroussements. Nouv. Ann. (2) IX. 202. 1870.

Der Verfasser definirt zuerst die Hypocycloide mit drei Spitzen als die Curve, welche ein Punkt eines Kreises beschreibt, während dieser auf einem festen Kreise mit dreimal grösserem Radius (innerhalb) rollt. Nimmt man die Mitte des festen Kreises zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten, lässt ferner die X-Axe durch einen der drei Punkte des festen Kreises gehen, welche mit dem variablen Punkt zusammenfallen, so hat man:

$$x = a(2\cos\alpha + \cos 2\alpha),$$
$$y = a(2\sin\alpha - \sin 2\alpha),$$

wo a der Radius des beweglichen, $3a$ derjenige des festen Kreises, α der Winkel ist, welchen die Verbindungslinie des Centrums des beweglichen Kreises mit dem Coordinatenanfang mit der x-Axe bildet. Durch Elimination von α aus den vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$(x^2+y^2)^2+8ax(3y^2-x^2)+18a^2(x^2+y^2)-27a^4 = 0.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte α ist

$$x\sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{3\alpha}{2}.$$

Die Hypocycloide hat drei Punkte auf dem festen Kreise A, B, C; diese sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, es sind dies drei Rückkehrpunkte, die Rückkehrtangenten sind die Radien des festen Kreises nach diesen Punkten hin, also: OA, OB, OC. Jede Rückkehrtangente hat eine Berührung erster Ordnung und trifft die Curve in einem zweiten Punkte, dessen Entfernung vom Centrum $O = a$. Die Curve ist vierter Ordnung und dritter Classe; sie hat drei Symmetrie-Axen OA, OB, OC. Sie ist dem festen Kreise eingeschrieben und einem concentrischen vom Radius a umgeschrieben. Sie hat keinen Inflexionspunkt; sie be-

sitzt nur eine Doppeltangente, nämlich die unendlich entfernte Gerade, deren Berührungspunkte die imaginären Kreispunkte sind.

Bezeichnet man mit X, Y, Z die Lothe eines variablen Punktes auf die Seiten des Dreiecks ABC, so ist die Gleichung der Curve: $(XY+YZ+ZX)^2 = 4XYZ(X+Y+Z)$.
Soll die Gerade: $uX+vY+wZ = 0$
Tangente der Curve sein, so hat man die Bedingung:

$$(u+v+w)^3 = 27uvw,$$

welche als Tangentialgleichung der Curve anzusehen ist. Im Folgenden wird nun bewiesen: Jede Curve vierter Ordnung und dritter Classe, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente in den imaginären Kreispunkten hat, ist eine solche Hypocycloide. Und: Hat man ein festes Dreieck ABC und eine solche Transversale, dass die Lothe zu den Dreiecksseiten in den drei Schnittpunkten mit der Transversale sich in einem Punkte treffen, so hüllt diese Transversale eine solche Hypocycloide ein.

Es folgen nun weitere Eigenschaften der Hypocycloide, unter anderen: Die erste Polare irgend einer Geraden D in Bezug auf die Hypocycloide ist eine Parabel, deren Axe zu D senkrecht ist. Die ersten Polaren paralleler Geraden sind homofocale Parabeln. Mz.

Laguerre. Extrait d'une lettre adressée à M. Bourget. Nouv. Ann. (2) IX. 254 1870.

Der Verfasser giebt folgende Sätze über die Hypocycloide mit drei Spitzen:

I. Die drei Tangenten, die man von einem Punkte an die Hypocycloide ziehen kann, bilden mit irgend einer der Rückkehrtangenten Winkel, deren Summe ein Vielfaches von π ist.

II. Sind A, B, C die Berührungspunkte der drei von einem Punkte P an die Hypocycloide gezogenen Tangenten, und nimmt man auf einer der Tangenten, z. B. PA einen solchen Punkt A', dass PA' das Doppelte von PA ist, so liegen die Punkte P, A', B, C auf einem Kreise und theilen denselben harmonisch.

Hieraus werden dann noch einige Folgerungen gezogen.

Mz.

O. Callaudreau. Théorèmes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. (2) IX. 472. 1870.

Die Note enthält drei ohne Beweis mitgetheilte Sätze. Sie betreffen eine an der Curve bewegliche Tangente. T.

Wollseiffen. Ueber die Hypocycloide. Pr. Jülich 1869.

F. Marten. Die Rolllinien und die Brennlinie durch Zurückwerfung. Pr. Ostrowo 1869.

Es werden die Gleichungen der Epicycloide, Hypocycloide, Cycloide, ihrer Evoluten und der Katakaustik einer beliebigen Curve, insbesondere des Kreises entwickelt, und die Doppelpunkte der erstgenannten bestimmt. H.

Aoust. Sur les roulettes en général. C. R. LXX. 978-982. 1870.

In der vorliegenden Note werden die Cycloiden ganz allgemein behandelt. Sie werden als Curven definirt, welche durch einen Punkt A' erzeugt werden, der unveränderlich fest mit einer Curve C' verbunden ist; diese Curve rollt, ohne zu gleiten, auf einer Curve C so hin, dass in dem jedesmaligen Berührungspunkte beider Curven ihre Osculationsebenen zusammenfallen. Aus dieser Definition der Cycloiden wird hergeleitet, dass die vorgeschriebene Art des Rollens ersetzt werden kann durch eine zweifache Drehung, von denen die erste um die Binormale der Curve C und die zweite um die Tangente derselben Curve in demselben Punkte erfolgen muss.

Gestützt hierauf werden nun die Gleichungen der Cycloiden, die momentanen Rotationsaxen, die Gleichung und Construction der Tangente, die Rectification und die Krümmung der Cycloiden besprochen. Der Ausdruck für das Differential des Bogens giebt namentlich Veranlassung zur Herleitung einer grösseren Zahl interessanter Sätze. T.

E. Catalan. Note sur les roulettes et les podaires. Bull. de Belg. (2) XXVII. 144-145. 1869.

Beweis des Satzes: „Die algebraische Summe der Krümmun-

gen der ursprünglichen Curve und ihrer Rollcurve in zwei entsprechenden Punkten ist gleich dem reciproken Werthe der Entfernung des Punktes, der die Rollcurve beschreibt, von dem Punkte, in dem die rollende Curve die feste Gerade berührt".

O.

H. FUNCKE. Zur Theorie des Rollens. Göttingen. Rente.

J. SYLVESTER. On the successive involutes to a circle. Rep. Brit. Ass. 1869/70.

Csy.

A. CAYLEY. On evolutes and parallel curves. Quart. J. XI. 183. 1870.

J. PACZKOWSKI. Geometrische Eigenschaften des Bildes unter Wasser gelegener Curven. Pr. Gnesen. 1869.

Die Behandlung obigen Gegenstandes zeigt in mathematischer Beziehung nichts Bemerkenswerthes. Schn.

BÖSSER. Die Theorie der kaustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Pr. Eutin 1869. Kieler Schriften 1869.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. pag. 26.

H. M. JEFFERY. On the evolutes of cubic curves. Quart. J. XI. 78-82. 1870.

Die Evolute einer Curve zweiter Classe $u_2 = 0$ kann in der Form $u_2 v_2 = 16\Delta^4$ ausgedrückt werden, wenn $v_2 = 0$ die Gleichung der reciproken Curve bezeichnet. Bedeuten analog $u_3 = 0$, $v_6 = 0$ eine Curve dritter Classe und ihre reciproke Curve (welche letztere für ebene Geometrie in Punkte degenerirt), so kann die Evolute von $u_3 = 0$ in der Form geschrieben werden

$$u_3 v_6 + 16\Delta^4 . w_5 = 0,$$

wo w_5 eine Hülfscurve fünfter Classe ist.

Im Folgenden werden nun die Gleichungen entwickelt, und es wird auch die Evolute einer Curve dritter Ordnung durch ihre Gleichung gegeben. Mz.

O. Schlömilch. Ueber eine Spirale. Schlömilch Z. XIV. 162-163. 1869.

Die untersuchte Spirale ist durch die Eigenschaft definirt, dass der Krümmungshalbmesser eines jeden ihrer Punkte gleich dem Radius vector desselben Punktes ist. Die Anwendung von Polarcoordinaten führt zur Gleichung der Curve:

$$\vartheta = \theta - \gamma = \sqrt{\frac{r-a}{a}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r-a}{a}},$$

worin γ und a Integrationsconstanten sind. Da die Wurzeln mit positiven oder negativen Zeichen genommen werden können, so stellt diese Gleichung zwei Curvenzweige dar, welche gegen einander symmetrisch liegen. Die noch folgende Untersuchung erstreckt sich auf die Betrachtung der Veränderung des Polarwinkels, auf die Lage einiger Tangenten, auf die Länge des Curvenbogens s, gerechnet vom Pol bis zu irgend einem Curvenpunkte. T.

De la Gournerie. Sur la spirique à centre. Inst. I. sect. XXXVII. 93. 1869.

Es werden einige Sätze angegeben, welche den Zusammenhang behandeln, in dem eine spirische Linie, die einen Mittelpunkt besitzt, mit zwei Kegelschnitten verschiedener Gattung steht. T.

E. Marx. Beitrag zur Kenntniss der Kettenlinie. Pr. Clausthal. 1869.

W. Walton. On axes of Lug and axes of Kick. Quart. J. XI. 114-123. 1870.

A. Gleue. Analytisch-geometrische Untersuchungen. Pr. Lingen. 1869.

Eine um einen festen Punkt drehbare Gerade wird von einer festen Geraden geschnitten, und vom Durchschnittspunkt aus auf ihr ein Stück abgetragen, welches in gegebener Relation zur Abscisse und zum Strahle steht. Der Endpunkt beschreibt die Curve, von der hier die Rede ist. Ihre Gleichung wird für 13 verschiedene Bestimmungen entwickelt. Dann folgt die Be-

stimmung der Tangente, Krümmung, Evolute u. s. w., ferner die Quadratur der Curve und die Complanation und Kubatur der von ihr erzeugten Rotationsfläche, für den Fall, wo das abgetragene Stück der Abscisse des Durchschnittspunktes auf der festen Geraden gleich ist. H.

P. SERRET. Sur un théorème de Ferrers. Nouv. Ann. (2) IX. 73-84. 1870.

Geometrischer und analytischer Beweis des Satzes, dass die Enveloppe der Geraden, welche die Projectionen eines beliebigen Kreispunktes auf die Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks verbindet, eine Hypocycloide vom Modul $\frac{1}{3}$ ist. Diese Enveloppe ist identisch mit der Enveloppe der Axen derjenigen Parabeln, welche man in ein Dreieck einschreiben kann, das dem ersteren parallel und umschrieben ist. No.

F. RUMMER. Untersuchungen einer neuen krummen Linie. Pr. Heidelberg. 1869.

K.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

O. HESSE. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes etc. 2. Aufl. Leipzig 1869.

Die neue Auflage des allgemein bekannten und wegen seiner mustergültigen Darstellung geschätzten Lehrbuches hat, abgesehen von Zusätzen, welche durch die einschlägigen Arbeiten der letzten 8 Jahre bedingt waren, durch zwei Vorlesungen über analytische Mechanik dankenswerthe Erweiterungen erfahren. Die erste dieser Vorlesungen betrifft die Bestimmung der Trägheits-Axen, die zweite die Planetenbewegung. K.

E. Beltrami. Théorie fondamentale des espaces de courbure constante. Trad. par J. Hoüel. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 347-377. 1869.

Siehe Fortschr. d. M. I. p. 208. Mz.

Laguerre. Emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace. Inst. 1 sect. XXXVIII. 155-160. 1870.

Der Verfasser giebt zunächst einige Definitionen, die sich auf imaginäre Elemente des Raumes beziehen. Alle Kreise derselben Ebene gehen durch zwei feste imaginäre Punkte im Unendlichen. Jede Gerade dieser Ebene, die einen dieser Punkte enthält, heisst isotrope Gerade. Alle solche Geraden bilden zwei Systeme paralleler Geraden; die des einen Systems gehen durch den einen imaginären Kreispunkt im Unendlichen, die des andern Systemes durch den anderen. Durch jeden Punkt der Ebene gehen 2 isotrope Gerade von verschiedenen Systemen, die zusammen einen Kreis mit dem Radius Null bilden. In einer reellen Ebene enthält jede isotrope Gerade nur einen reellen Punkt, nämlich denjenigen, in welchem sie ihre conjugirte isotrope Gerade schneidet. Legt man durch einen festen (reellen oder imaginären) Punkt verschiedene Ebenen, so enthält jede dieser Ebenen 2 durch diesen Punkt gehende isotrope Gerade. Alle diese Geraden liegen auf einem Kegel 2ten Grades, den man auch als Kugel mit dem Radius Null ansehen kann; ein solcher Kegel soll isotroper Kegel heissen. Alle isotropen Kegel treffen die unendlich ferne Ebene in demselben Kegelschnitt (der der imaginäre unendlich ferne Kreis aller Kugeln des Raumes ist und Ombilicale genannt wird). Durch eine Gerade kann man im Allgemeinen 2 Tangentenebenen an die Ombilicale legen; diese heissen isotrope Ebenen. Ein solches Ebenenpaar wird durch eine zu jener Geraden senkrechte Ebene in zwei isotropen Geraden geschnitten. Durch eine isotrope Gerade kann man nur eine isotrope Ebene legen. Sind nun a und a' 2 imaginäre conjugirte Punkte des Raumes (d.h. solche, deren Coordinaten auf ein reelles Axensystem bezogen imaginär conjugirte Grössen sind), so geht durch jeden dieser beiden Punkte ein isotroper Kegel; beide Kegel schneiden sich in einem reellen Kreise A, dessen

Ebene senkrecht zu der reellen Geraden aa' und zwar durch deren Mitte O (gleichzeitig Centrum von A) geht, und dessen Radius $= R$ ist, wenn $Oa = R\sqrt{-1}$ angenommen wird. Beide Punkte a und a' zusammen bestimmen den Kreis A vollständig; umgekehrt sind die Punkte als Spitzen der beiden isotropen Kegel, die durch A gehen, bestimmt, wenn A gegeben ist. Es werden nun noch die Punkte a und a' von einander unterschieden je nach dem Sinne, in welchem man sich den Kreis A durchlaufen denkt.

Der Verfasser giebt nun eine Anwendung dieser Principien auf anallagmatische Flächen. (Ueber ihre Definition siehe Fortschr. d. M. I. p. 300) Nach dem Angegebenen lassen sie sich auch so definiren: Bewegt sich eine Ebene so, dass sie stets eine feste Oberfläche 2ten Grades berührt, so beschreiben die beiden Punkte, welche dem Durchschnittskreis der Ebene mit einer festen Kugel als Spitzen isotroper Kegel durch den Kreis zugeordnet sind, eine anallagmatische Fläche. Die feste Kugel S und die feste Oberfläche 2ten Grades A schneiden sich in einer Raumcurve 4ten Grades F, welche eine der Focalen der anallagmatischen Fläche ist; diese besitzt ausser F noch 4 andere Focalen. In jedem Punkte m der anallagmatischen Fläche geht die Normale durch den Punkt, in welchem die Ebene des zu m zugeordneten Kreises die Fläche A berührt. Es folgen nun viele Eigenschaften der anallagmatischen Fläche, die sich meistens auf ihre Kreisschnitte beziehen. Diese Flächen lassen sich auch als Ort von Kreisen definiren; denn während die variabele Tangentenebene stets eine bestimmte Gerade der Fläche A enthält, liegen die beiden Punkte der anallagmatischen Fläche, welche durch diese Ebene, wie oben angegeben, bestimmt werden, auf einem Kreise.

Am Schluss findet sich noch eine allgemeine Betrachtung geometrischer Raumcurven. Mz.

E. Weyr. Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. Leipzig 1869.

Sind a und b zwei feste Elemente eines Gebildes, und ist x ein bewegliches Element desselben, so möge ξ bei einer Punkt-

reihe den Quotienten $\frac{ax}{bx}$, bei einem Strahlenbüschel den Werth $\frac{\sin \widehat{ax}}{\sin \widehat{bx}}$ vorstellen. Zwei Gebilde G und G', deren Elementen bezüglich die Theilverhältnisse ξ und ξ' entsprechen, treten dadurch in eine Beziehung zu einander, dass die Werthe ξ und ξ' einer willkürlichen Gleichung $f(\xi, \xi') = 0$ unterworfen werden. Die projectivische Beziehung ist demgemäss durch eine Verwandtschaftsgleichung auszudrücken, welche in Bezug auf ξ und ξ' linear ist, also durch eine Gleichung von der Form

$$\xi\xi' + a\xi + a'\xi' + b = 0,$$

wo a, a', b beliebige Constante bezeichnen. Eine Beziehung, welche dadurch charakterisirt ist, dass einem Elemente in G zwei Elemente in G' entsprechen, aber einem Element in G' nur ein Element in G, ist repräsentirt durch die Gleichung

$$\xi'(a_0\xi''^2 + a_1\xi'' + a_2) + (b_0\xi''^2 + b_1\xi'' + b_2) = 0.$$

Diese so definirte Beziehung zwischen zwei geometrischen Elementargebilden macht der Verf. zum Gegenstand eingehender Untersuchung; diese umfasst den ersten Theil, welchen er „Theorie ein- zwei-deutiger geometrischer Elementargebilde" betitelt. Auf diese Theorie gründet sich die Behandlung der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, und der Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente, welche naturgemäss als Erzeugnisse ein- zwei-deutiger Elementargebilde auftreten. Wer sich für die besondere Natur der Curven C_4^3, C_3^4 und C_3^3 interessirt, wird eine Fülle anziehender Eigenschaften und zahlreiche Lösungen von Constructionsaufgaben, welche sich auf sie beziehen, im zweiten Theile des Werkes vorfinden. Die Behandlung des Stoffs ist ungemein ausführlich, der vorliegende Band umfasst 156 Seiten und enthält 5 sehr sauber ausgeführte Figurentafeln. Schn.

E. Weyr. Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. Leipzig 1870.

Das vorliegende Werk ist eine Fortsetzung der 1869 vom Verf. veröffentlichten „Theorie der mehrdeutigen geometrischen

Elementargebilde". Indem er zu den ein- zwei-deutigen Punktreihen und Strahlenbüscheln die ein- zwei-deutigen Ebenenbüschel fügt und ihre Erzeugnisse bei willkürlicher Lage im Raume betrachtet, gelangt er zu den Regelflächen dritter Ordnung, über welche Cremona in der Abhandlung „Sulle superficie gobbe del terz' ordine" (Atti del R. Istituto Lombardo II. 1861) bereits so ausgezeichnete Untersuchungen veröffentlicht hat. Es ist nämlich der Durchschnitt entsprechender Elemente zweier ein- zwei-deutiger Ebenenbüschel eine Regelfläche dritter Ordnung; sie ist identisch mit dem Erzeugniss zweier ein- zwei-deutiger Punktreihen, und andererseits lässt sich jede Regelfläche dritter Ordnung als ein Erzeugniss zwei ein- zwei-deutiger Ebenenbüschel oder Punktreihen auffassen. Aus der Erzeugungsart dieser Regelflächen folgen unmittelbar ihre wichtigsten Eigenschaften, denen sich im Verlaufe der Untersuchungen viele andere anschliessen, auf die im Einzelnen einzugehen hier zu weit führen würde.

Als Anhang sind vier Noten beigegeben *A, B, C, D*. Die Note *A* behandelt die Construction algebraischer Ausdrücke des dritten Grades. Der Verf. stellt sich nämlich die Aufgabe: „Man soll die Function $\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ aus sechs ihrer Werthe, welche gegebenen sechs Werthen der Variabeln x entsprechen, construiren, d. h. man soll zu jedem siebenten Werthe der Variabeln den entsprechenden Functionswerth graphisch finden". Wie man leicht erkennt, hat die Curve $y=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ einen Doppelpunkt im Unendlichen in der Richtung der Ordinatenaxe, dessen beide Tangenten die Abscissenaxe in den Wurzeln der Gleichung $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ schneiden; es ist mithin die Aufgabe zurückgeführt auf die Construction einer Curve dritter Ordnung aus dem Doppelpunkte und sechs weiteren Punkten, eine Aufgabe, die wie der Verf. in Theil II. gezeigt hat, sich mittelst des Lineals allein durchführen lässt. Andere speciellere Functionsformen werden in der Note *A* in ähnlicher Weise behandelt.

Die Note *B* enthält die Lösung eines Theils der für das Jahr 1870 von der königl. Preuss. Academie der Wissenschaften

gestellten Preisfrage, indem in ihr ein geometrisches Verfahren enthalten ist, nach welchem man die Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungshalbmesser beliebiger Flächen construiren kann, wenn man die Krümmungsradien dreier Schnitte kennt. Aus der bekannten Relation

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

ergiebt sich, wenn $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt wird,

$$R(R_2 + R_1 \operatorname{tg}^2\varphi) - R_1 R_2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 0.$$

Die Gleichung zeigt, dass jedem durch φ bestimmten Normalschnitt auf der Normale ein Krümmungsmittelpunkt, jedem Punkt der Normale aber zwei Normalschnitte entsprechen, denen jener Punkt als Krümmungsmittelpunkt zugehört. Die Reihe der Krümmungsmittelpunkte und des Büschels der Normalschnitte stehen demnach in ein- zwei-deutiger Verwandtschaft. Im Besonderen entsprechen dem Punkt der Fläche, von dem die Normale ausgeht, die beiden Normalschnitte, welche den imaginären Kugelkreis berühren; denn für $R = 0$ wird obige Gleichung befriedigt, wenn $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 0$ oder $\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-1}$ ist. Sind demnach drei Normalschnitte mit ihren Krümmungsmittelpunkten gegeben, so sind in Rücksicht auf die letzte Bemerkung von den beiden ein- zwei-deutigen Gebilden fünf einander entsprechende Elemente bekannt, und diese reichen nach den in Theil I. gegebenen Entwickelungen aus, die übrigen entsprechenden Elemente zu bestimmen. Um die Bestimmung durchzuführen, seien A_1, B_1, C_1 drei Tangenten der Fläche, welche vom Fusspunkt o der Normale ausgehend drei Normalschnitte in jenem Punkte bestimmen; den Normalschnitten entsprechen auf der Normale die Krümmungsmittelpunkte a, b, c Man denke die Normale N so in die Tangentialebene gelegt, dass a auf A_1 zu liegen kommt, ohne dass N und A_1 sich decken, und projicire die Punktreihe o, a, b, c aus einem beliebigen Punkt des Strahles A_1. Das so entstehende Büschel sei alsdann bezeichnet mit (O, A, B, C). Dieses steht in ein- zwei-deutiger Beziehung mit dem in o vorhandenen Büschel $(A_1, B_1, C_1, \ldots)$, und zwar decken sich die entsprechenden Strahlen A und A_1, während dem Strahl O in dem

eindeutigen Büschel die beiden Strahlen in dem zweideutigen entsprechen, welche von o nach den imaginären Kreispunkten laufen. Der Durchschnitt der entsprechenden Elemente beider Büschel ist ausser der Geraden, in welcher A und A_1 sich decken, ein Kegelschnitt, welcher durch den Punkt o geht, den Durchschnittspunkt von B und B_1, von C und C_1 enthält und ausserdem den Strahl O in den Punkten schneidet, in welchen die von o nach den imaginären Kreispunkten laufenden beiden Strahlen ihn treffen; letztere stellen sich aber dar als die Doppelpunkte jener Involution, in welcher O von der rechtwinkligen Strahleninvolution getroffen wird, die o zum Scheitel hat. Der Kegelschnitt ist also bestimmt durch 3 reelle und 2 imaginäre Punkte, oder anders ausgedrückt, durch drei reelle Punkte und eine bestimmte Involution, die er auf der Geraden O veranlasst; die Construction eines solchen Kegelschnitts ist aber nach bekannten Methoden möglich. Von dem Centrum des eindeutigen Büschels laufen zwei Tangenten an diesen Kegelschnitt, diese schneiden die in der Tangentialebene liegende Normale N in den zwei Hauptkrümmungsmittelpunkten, und die von o nach den Berührungspunkten der Tangenten laufenden Strahlen geben die Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche an. Mit Berücksichtigung des Theorems von Meunier lassen sich also die Hauptkrümmungsrichtungen und die Hauptkrümmungsmittelpunkte construiren, sobald drei beliebige Schnitte mit ihren Krümmungen bekannt sind.

Note C behandelt die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte als Erzeugniss krummer projectivischer Gebilde.

Note D enthält Betrachtungen über eine Raumcollineation, welche der Verf. „die windschiefe Raumcollineation“ nennt. Die Gesammtheit aller Geraden, welche zwei windschiefe Gerade M und N schneiden, bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe. Jedem Punkt a im Raum gehört eine Gerade zu, welche M und N in zwei Punkten m und n schneidet; ein Punkt a' auf dieser Geraden heisst nun nach dem Verf. Bild des Punktes a, wenn das Doppelverhältniss $(mnaa') = \varkappa$ ist, wo $\varkappa$, der sogenannte Projectionscoefficient, irgend eine constante Grösse bezeichnet. Das Verwandtschaftsverhältniss zweier derart auf

einander bezogener Räume ist eine besondere Form der Collineation. Die Untersuchungen schliessen mit verschiedenen Betrachtungen über die Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung, auf welche der Verf. durch jene Collineation geführt wird.

Schn.

A. Ribaucour. Sur les surfaces orthogonales. Inst. I. sect. XXXVII. 29-30. 222-223. 1869.

Wenn die Mittelpunkte einer Reihe von Kugeln auf einer Oberfläche liegen, dann sind im Allgemeinen die Berührungssehnen (liegend zwischen den Berührungspunkten jeder der Kugeln mit der Einhüllenden aller) nur dann normal zu Oberflächen, wenn eine bestimmte Bedingungsgleichung erfüllt ist. Es werden nun weiter die Bedingungen erörtert, welche erfüllt sein müssen, wenn diese zu den Berührungssehnen normalen Oberflächen einen Theil eines dreifach orthogonalen Systems bilden sollen.

Sind Kreise zu drei Oberflächen normal, dann sind sie es auch zu unendlich vielen andern, welche einen Theil eines dreifach orthogonalen Systems bilden; solche orthogonale Systeme werden cyklische genannt. Die cyklischen Systeme und die Transformation beliebiger orthogonaler Systeme bildet den Gegenstand des letzten Theiles der Note.

T.

E. Catalan. Sur les surfaces orthogonales. Inst. 1 sect. XXXVII. 61. 1869.

In dieser Note ist zunächst der scharfe Unterschied erwähnt, der zwischen einem von Darboux (Ann. de l'Èc. Norm. II. 59) und einem von Catalan (Mémoires couronnés de l'Ac. de Belg. XXXII, 15) gegebenen Satze besteht, welcher die dreifach orthogonalen Systeme betrifft. Nach Darboux kann eine beliebige Fläche nicht einen Theil eines dreifach orthogonalen Systemes bilden, während nach Catalan jede Oberfläche einen Theil eines solchen Systems bildet. Daran schliessen sich noch Mittheilungen über Gleichungen orthogonaler Systeme und Bemerkungen über demnächst zu veröffentlichende Untersuchungen über Wellenflächen.

T.

A. Enneper. Ueber eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen. Gött. Nachr. 1870. 70-82.

Der Verfasser betrachtet zunächst zwei Parallelflächen S und S_1 und zu einem Punkte P von S den correspondirenden P_1 von S_1. P und P_1 haben dann dieselbe Normale, und den Krümmungslinien der Fläche S entsprechen auf S_1 ebenfalls Krümmungslinien. Die Erweiterung ist nun folgende: Zwei Flächen S und S_1 sollen so zu einander in Beziehung stehen, dass die Normalen in zwei correspondirenden Punkten P und P_1 parallel sind, und den Krümmungslinien der Fläche S ebenfalls Krümmungslinien der Fläche S_1 entsprechen. Bezeichnet man durch t die Projection der Distanz der beiden Punkte P und P_1 auf eine der parallelen Normalen in diesen Punkten zu den Flächen S und S_1, so ist t durch eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt. Einer gegebenen Fläche S entsprechen unendlich viele Flächen S_1, welche alle die Eigenschaft haben, dass in zwei Punkten, deren Normalen parallel sind, das Verhältniss des Krümmungshalbmessers zum Torsionsradius einer Krümmungslinie constant ist. Hat die Fläche S ein System von Krümmungslinien plan, so ist dieses auch für alle Flächen S_1 der Fall. Ferner: Lässt sich die Fläche S ohne Faltung oder Zerreissung so biegen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so lassen sich die Flächen S_1 auf gleiche Art deformiren. Nimmt man eine Fläche S von der angegebenen Eigenschaft als bekannt an, so hängt die Bestimmung einer Fläche S_1 von einer linearen partiellen Differentialgleichung ab. Es folgen nun die hierauf bezüglichen analytischen Rechnungen.

Mz.

A. Ribaucour. Sur la théorie des surfaces. Inst. 1 sect. XXXVIII. 60-61; 141-142; 236-237. 1870.

Die Untersuchung des zweiten Systems der Krümmungslinien der Oberflächen, auf denen sich das erste System aus Kreisen zusammensetzt, kann auf die Untersuchung orthogonaler Trajectorien einer Reihe von Kreisen zurückgebracht werden, die in einer Ebene gezeichnet sind. Allgemein lässt sich diese Aufgabe nicht lösen, aber die Kenntniss einer Lösung genügt,

um beliebig viel andere zu bestimmen. Daran schliesst sich dann ein Beweis eines Satzes von Bonnet, dass die Oberflächen, deren beide Systeme von Krümmungslinien sich aus geodätischen Kreisen zusammensetzen, die Einhüllenden von Kugeln sind, welche durch zwei feste Punkte gehen. —

Ist auf einer Oberfläche eine Curve C gezeichnet und versteht man unter N die Länge der Normale in einem Punkte P der Curve C, gerechnet von P bis zum Durchschnittspunkte mit der im benachbarten Punkte construirten, dann muss diese Länge N einer Differentialgleichung genügen, welche zeigt, dass für Oberflächen zweiten Grades N lediglich von der Lage des Punktes P abhängig ist; und zwar sind die Oberflächen zweiten Grades die einzigen, für welche N diese Eigenschaft hat. Die Oberflächen höherer Grade sind so beschaffen, dass N nur für drei Curvenfamilien die Eigenschaft hat, eine Function des angenommenen Punktes zu sein. Es werden die Resultate für den speciellen Fall gegeben, dass N constant ist. —

Die Normalen einer Fläche können immer als Berührungssehnen einer Gruppe von Kugeln betrachtet werden, die ihre Mittelpunkte auf einer gegebenen Kugel haben. Man kann daher als tangentielle Coordinaten einer Oberfläche den Abstand p des Anfangspunktes O von der Tangentialebene und die sphärischen Coordinaten u und v des Punktes nehmen, in dem das Loth zur Tangentialebene die Kugel schneidet, welche mit dem Radius 1 um den Punkt O als Mittelpunkt beschrieben worden ist. Die allgemeinen Formeln, welche sich aus diesem Versuch einer Theorie der krummen Oberflächen ergeben, werden angeführt. T.

J. WELSCH. Démonstration élémentaire d'un théorème de Monge. Nouv. Ann. (2) IX. 123-124 1870. Inst. 1 sect. XXXVIII. 28. 1870.

Die Kugel ist die einzige Oberfläche, deren sämmtliche Punkte Nabelpunkte sind oder auf welcher jede beliebige Linie eine Krümmungslinie ist. Die Normalen der Oberfläche in den sämmtlichen Punkten einer Krümmungscurve bilden eine abwickelbare Fläche; soll die Schnittcurve eines Normalschnittes in einem Punkte A der Oberfläche eine Krümmungscurve sein,

so wird die zugehörige abwickelbare Fläche die Ebene des Schnittes, also muss die Normale der Oberfläche in irgend einem anderen Punkt B der Schnittcurve die Normale in A schneiden. Durch irgend einen dritten Punkt C ausserhalb dieser Ebene geht sowohl eine Normalebene von A als eine von B, also muss die Normale in C sowohl die in A als die in B schneiden, also müssen alle Normalen sich in einem Punkte schneiden.

Schz.

L. Painvin. Courbure en un point multiple d'une surface. Borchardt J. LXXII. 340-349. 1870.

Legt man durch Punkt O, der ein p-facher Punkt einer Oberfläche S sein soll, eine die Oberfläche schneidende Ebene, dann existirt für eine jede der möglichen Lagen dieser Ebene ein auf der Oberfläche gelegener Curvenzweig, der durch den Punkt O geht. Jeder dieser Curvenzweige hat in Bezug auf den Punkt O einen Krümmungskreis und einen Krümmungsmittelpunkt. In der vorliegenden Arbeit wird nun der geometrische Ort dieser Krümmungsmittelpunkte bestimmt.

Zunächst wird die veränderliche Lage der schneidenden Ebene dadurch eingeschränkt, dass angenommen wird, sie drehe sich um eine feste Axe G. Diese feste Axe sei eine der Erzeugenden des Tangentialkegels in O. Für diesen Fall ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte ein bestimmter Kreis. Gehört die Gerade G zu den $p(p+1)$ Inflexionstangenten im Punkte O der Oberfläche, dann wird der Krümmungsradius unendlich und der Ort der Krümmungsmittelpunkte degenerirt in eine bestimmte gerade Linie.

Dreht sich die schneidende Ebene in beliebiger Weise um den vielfachen Punkt O, dann ist der Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise in O eine Oberfläche Γ der Ordnung $p(p+3)$; der Punkt O wird für diese Fläche Γ ein vielfacher Punkt der Ordnung $p(p+2)$; der Kegel der asymptotischen Richtungen dieser Oberfläche besteht aus p imaginären Kegeln, deren Gleichung: $x^2+y^2+z^2=0$ ist, und aus $p(p+1)$ Ebenen, die beziehungsweise senkrecht zu den Inflexionstangenten der Oberfläche S im Punkte O sind. Nimmt man den Punkt O zum Pol

einer Transformation durch reciproke Leitstrahlen, dann ist die Transformirte der Fläche Γ eine Oberfläche der Ordnung $p(p+2)$, und für diese Fläche ist Punkt O ein vielfacher Punkt der Ordnung $p(p+1)$. Alle die Ebenen, welche durch O gehen, und die Oberfläche S in solchen Curven schneiden, für welche einer der Krümmungsradien in O eine gegebene Länge hat, hüllen einen Kegel der Classe $2p(p+2)$ ein.

Diese Resultate, welche unter der Bedingung erhalten sind, dass der Punkt O ganz allgemein vielfach sei, erfahren Aenderungen, wenn man annimmt, dass der vielfache Punkt O gewisse specielle Bedingungen erfülle. Die bisher angewandten Methoden sind auch in diesen besonderen Fällen anwendbar. Als Beispiel für diesen Fall wird der Doppelpunkt mit seinen Specialitäten behandelt. T.

L. Painvin. Courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface. C. R. LXVIII. 131-135 1869.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. A. p. 463.

Laguerre. Propriétés des courbes tracées sur une surface quelconque. Inst. 1 sect. XXXVIII. 77. 1870.

Man ziehe auf irgend einer Fläche eine Curve (Directrix), trage auf den Normalen in den Punkten der Directrix Längen ab, die Functionen der Lage des zugehörigen Punktes auf der Directrix sind. Sind M, M' zwei solche unendlich nahe Punkte, N und N' die zugehörigen Normalen, V und V' deren Winkel mit MM', so giebt der Ausdruck

$$MM'\{N\cos V + N'\cos V'\}$$

nach steigenden Potenzen von ds entwickelt:

$$K\,ds^3 + \tfrac{1}{8}\frac{dK}{ds}ds^4 + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } ds.$$

Ist dieser Ausdruck also von einer höheren als der dritten Ordnung (d. h. ist $K=0$), so ist er wenigstens von der fünften. Damit $K=0$ sei, muss man haben:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi} - \frac{d\sin\varpi}{\sin\varpi} + \frac{1}{3}\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

(Ueber η, ϖ und ϱ siehe: Laguerre, Sur une formule relative aux

courbes tracées sur les surfaces du second ordre. Abschn. IX. Cap. 3 C., wo das Integral dieser Gleichung steht). Es werden dann einige besondere Fälle betrachtet. Mz.

E. Roger. Note sur les courbures des surfaces. C. R. LXVIII. 366. 1869.

Sind A und B die Krümmungsradien der Hauptschnitte einer Oberfläche in einem Punkte P, so müsste man die Krümmung der Fläche entweder durch $\frac{1}{AB}$ oder $\frac{V}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ ausdrücken. In beiden Fällen kann die Fläche im gewöhnlichen Sinne des Wortes in P gekrümmt sein, während die mathematische Krümmung $=0$ wird. Herr Roger schlägt deshalb vor, als Maass der Krümmung

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\mu}{l\gamma^2} = \frac{3}{8}\pi\left(\frac{1}{A^2}+\frac{2}{3AB}+\frac{1}{B^2}\right)$$

anzusehen, wenn $\frac{1}{\gamma}$ die Krümmung des Normalschnitts ist, welcher mit einem Hauptschnitt den Winkel μ bildet. Denkt man nämlich um P ein unendlich kleines Flächenstück abgegrenzt und zieht in demselben von P nach der Peripherie unzählig viele Radien l, die mit einer der Krümmungslinien den Winkel μ bilden, so erhält man aus den Grössen der Elemente l die Grösse des Flächenschnittes um P nach der Formel

$$\frac{1}{2}\int_1^{2\pi} l^2\,d\mu.$$

In derselben Weise, wie so die Fläche um P durch die Länge der Elemente l bestimmt wird, giebt $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\gamma^2}d\mu$ die Krümmung der Fläche durch die Krümmung $\frac{1}{\gamma}$ der Normalschnitte.

K.

E. Roger. Note sur quelques propriétés des surfaces courbes. C. R. LXIX. 1071. 1869.

Man denke durch irgend einen Punkt P einer continuirlichen Fläche alle Normalschnitte gelegt und auf denselben von P aus gleiche, unendlich kleine Längen l abgetragen, ferner denke man

die Punkte auf der Fläche bestimmt, deren geradlinige Entfernung von P gleich l ist, und projicire die beiden entstandenen Curven auf die Tangenten-Ebene in P, dann spielen diese Projectionen Σ end Σ' für die oben definirte Krümmung der Fläche eine analoge Rolle, wie die Indicatrix von Dupin für die Krümmung der Normalschnitte. Sind L und L' die Umfänge, S und S' die Inhalte von Σ und Σ', ist $L_0 = l^2\pi$, so bestehen die Gleichungen:

$$L_0 - 4L' + 3L = 0, \qquad S_0 - 4S' + 3S = 0.$$

Für denselben Werth von l sind die Grössen $L_0 - L$, $S_0 - S$, $L_0 - L'$, $S_0 - S'$ der Krümmung

$$\frac{3\pi}{8}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{2}{3AB} + \frac{1}{B^2}\right)$$

proportional. K.

M. Jeffery. On centres of curves or surfaces, and their polar and pole curves or surfaces. Quart. J. X. 171-185. 1869.

Herr Salmon giebt in seinen Higher Plane Curves die Elemente der Theorie der Polaren eines Punktes (Pole Curves nach Cayley's Bezeichnung) in Bezug auf eine Fundamentalcurve von gegebener Ordnung, und im Anhange wird die analoge Theorie für Polarcurven einer Geraden in Bezug auf eine Fundamentalcurve gegebener Classe (Polarcurven) angedeutet.

Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, die Dualität beider Curvenarten darzustellen, indem die fundamentalen Sätze für die Polarcurven gegebener Geraden denen der Polarcurve für Punkte gegenübergestellt werden.

Die meisten der Sätze werden ebenfalls für sphärische Curven und für Flächen ausgesprochen.

Besonders werden die Mittelpunkte und Durchmesser der Curven, als Polare der Punkte und Linien im Unendlichen, betrachtet. He.

P. Frost. On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an Umbilicus. Quart. J. X. 78-86. 1869.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, einige von Hamilton

in seinen Quaternions aufgestellten Sätze über Umbilici mittelst gewöhnlicher Analysis zu beweisen. Er giebt die folgenden Sätze.

Durch einen Umbilicus gehen drei Zweige von Krümmungslinien.

Jede durch einen Umbilicus gehende Erzeugende einer Fläche zweiter Ordnung enthält drei Umbilici.

Diese Erzeugenden sind Krümmungslinien, zufolge der geometrischen Definition, dass aufeinander folgende Normalen sich schneiden. Sie sind ferner die Orte der Punkte der Fläche, für welche die beiden confocalen Oberflächen zusammenfallen.

Um die allgemeine Theorie der Umbilici zu beleuchten, untersucht der Verfasser den Lauf der Krümmungslinien in der Nähe eines Umbilicus in einer allgemeineren Fläche höherer Ordnung und erläutert denselben durch Zeichnung.

He.

A. Cayley. Note on Mr. Frost's Paper. On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an Umbilicus. Quart. J. X. 111-113. 1869.

Der Verfasser bemerkt, dass die Erzeugenden durch einen Umbilicus einer Fläche zweiter Ordnung nicht als eigentliche Krümmungscurven der Fläche zu betrachten sind. Die Krümmungscurven sind durch das vollständige Integral einer Differentialgleichung bestimmt, während die Erzeugenden durch den Umbilicus einer besonderen Lösung angehören.

Für eine Oberfläche im Allgemeinen wird die Integrationsconstante für die durch einen gegebenen Punkt der Fläche gehenden Krümmungscurven durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Für einen Umbilicus werden die Wurzeln dieser Gleichung einander gleich. Es geht durch einen Umbilicus daher nur eine einzige Krümmungscurve. Diese hat aber hier drei Zweige, deren Richtungen, $\frac{dy}{dx}$, durch eine cubische Gleichung bestimmt werden. Dies schliesst den Fall nicht aus, dass die betreffende Curve in drei zerfällt, wie das z. B. bei der Fläche $xyz = 1$ der Fall ist.

He.

A. Transon. Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces. Nouv. Ann. (2) IX. 193-198. Inst I. sect. XXXVIII. 125. 1870.

Ein Kegelschnitt, der mit einer Oberfläche in einem ihrer Punkte eine Berührung der fünften Ordnung eingeht, also 6 benachbarte Punkte mit der Oberfläche gemein hat, wird ein übermässig osculirender Kegelschnitt (conique surosculatrice) der Fläche genannt. Die entwickelten Gesetze beziehen sich auf die Anzahl der übermässig osculirenden Kegelschnitte in einem Punkte der Fläche, und zwar für solche Fälle, in denen alle diese Kegelschnitte noch einer besonderen Bedingung genügen. Denn geschieht diese besondere Bestimmung nicht, so erhält man eine unendlich grosse Anzahl von Kegelschnitten.

Die gewonnenen Resultate sind folgende:

Sollen die übermässig osculirenden Kegelschnitte (und zwar zunächst nur Ellipsen und Hyperbeln) eine durch den gegebenen Punkt der Oberfläche gehende Gerade, die aber nicht Tangente der Fläche sein darf, enthalten, dann existiren neun übermässig osculirende Kegelschnitte; wenn die Gerade aber Tangente ist, nur deren drei. Der Fall der übermässig osculirenden Kreise und Parabeln wird am Schlusse besonders erörtert (Sur la courbure des lignes et des surfaces, gelesen in der Sitzung der „Académie des Sciences“ am 4. Mai 1840; Liouville J. 1841).

T.

Spottiswoode. Théorème concernant la théorie des surfaces. C. R. LXX. 651. 1870.

Herr Chasles macht die Mittheilung, dass Herr Spottiswoode gefunden, dass sich auf einer Oberfläche in jedem Punkte 10 (reelle oder imaginäre) Kegelschnitte zeichnen lassen, welche eine Berührung 5ter Ordnung oder 6 Punkte mit der Oberfläche gemein haben.

M.

U. Dini. Ricerche sopra la teorica delle superficie. Atti dei XL. Firenze 1869.

Die Abhandlung enthält weitere Anwendungen einiger Formeln für die Krümmungslinien von Oberflächen, welche der

Verf. in seiner Abhandlung: „Sopra alcuni punti della teoria delle superficie", (publicirt im vorher gehenden Bande dieser Atti) abgeleitet hatte. Es werden zuerst einige allgemeine Betrachtungen über die Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn Weingarten bezüglich einer gewissen Classe von Oberflächen gemacht, und dann der gewonnene Satz zur Untersuchung der windschiefen Oberflächen benutzt, deren Generatricen bei der Deformation der Oberflächen auf Krümmungslinien der transformirten oder cylindrischen Schraubenfläche reducirt werden können. Der Verfasser bestimmt dann auch die Flächen constanter Krümmung, welche ein System ebener Krümmungslinien haben. Zuletzt gründet der Verfasser auf Betrachtungen, die auf einem allgemeinen Princip beruhen, und auf einige Formeln seine Systeme von Kreisen der Kugeln (welche er durch seine vorhergehenden Untersuchungen hat festellen wollen) und sucht in einfacher Weise die Gleichung der Oberflächen zu bestimmen, die ein System von ebenen Krümmungslinien haben und die ein System von geodätischen Linien, die cylindrische Schraubenlinien sind, haben, und löst einige verwandte Probleme. Jg. (O.)

W. Firth. On the measure of curvature of a surface referred to polar coordinates. Messenger V. 66-76. 1869.

In dieser Abhandlung giebt der Verfasser Ausdrücke für die Krümmung einer Fläche in Polarcoordinaten,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta.$$

Bezeichnen R und R' die Hauptkrümmungscoordinaten eines Punktes der Fläche, so hat man

$$\frac{1}{RR'} = \frac{M}{N},\quad \text{und}\quad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'} = \frac{M'}{N},$$

wo

$$M = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial\theta^2} - r - 2\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2} - r\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial r}{\partial\theta}\right.$$
$$\left.-2\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial^2 r}{\partial\theta\,\partial\varphi} - 2\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial r}{\partial\varphi} - \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$N = r^4\sin^2\theta\left\{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^2,$$

$$M' = \begin{cases} \left(r^2 \sin\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\theta^2} - r - 2\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right) \\ -2\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\theta\,\partial\varphi} - 2\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial\varphi} - \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right) \\ +\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2} - r\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial r}{\partial\theta} - 2\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right). \end{cases}$$

He.

L. Painvin. Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. C. R. LXVIII. 796. 1869.

Die Raumcurve wird durch zwei Gleichungen von folgender Form gegeben:

$$(\varDelta) \quad \begin{cases} S = \varphi_p(x,y,z) + \varphi_{p+1}(x,y,z) + \varphi_{p+2}(x,y,z) + \cdots = 0, \\ T = \psi_q(x,y,z) + \psi_{q+1}(x,y,z) + \psi_{q+2}(x,y,z) + \cdots = 0. \end{cases}$$

Haben nun φ_p und ψ_q keinen rationalen Factor gemein, so ist der Coordinatenanfang O ein vielfacher Punkt von der Ordnung pq für die Curve $\varDelta$; es gehen pq (reelle oder imaginäre) Zweige durch diesen Punkt, und die Tangenten sind durch die beiden Gleichungen gegeben:

$$\varphi_p(\alpha,\beta,\gamma) = 0, \qquad \psi_q(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Irgend eine Ebene, welche durch eine dieser Tangenten geht trifft die Curve in $(pq+1)$ mit O coincidirenden Punkten, die Krümmungsebene durch eine dieser Tangenten in $(pq+2)$ Punkten. Die Gleichung der letzteren, so wie der Krümmungsradius werden angegeben. Dann wird der Fall behandelt, in welchem φ_p und ψ_q einen rationalen Factor gemein haben. Mz.

E. Eckardt. Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen. Pr. Reichenbach 1870.

Ph. Gilbert. Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. Mém. de Belg. in 4°. XXXVII. 1869.

Aoust. Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. Paris 1869.

G. BATTAGLINI. Intorno ai sistemi di rette di 2^0 grado. Battaglini G. VII. 55. 1869. Mz.

A. MANNHEIM. Droite polaire, axe de courbure. Inst. 1 sect. XXXVIII. 190. 1870.

Zwei Normalebenen in zwei benachbarten Punkten einer Curve schneiden sich in einer Geraden, welche Monge droite polaire genannt hat; Herr Mannheim wählt dafür den Ausdruck axe de courbure und spricht das Theorem von Meusnier in folgender Form aus: Wenn man auf einer Oberfläche Curven zieht, welche sich unter einander im Punkte *a* derselben berühren, so schneiden sich die Krümmungsaxen in einem Punkte. In ähnlicher Weise lassen sich an einer abwickelbaren Fläche zwei Normalebenen denken, welche durch zwei aufeinander folgende erzeugende Geraden dieser Fläche geführt sind; der Schnitt beider Normalebenen ist die Krümmungsaxe der abwickelbaren Fläche. Mit Einführung dieses Begriffs spricht Herr Mannheim ein Theorem aus, welches einige Analogie mit dem von Meusnier hat: Wenn man auf einer Oberfläche Curven betrachtet, welche sich unter einander in einem Punkt *a* derselben berühren, und construirt die abwickelbaren Flächen, welche sich an die Oberfläche längs dieser Curven legen lassen, so laufen die Krümmungsaxen derselben, welche jenem Punkt entsprechen, durch einen Punkt. Schn.

E. BELTRAMI. Zur Theorie des Krümmungsmasses. Clebsch Ann. I. 515-582. 1869.

Bezeichnen u, v Parameter einer Fläche, und sind E, F, G bestimmt als Coefficienten der Darstellung des Linienelements

$$\partial s^2 = E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2$$

endlich φ, ψ zwei beliebige Functionen von u, v, so sollen Differentialparameter erster und zweiter Ordnung die Ausdrücke

$$\varDelta_1\varphi = \frac{1}{\varDelta}\left\{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\},$$

$$\varDelta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\varDelta^{-\frac{1}{2}}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left[\varDelta^{-\frac{1}{2}}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right]\right\}$$

und Zwischenparameter der Ausdruck

$$\Delta_1 \varphi\psi = \frac{1}{\Delta}\left\{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$$

heissen, wo $\Delta = EG - F^2$ gesetzt ist. Es werden nun einige Eigenschaften dieser Parameter aufgeführt.

Bezeichnet δn das Linienelement auf der Fläche, welches im Punkte (uv) auf der Curve $\varphi =$ const. senkrecht steht, so ist

$$\Delta_1 \varphi = \frac{\delta\varphi^2}{\delta n^2}; \quad \Delta_1 \varphi\psi = \sqrt{\Delta_1 \varphi}\,\frac{\delta\psi}{\delta n}.$$

Ist $\Delta_1 \varphi\psi = 0$, so schneiden sich die Curven $\varphi =$ const. und $\psi =$ const. unter rechten Winkeln.

Jeder Lösung der Differentialgleichung $\Delta_1 \varphi = 1$ entspricht ein Curvensystem $\varphi = c$, dessen orthogonales aus kürzesten Linien besteht, und zwar sind die zwischen $\varphi = c$ und $\varphi = c'$ abgegrenzten geodätischen Bogen $= c' - c$. Die gegenseitige Beziehung der Curven des ersteren Systems kann man also als geodätischen Parallelismus bezeichnen, und die geodätisch parallelen Curven als geodätische Evolventen einer gemeinsamen Curve ansehen.

Ist $\Delta_1 (\varphi + i\psi) = 0$, so sind die Curvensysteme $\varphi =$ const. und $\psi =$ const. orthogonal und isometrisch; es ist dann

$$\partial s^2 = \frac{\partial\varphi^2 + \partial\psi^2}{h^2}.$$

Ferner genügen dann $f = \varphi$ und $f = \psi$ der Gleichung

$$\Delta_2 f = 0,$$

und für jede Lösung $f = \varphi$ giebt es eine zweite $f = \psi$ der Art, dass $\Delta_1 (\varphi + i\psi) = 0$ wird. Die Bedingung, dass das Curvensystem $\varphi =$ const. isometrisch sei, ist

$$\frac{\Delta_2 \varphi}{\Delta_1 \varphi} = \text{einer Function von } \varphi \text{ allein.}$$

Ist s der Umfang des Flächenstücks ω, und sind φ, ψ innerhalb desselben stetig, so ist, gemäss der obigen Erklärung von δn,

$$\int(\varphi \Delta_2 \psi - \psi \Delta_2 \varphi)\partial\omega + \int\left(\varphi\frac{\delta\psi}{\delta n} - \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)\partial s = 0,$$

Derselbe Ausdruck wird $= 2\pi\varphi_0$, wenn ψ in einem Punkte wie

$\log\frac{1}{\varrho}$ unendlich wird, wo ϱ den kürzesten Abstand desselben von einem beliebigen anderen, und φ_0 den Werth von φ für jenen Punkt bezeichnet.

Bezeichnet x den Modul des integrirenden Factors der Gleichung

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2 = 0,$$

so ist das Krümmungsmass der Fläche

$$k = \Delta_2 \log x.$$

Für den Fall, wo

$$\partial s^2 = \frac{\partial u^2 + \partial v^2}{h^2}$$

ist, genügt $x = h$, und man erhält:

$$k = h^2\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2}\right).$$

Ferner ist die geodätische (oder tangentielle) Krümmung der Curve $\varphi = \text{const.}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} - \frac{\delta\sqrt{\Delta_1 \varphi}}{\delta\varphi}.$$

Für den Fall $\Delta_1 \varphi = 1$ erhält man:

$$\frac{1}{r} = \Delta_2 \varphi,$$

beim isometrischen System, wo $\Delta_2 \varphi = 0$ ist:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\delta\sqrt{\Delta_1 \varphi}}{\delta\varphi}.$$

Für kürzeste Linien ist

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{2}\frac{\delta\Delta_1 \varphi}{\delta\varphi}.$$

Bezeichnet ϱ einen unendlich kleinen Bogen einer kürzesten Linie von irgend einem Punkte in irgend einer Richtung, so ist

$$\tfrac{1}{2}k = \lim \Delta_2 \log\frac{1}{\varrho}.$$

Sind X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale, R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien, und x, y, z gegebene Functionen von u, v, so ist

$$\Delta_1 x = 1 - X^2;\quad \Delta_1 yz = YZ;\quad \Delta_2 x = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)X;$$

analog für die andern Coordinaten. Hieraus ergiebt sich u. a., dass bei einer Minimalfläche jede Schaar paralleler Ebenen ein isometrisches Schnittcurvensystem erzeugt.

Ist F eine Function von x, y, z, mittelbar von u, v, so ist

$$\varDelta_2 F = -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(X\frac{\partial}{\partial x}+Y\frac{\partial}{\partial y}+Z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F-\left(X\frac{\partial}{\partial x}+Y\frac{\partial}{\partial y}+Z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F.$$

Ist F Function des Radiusvectors r allein, und ψ der Winkel zwischen r und der Normale, so geht der Ausdruck über in

$$\varDelta_2 F = \left\{\frac{1+\cos^2\psi}{r}-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cos\psi\right\}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\sin^2\psi,$$

insbesondere

$$\varDelta_2 \log\frac{1}{r} = \frac{\cos\psi}{r}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{2\cos\psi}{r}\right)$$

und bei verschwindendem r, wenn der Anfangspunkt in der Fläche liegt:

$$\lim \varDelta_2 \log\frac{1}{r} = \frac{1}{2RR'},$$

wo R, R' die Krümmungsradien der zwei aufeinander senkrechten Normalschnitte bezeichnen, in deren einem r liegt. Die zwei analogen Formeln für ϱ und r zeigen, dass der erstere Grenzwerth unabhängig, der letztere stets abhängig von der Richtung des Bogens ist. H.

E. Beltrami. Sulla teoria generale delle superficie. Atti d. At. Ven. V. 1869.

Die kurze Note enthält den Beweis des Gauss'schen Satzes über die Invariabilität des Products der Krümmungsradien und des von Minding über die Unveränderlichkeit der geodätischen Krümmung jeder Linie, die auf einer biegsamen, unausdehnbaren Oberfläche gezogen wird. Diese Beweise werden mit Hülfe leichter Reihenentwickelungen bei Anwendung cartesischer Coordinaten geführt, so dass sie in einen elementaren Cursus der Anwendungen der Analysis auf Geometrie aufgenommen werden können. Jg. (O.)

E. Weyr. Krümmungsverhältnisse eines Curvenbüschels in einem Scheitel. Schlömilch Z. XV. 486-490. 1870.

Die Bestimmung des Orts der Krümmungsmittelpunkte eines Curvenbüschels in einem Scheitel führt auf eine Gleichung dritten Grades von der Form

$$A\xi^3 + B\eta^3 + C\xi^2\eta + D\xi\eta^2 + E(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

wenn zum Anfangspunkt der betreffende Scheitel gewählt und rechtwinklige Axen zu Grunde gelegt werden. Die Interpretation der Gleichung zeigt unmittelbar, dass die betreffende Curve einen Doppelpunkt im Scheitel besitzt, und die Doppelpunktstangenten die zwei nach den imaginären Kreispunkten laufenden Geraden sind. Da diese mit dem Scheitel gleichzeitig bekannt sind, so wird die betreffende Curve C_4^3 durch vier weitere Punkte bestimmt, und es gilt daher der Satz, dass, sobald die Krümmungsradien von 4 Gliedern eines Büschels in einem Scheitel der Grösse und Richtung nach bekannt sind, der Krümmungsradius jeder fünften Curve in demselben Scheitel linear zu construiren ist. Aus dem Umstande, dass C_4^3 die unendlich ferne Gerade in 3 Punkten schneidet, folgt, dass es unter den Curven des Büschels für jeden Scheitel drei giebt, welche in ihm einen Inflexionspunkt besitzen; sind vier Glieder des Büschels vorhanden mit Inflexionspunkten in einem Scheitel, so haben alle übrigen Glieder denselben Scheitel zum Inflexionspunkt. Schliesslich sei noch bemerkt, dass aus den Betrachtungen sich mit Leichtigkeit der bekannte Satz folgern lässt: „Alle Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung hindurchgehen, besitzen diese Punkte gleichfalls zu Inflexionspunkten“. Schn.

F. W. Newman. On conic osculation. Rep. Brit. Ass. 1869/70. Mondes (2) XXI. 413. 1870.

Csy.

G. Darboux. Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 175-180. 1870.

Enthält eine interessante Ausdehnung des von Gauss in den Disqu. gen. c. superf. curv. gegebenen Satzes über die totale

Krümmung einer von geodätischen Linien begrenzten Figur. Es sei das Bogenelement der betrachteten Fläche durch die Gleichung

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$$

gegeben, ferner seien ϱ der Radius der geodätischen Krümmung einer auf der Fläche liegenden Curve, i der Winkel der Tangente an die Curve mit den Curven $u =$ constant, R und R' die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, dann ist:

$$\frac{ds}{\varrho} = di + M du + N dv, \qquad \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{AC}{RR'}.$$

Das über ein endliches Stück der Fläche erstreckte Doppelintegral

$$\iint \frac{AC du dv}{RR'} = \iint \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u}\right) du\, dv$$

geht bekanntlich über in

$$\int (M du + N dv),$$

erstreckt über die Begrenzung des Flächenstücks. Besteht diese nun aus Curven, welche der Differentialgleichung

$$di + M du + N dv = d\varphi(u, v)$$

genügen, so wird:

$$\iint \frac{AC du dv}{RR'} = -\int di - \int d\varphi(u, v),$$

wo das letzte Integral im Allgemeinen verschwinden muss, weil die Begrenzung eine geschlossene ist.

Die Form dieser Gleichung ist also genau dieselbe, als wenn $\varphi = 0$ wäre. In diesem Falle besteht aber die Begrenzung aus geodätischen Linien, und die Gleichung liefert unmittelbar das am Eingang erwähnte Gauss'sche Theorem. Denkt man sich überhaupt das Integral $\iint H du dv$ auf die Form

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u}\right) du dv = \int (P du + Q dv)$$

gebracht und die Begrenzung des Integrationsgebietes aus Curven gebildet, welche der Differentialgleichung

$$P du + Q dv = d\varphi\left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{du^2}{dv^2}, \ldots\right)$$

genügen, so wird sich im Allgemeinen das Integral durch Grössen

ausdrücken lassen, welche sich nur auf die Ecken der Begrenzung beziehen.

Genau dasselbe Princip kann man auf ein dreifaches Integral $\iiint H\,dx\,dy\,dz$ ausdehnen. Für jedes H existirt eine bestimmte Klasse von Flächen, die ein und derselben partiellen Differentialgleichung genügen. Ist dann das Integrationsgebiet ein aus diesen Flächen gebildetes Polyeder, so verwandelt sich das dreifache Integral in ein einfaches, welches sich über die Kanten des Polyeders erstreckt. B.

G. Darboux. Sur la représentation sphérique des surfaces. C. R. LXVIII. 253. 1869.

Der Verf. erinnert im Eingange an die Untersuchungen von Bonnet und Serret über die Theorie der Flächen, welche ebene und sphärische Krümmungslinien besitzen. Das Problem der Aufsuchung solcher Flächen ist ein besonderer Fall des folgenden: Alle Flächen zu finden, die eine gegebene sphärische Darstellung haben. Die sphärische Darstellung einer Fläche ist durch die beiden Systeme orthogonaler Linien gegeben, welche auf einer Kugel Parallele zu den Normalen der Fläche in allen Punkten jeder Krümmungslinie beschreiben. (Diese Parallelen sollen wohl Normalen der Kugel sein; der Verf. giebt dies nicht an). Es werden nun hierher gehörige Bedingungsgleichungen entwickelt und die Fälle erwähnt, in denen die Integration gelingt. Am Schlusse findet man den Satz: Sind

$$x = f(\varrho, \varrho_1), \quad y = f_1(\varrho, \varrho_1), \quad z = f_2(\varrho, \varrho_1),$$

und

$$X = F(\varrho, \varrho_1), \quad Y = F_1(\varrho, \varrho_1), \quad Z = F_2(\varrho, \varrho_1),$$

zwei Systeme von Gleichungen, die zwei Flächen von derselben sphärischen Darstellung bestimmen, so werden die Flächen:

$$x = af(\varrho, \varrho_1) + bF(\varrho, \varrho_1); \quad y = af_1(\varrho, \varrho_1) + bF_1(\varrho, \varrho_1);$$
$$z = af_2(\varrho, \varrho_1) + bF_2(\varrho, \varrho_1),$$

(wo a und b Constanten) dieselbe sphärische Darstellung haben, wie die beiden ersten. Mz.

E. Beltrami. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie. Rend d. Ist. Lomb. (2) II. 1869.

Wenn zwei Punkte a, b einer Oberfläche durch einen geodätischen Bogen verbunden sind, und man lässt sich den Bogen um eine der Axen um einen unendlich keinen Winkel $d\theta$ drehen, so beschreibt das andere Ende ein Bogenelement $d\sigma$, normal zum geodätischen Bogen ab, welches auf $d\theta$ bezogen von Herrn Christoffel reducirte Länge des geodätischen Bogens genannt worden ist. Die Grösse ist im Allgemeinen eine Function von vier Variabeln, nämlich der Coordinaten der beiden Punkte a, b, und Herr Christoffel hat bewiesen, dass diese Coordinaten untereinander vertauscht werden können. Die Note des Herrn Beltrami enthält einige Bemerkungen über diese Function, oder genauer über die Function, welche Herr Christoffel reducirte Abscisse nennt, und welche, bezogen auf ein Paar von Punkten, die auf einer bestimmten geodätischen Linie liegen, nur von zwei Variabeln abhängt. Speciell wird bewiesen, dass diese Function nothwendig von der Form:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{\sqrt{\varphi'(x).\varphi'(y)}}$$

ist, wenn x und y die geodätischen Entfernungen der beiden Punkte von demselben Anfangspunkt sind. Diese Form giebt unmittelbar Rechenschaft davon, warum sich einige Relationen der gewöhnlichen Longimetrie auch auf krummen Oberflächen richtig erhalten, wenn man die reducirten Abscissen durch geodätische Entfernungen substituirt. Jg. (O.)

L. Painvin. Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles. C. R. LXXI. 217-222. 1870.

Es werden die Formeln entwickelt, welche sich auf die Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche beziehen, die durch ihre Tangentialgleichungen gegeben ist. Am Schluss werden die Formeln auf die Wendungscurve der abwickelbaren Fläche, die zwei Flächen zweiten Grades umschrieben ist, angewandt.

Mz.

Ch. Buchonnet. Expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice. Nouv. Ann. (2) IX. 457-463. 1870.

Es wird die Entfernung δ des einem Punkt M einer Raumcurve benachbarten Punktes M' von der Schmiegungskugel in M berechnet, deren Radius R ist, nämlich

$$\delta = \frac{\varepsilon\eta\, ds\, dS}{24R},$$

worin ε den Contingenz-, η den Torsionswinkel in M, ds den Bogen MM' und dS den entsprechenden Bogen der Schmiegungsmittelpunktcurve bedeutet. Schz.

Tortolini. Sopra un nuovo sistema di variabili, introdotto dal sig. Ossian Bonnet nello studio delle proprietá delle superficie curve. Atti d. Ac. d. N. Linc. 1869.

In der vorliegenden Arbeit giebt der Verfasser einen Vergleich der von Herrn Bonnet gefundenen Resultate (Liouville J. (2) V. 1860) mit seinen eigenen. Jg. (O.)

U. Dini. Sopra le superficie che hanno un sistema di curvatura sfericha. Atti dei XL. Firenze 1869.

Der Verfasser setzt zwei Sätze auseinander, mittelst deren die Untersuchung der Flächen, die ein System sphärischer Krümmungslinien haben, auf die Untersuchung gewisser Systeme von orthogonalen Linien auf Kugeln reducirt werden kann. Er beweist ferner in einfacher Weise einen Satz des Herrn Bonnet über die Flächen, deren Krümmungslinien constante geodätische Krümmung haben, und welche, wie der Verfasser bemerkt, die sind, auf welchen die Krümmunglinien sphärisch sind und zu der der Oberfläche normalen Kugel gehören. Jg. (O.)

U. Dini. Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane. Ann. d. Un. Tosc. 1869.

Der Verfasser leitet zuerst einige Formeln bezüglich seiner Systeme von kleinen Kreisen auf der Kugel ab. Mit Hülfe dieser und anderer, die er in seiner Abhandlung: „Ricerche sopra la

teorica delle superficie" gegeben, bestimmt er die Oberflächen, die ein System ebener Krümmungslinien haben, und bei welchen die Ebenen, ohne einander parallel zu sein, gleiche Neigung zu einer festen Geraden haben oder die Oberfläche unter einem und demselben Winkel $\left(\text{verschieden von } \frac{\pi}{2}\right)$ schneiden oder gleichzeitig beiden Bedingungen genügen. Zuletzt bestimmt er mit Hülfe eines Satzes von Herrn Weingarten die Oberfläche, für welche die Krümmungslinien eines Systemes eben sind, und die Hauptkrümmungsradien Functionen von einander sind.

Jg. (O.)

A. Enneper. Ueber die developpabele Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen längs einer Curve auf einer Fläche. Gött. Nachr. 1869. 207.

Auf einer Fläche sei eine beliebige Curve C gegeben, die berührenden Ebenen längs derselben hüllen eine developpable Fläche ein. Bezeichnet man mit (x, y, z) einen Punkt der Curve C; mit (ξ, η, ζ) den Punkt der Wendecurve der developpabeln Fläche, welcher (x, y, z) entspricht; mit (a, b, c) die Winkel, welche die Normale zur Fläche im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, so hat man zur Bestimmung von (ξ, η, ζ) die Gleichungen:

$$(\xi-x)\cos a+(\eta-y)\cos b+(\zeta-z)\cos c = 0$$

und zwei andere, indem man zu den nächsten beiden unendlich nahen Punkten von (x, y, z) übergeht. Es folgt nun die Entwickelung einer Reihe von analytischen Formeln, deren Resultat folgendes ist: Durch die Verbindungslinie der beiden Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) geht eine Normalebene der Fläche in (x, y, z), welche die Fläche in der Curve C schneidet. R sei der Krümmungshalbmesser von C in (x, y, z); T der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, welcher durch die Tangente der Curve C im Punkte (x, y, z) geht; φ der Winkel, welchen die Tangenten zu den Curven C und C_1 einschliessen (in x, y, z); endlich r' und r'' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche in (x, y, z), so ist

$$R.T.\sin^2\varphi = r'.r''$$

also auch mittelst des Theorems von Euler:

$$R+T = r'+r''.$$

Mz.

A. Enneper. Ueber die developpabele Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist. Schlömilch Z. XV. 283-289. 1870.

Der Verfasser beweist das folgende, schon früher von ihm aufgestellte Theorem auf neuem Wege: Die Tangentialebene einer Fläche hat, indem ihr Berührungspunkt B beliebig fortrückt, einen begleitenden Coincidenzpunkt C, welcher die Wendecurve der von BC erzeugten abwickelbaren Fläche beschreibt. Das Krümmungsverhältniss dieser Wendecurve (Torsion dividirt durch Krümmung) ist alsdann gleich dem Product des Abstandes BC und des Krümmungsradius desjenigen Normalschnitts, dessen Ebene durch BC geht, dividirt durch das Product der Hauptkrümmungsradien. H.

Falk. Om developpable ytors kurvaturlinier. Dillner Tidskr. III. 123. 1870.

Bemerkung über die Integration der Differentialgleichung für die Krümmungslinien einer abwickelbaren Fläche.

Hn. (Wn.)

A. Enneper. Ueber asymptotische Linien. Gött. Nachr. 1870. 493-510.

Auf den Flächen mit negativem Krümmungsmass existiren bekanntlich in jedem Punkte zwei Normalschnitte, deren Krümmungshalbmesser unendlich gross sind. Die Tangenten zu diesen Normalschnitten hüllen zwei Systeme von Curven ein, welche asymptotische Linien heissen. Man gelangt zu ihrer Differentialgleichung durch Bestimmung der Curven, deren Krümmungsebene mit der Berührungsebene zur Fläche identisch ist. Die Normalen längs einer Curve zu einer Fläche bestimmen eine windschiefe Fläche; soll diese windschiefe Fläche zur Strictionslinie die erste Curve haben, so ist diese eine asymptotische Linie und die Normalen zur Fläche sind die Binormalen derselben. Der Winkel, unter welchem sich zwei asymptotische Linien schneiden, ist

variabel; soll derselbe constant sein, so muss das Verhältniss der Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte der Fläche constant sein, und umgekehrt. Verschwindet in jedem Punkte einer Fläche die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, so schneiden sich die asymptotischen Linien orthogonal. Diese Sätze werden durch die entsprechenden analytischen Formeln nachgewiesen, dann einige besondere Fälle betrachtet und zum Schluss der Uebergang asymptotischer Linien in andere Curvensysteme bei Biegung der Flächen besprochen. Mz.

A. Enneper. Ueber die Loxodromen der Kegelflächen.

Gött. Nachr. 1869. 463. Schlömilch Z. XV. 466-475. 1870.

Die Berechnung der Loxodromen auf konischen, von beliebig bewegtem Strahl beschriebenen Flächen, welche keine Schwierigkeit hat, bildet augenscheinlich nur die Einleitung der Schrift, indem sie zu der Frage führt, unter welchen Bedingungen das Verhältniss der beiden Krümmungen einer Loxodrome constant sei, was unter andern auf einem Rotationskegel und auf einer beliebigen cylindrischen Fläche immer der Fall ist. Bei Lösung dieser Frage steht nichts entgegen, statt der konischen beliebige abwickelbare Flächen zu nehmen. Man gelangt zu deren Bestimmung, indem man längs einer cylindrischen Loxodrome eine Gerade so hingleiten lässt, dass sie mit der Tangente einen constanten Winkel bildet und sich in jedem Augenblicke um einen ihrer Punkte dreht. Die hierzu erforderliche Integration ist mittelst Transcendenten erster Ordnung ausführbar. Das Resultat bildet dann zugleich die Lösung einer Differentialgleichung dritter Ordnung, in welcher sich die Aufgabe unmittelbar darstellt, wenn man vom Ausdruck des Krümmungsverhältnisses ausgeht, und deren Integration auf anderem Wege wohl schwierig sein möchte.

Im weitern Verlauf werden auch sphärische Loxodromen in die Betrachtung gezogen. Doch ist es bei dem beständigen Wechsel der geometrischen Objecte ohne Angabe, auf welche unter ihnen sich die Grössenzeichen beziehen, bei der gänzlichen Verschweigung der leitenden Gedanken und dem Mangel an sicht-

licher Ordnung in den Deductionen, nicht wohl möglich zu erkennen, mit welchen Aufgaben sich die Schrift weiter beschäftigt und in welchen Formeln die Resultate zu suchen sind.

H.

Boije. At finna volymen af ett revolutions solidum, då genererande kurvan är hänfördt till polarkoordinater. Dillner Tidskr. III. 193. 1870.

Es sei $\varrho = \varphi(\theta)$ die Gleichung der Meridiancurve einer Rotationsfläche in Polarcoordinaten; die Polaraxe sei die Rotationsaxe. Das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Sectors zwischen den Radienvectoren $\varrho_1 = \varphi(\theta_1)$, $\varrho_2 = \varphi(\theta_2)$ entsteht, ist

$$V = \tfrac{2}{3}r\int_{\theta_2}^{\theta_1}(\varphi(\theta))^3 \sin\theta . d\theta.$$

Hn. (Wn.)

E. Weyr. Ueber Evoluten räumlicher Curven. Wien. Ber. LXII. 804-808. 1870.

Es werden an den Evoluten als Einhüllenden einer stetigen Folge von Normalen Betrachtungen angestellt, die die Grenzen des Bekannten nicht überschreiten. H.

W. Spottiswoode. On the contact of conics with surfaces. Trans. of London. CLIX. 289-308. 1869.

Der Verf. entwickelt das Theorem (p. 305): „Ist L eine Linie, die durch einen Punkt P einer Oberfläche geht, so kann man in einer durch L gehenden Ebene 10 Kegelschnitte zeichnen, die in dem Punkte P eine sechspunktige Berührung mit der Fläche haben“.

Die Behandlungsweise ist analog der in des Verf.'s Arbeit „On the sextactic points of a plane curve“ (Trans. CLV. 1865).

Cly. (M.).

A. Cayley. A memoir on the theory of reciprocal surfaces. Trans. of Lond. CLIX. 201-209. 1869.

Die Abhandlung enthält einige Erweiterungen der Salmon'schen Theorie der Reciprocalflächen (Trans. of. Ir. Ac. XXIII.

461. Salmon, Analyt. Geom. des Raumes II, 509). Sie behandelt einige neue Singularitäten, wie conische und biplanare Knoten (conicnodes and binodes), Klemm-Punkte (pinch-points) auf den Knotenlinien, singuläre Einzelpunkte (close-p.) und Aussenpunkte (off-p.) auf der Rückkehrcurve, und die Singularitäten der reciproken Fläche. Cly. (M.)

Ernst Fischer. Ueber äquidistante Niveaucurven. Aarau. Sauerländer 1869.

Die Arbeit enthält practische Lehren, die Niveaucurven auf der Erde, d. h. die dem Niveau des Wassers parallelen Curven, zu bestimmen und zu zeichnen. § 3. giebt geschichtliche Notizen über Niveaucurven, aus denen hervorgeht, dass ein schweizer Ingenieur, Ducarla, zuerst solche Curven zur Darstellung des Terrains benutzte. M.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

E. de Jonquières. Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques. Clebsch Ann. I. 424-431. 1869.

Gegenstand der Arbeit ist der Beweis des Satzes, dass die Anzahl der Curven oder Flächen eines Netzes, welche zwei Doppelpunkte besitzen, beziehungsweise eine doppelte Berührung mit einer festen Ebene haben, $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ ist. In Folge einer Note in den C. R. 1338-1340 ist diese Arbeit bereits im ersten Bande dieser Zeitschrift (cf. Fortschr. d. M. I. p. 235) besprochen worden. Während aber in jener Note der C. R. der Gang des Beweises nur kurz angedeutet war, ist er in dieser Note ausführlich mitgetheilt. Am Schluss wird die Bemerkung gemacht, dass sich das gewonnene Resultat ohne neuen Beweis auf solche Familien von Curven und Flächen ausdehnen lässt, welche den Grad von Unbestimmtheit besitzen, dass sie durch zwei Bedingungen weniger bestimmt sind, als zur vollständigen Bestimmung der einfachen Curven oder Flächen er-

forderlich sind. Diese Familien werden Netz-Complexe (réseaux complexes) genannt. Bezeichnet N die Anzahl der Curven oder Flächen des Netz-Complexes, welche durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen, so ergiebt sich als gesuchte Anzahl:

$$\tfrac{3}{2}N(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

oder

$$\tfrac{3}{2}N(n-1)\{3(n-1)^2-14(n-1)+11\}.$$

T.

G. Darboux. Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. C. R. LXX. 1329-1333. 1870.

Durch eine sehr sinnreiche Methode bestimmt Herr Darboux die Classe und die Ordnung der Fläche der Krümmungsmittelpunkte. Bezeichnet m die Ordnung der gegebenen Fläche, c die Classe und o die Ordnung der Fläche der Krümmungsmittelpunkte, so findet er für c und o die Formeln:

$$c = m^2(2m-2)-2m,$$
$$o = 2m(m-1)(2m-1).$$

Die Methode, welche der Verf. giebt, lässt, wie er bemerkt, eine Anwendung auf alle geradlinigen Strahlensysteme zu, welche Herr Kummer untersucht hat. Schliesslich wendet er sich zu den Besonderheiten der Fläche der Krümmungsmittelpunkte und verbreitet durch seine Untersuchungen neues Licht über ein Theorem von Herrn Clebsch, welches sich auf die Fläche der Krümmungsmittelpunkte eines Ellipsoides bezieht. Schn.

E. Catalan. Remarques sur une note de Mr. Darboux relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. C. R. LXXI. 50-57. 1870.

G. Darboux. Réponse aux observations de M. Catalan du 4. juillet dernier. C. R. LXXI. 267-270. 1870.

In der Note: „Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique" hatte Herr Darboux die Bemerkung gemacht, dass, wenn die Differentialgleichung

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+B\left(\frac{dy}{dx}\right)+C = 0$$

gegeben, worin A, B, C Functionen von x und y, die Gleichung $B^2-4AC=0$ im Allgemeinen nicht eine Enveloppe der durch die Differentialgleichung gegebenen Curven, sondern den Ort der Rückkehrpunkte oder der singulären Punkte dieser Curven darstelle. Auf diesen Gegenstand beziehen sich hauptsächlich die Bemerkungen des Herrn Catalan, sowie die Erwiderung des Herrn Darboux. Herr Catalan fügt zum Schluss noch einige Sätze über den Ort der Krümmungscentra eines Ellipsoids bei. Davon mag hervorgehoben werden, dass die Fläche der Krümmungscentra eines Ellipsoides die Enveloppe von Ellipsoiden ist, welche repräsentirt werden durch die Gleichung

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-\lambda^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2-\lambda^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2-\lambda^2)^2}=1.$$

Schn.

G. Halphén. Mémoire sur les courbes gauches algébriques. (Extrait). C. R. LXX. 380. 1870.

Da der kurze Auszug dieser Arbeit in den C. R., welcher dem Referenten zugänglich war, einen vollständigen Einblick in die Begründung der interessanten Resultate nicht gestattet, so können diese letzteren nur mitgetheilt werden, ohne dass Referent eine Verantwortlichkeit über die Richtigkeit derselben übernimmt.

Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe: „Alle Raumcurven eines gegebenen Grades zu finden", oder was auf dasselbe hinauskommt, „alle algebraischen Curven zu finden, die auf Flächen eines gegebenen Grades liegen". Die Lösung der Aufgabe in der zweiten Form liegt in folgendem Resultat:

Wenn man auf einer Fläche n^{ten} Grades jede Linie A von p^{tem} Grade bestimmt, welche wenigstens

$$\frac{(p-n+1)(p-n+2)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

scheinbare Doppelpunkte hat, und durch dieselbe noch eine zweite Fläche legt, so schneidet diese die erste Fläche ausserdem noch in einer Curve A. Durch Veränderung des Grades von p und desjenigen der durch A gelegten Fläche kann man für B jede algebraische Curve, welche auf f liegt, erhalten, und

der Grad der zweiten Fläche ist der niedrigste derjenigen Flächen, welche sich durch B legen lassen.

Der Verfasser hat nun ein Mittel gefunden, alle Curven A darzustellen, und dadurch auch alle Curven B.

Ein specieller Fall ist der folgende:

Die Flächen vom niedrigsten Grade, welche durch eine algebraische Curve gehen, die auf einer Fläche zweiten Grades liegt, schneiden diese Fläche ausserdem nur noch in Geraden ein und desselben Systems.

Man kann hiernach die Curven auf einer Fläche zweiten Grades in zwei Systeme eintheilen, wie die Geraden.

Für alle Raumcurven p^{ten} Grades, welche auf einer Fläche zweiten Grades liegen, ist die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte ein Werth von der Form: $\frac{p(p-1)}{2} - q(p-q)$, wo q eine positive ganze Zahl kleiner als $\frac{p+1}{2}$ ist; diese Curven liegen alle auch auf Flächen p^{ten}. Grades.

Die kleinste Zahl, welche der Ausdruck $\frac{p(p-1)}{2} - q(p-q)$ annimmt, ist die grösste ganze Zahl, welche kleiner ist, als $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Sie ist zugleich die niedrigste Anzahl scheinbarer Doppelpunkte, welche bei diesen Curven vorkommt.

Wenn s die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte einer Raumcurve vom Grade p ist, und s kleiner als $\frac{(p-1)(p-2)}{3} - 1$ ist, so liegt die Raumcurve auf einer Fläche zweiten Grades. — Liegt s zwischen $\frac{(p-1)(p-2)}{3}$ und $\frac{p(p-1)}{2}$, so ist die Curve zusammengesetzt; und unter allen derartigen Curven giebt es für jeden Werth von s eine, die auf einer Fläche dritten Grades liegt.

Sobald s kleiner ist als $\frac{3p(p-4)}{8}$, $\frac{3(p-1)(p-3)}{8}$ oder $\frac{3(p-2)^2}{8}$, je nachdem $p \equiv 0, \pm 1$, oder 2 (mod. 4), so lässt sich durch die Raumcurve eine Fläche zweiten oder dritten Grades legen.

Sobald s kleiner ist als $\frac{(n-1)(p-r)(p-n+r)}{2n}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet kleiner als $\sqrt{p}$ und r den Rest der Division von p durch n, so lässt sich durch die Curve keine Fläche legen, deren Grad gleich oder kleiner wäre, als $(n-1)$.

Unter den Raumcurven p^{ten} Grades sind diejenigen, für welche s zwischen $\frac{(p-2)(p-3)}{2}+1$ und $\frac{p(p-1)}{2}$ liegt, besonders ausgezeichnet durch die Eigenschaft, dass die Projection derselben s Doppelpunkte hat, was bei den andern Raumcurven nicht der Fall ist.

Solche Curven sind durch $2p$ Punkte bestimmt, wie z. B. die Raumcurve dritten Grades durch 6, die beiden Arten der Raumcurven vierten Grades durch 8 Punkte. A.

Laguerre. Sur les courbes que l'on peut tracer sur les surfaces algébriques. Inst. 1 sect. XXXVIII. 100. 1870.

Anknüpfend an die Arbeit „Laguerre, Propriétés des courbes tracées sur une surface quelconque" siehe Abschn. IX. Cap. 3A. p. 537, wird für den Fall algebraischer Flächen ein anderer Ausdruck für $\frac{dN}{N}$ gefunden. Ist nämlich $F(x, y, z)$ ein ganzes Polynom, das gleich Null gesetzt, die Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Coordinaten giebt, und bezeichnet w die Grösse

$$\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2},$$

ferner $W(m)$ dieselbe Grösse, wenn man für x, y, z die Coordinaten des Punktes m der Fläche substituirt, so ist:

$$\frac{W(m)\cos V}{W(m')\cos V'}+\frac{ma.ma'.ma''\ldots}{m'a.m'a'.m'a''\ldots}=0,$$

wo m' ein zweiter Punkt der Fläche, V und V' die Winkel der Sehne mm' mit den Normalen in m und m', — und ferner a, a', a'', ... die Schnittpunkte der Sehne mm' mit der Fläche bedeuten. Ist nun m' dem Punkte m unendlich nahe, so hat man

$$\frac{dN}{N}=\frac{dW}{W}+ds\left(\frac{1}{ma}+\frac{1}{ma'}+\frac{1}{ma''}+\cdots\right).$$

Hieran werden dann weitere Folgerungen geknüpft. Mz.

O. Tognoli. Sopra una estensione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque alle superficie algebriche di qualunque grado. Battaglini G. VIII. 166. 1870.

Die Arbeit knüpft an eine Arbeit von Steiner (Crelle J. XLVII) „über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben“ und an die Arbeit von Güssfeldt, Clebsch Ann. II. (siehe p. 469) an und erweitert die daselbst gegebenen Sätze auf krumme Flächen. K.

Laguerre. Quelques propriétés des cônes algébriques. Inst. 1 sect. XXXVIII. 196-197. 1870.

Im Eingange wird an einige Eigenschaften algebraischer ebener Curven erinnert, und zwar:

Legt man von einem Punkte M in der Ebene einer Curve n^{ter} Classe an diese die n Tangenten, und verbindet M mit den n reellen Brennpunkten der Curve, so haben die beiden auf diese Weise erhaltenen Büschel von Geraden dieselbe Orientation. Das harmonische Centrum der Berührungspunkte der Tangenten in Bezug auf M ist dasselbe, wie dasjenige der reellen Brennpunkte in Bezug auf M.

Dies wird nun verallgemeinert, indem statt M eine Curve m^{ter} Classe auftritt, und die mn gemeinschaftlichen Tangenten dieser und der ersten Curve betrachtet werden. Es haben nämlich diese Tangenten dieselbe Orientation, wie die mn Verbindungslinien der reellen Brennpunkte beider Curven. Sind ab, $a'b'$, ... die gemeinschaftlichen Tangenten, wie sie durch die Curven begrenzt werden, und sind α, α', ... die Brennpunkte der einen, β, β', ... die der anderen Curve, so ist die mittlere harmonische unter den Längen: ab, $a'b'$, ... dieselbe, wie die unter den Längen: $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, ...

Der Verfasser betrachtet nun einen Kegel n^{ter} Classe und überträgt die eben angegebenen Sätze auf diesen, wie folgt: Legt man durch eine Gerade, die den Scheitel des Kegels enthält, an ihn die n Tangentenebenen, und ferner Ebenen durch die Gerade und jede der n Focalgeraden des Kegels, so haben beide Ebenenbüschel dieselbe Orientation u. s. w.

Hierauf geht der Verfasser zu einem Kegel m^{ten} Grades über; der isotrope Kegel, welcher durch den Scheitel des ersten geht, trifft diesen in $2m$ Generatricen, die paarweise in m reellen Ebenen liegen; letztere heissen cyklische Ebenen des Kegels. Es kommen nun analoge Sätze wie vorher.

Schneiden sich die cyklischen Ebenen in derselben Geraden D, so heisst diese Axe mittlerer Orientation des Kegels. Bei Kegeln zweiten Grades sind ihrer stets drei. Kegel höherer Gerade haben eine solche Axe im Allgemeinen nicht. Doch gilt von ihnen Folgendes:

Durch eine ebene Curve dritten Grades kann man unendlich viele Kegel legen, die eine Axe mittlerer Orientation besitzen; die Spitzen dieser Kegel erfüllen eine Fläche.

Durch eine ebene Curve vierten Grades kann man unendlich viele Kegel legen, die eine solche Axe besitzen, ihre Spitzen liegen auf einer Curve.

Nimmt man eine Curve fünften Grades an, so existirt nur eine endliche Anzahl solcher Kegel. Mz.

W. K. Clifford. On the theory of distances. Rep. Brit. Ass. 1869. Mondes XXI. 412.

Die Mittheilung betrifft folgende beiden Sätze über Brennpunkte und Asymptoten von Curven: 1) $L, M, N \dots$ sind die m Tangenten von einem Punkt a an eine Curve c_m der m^{ten} Classe. B ist eine Linie, welche die Curve in $m(m-1)$ Punkten trifft; $l, m, n, \dots, P, Q, R, \dots$ sind die $m(m-1)$ Asymptoten der Curve, und $p, q, r, \dots$ sind eine Reihe von m Brennpunkten. Dann ist:

$$\frac{sm^2 LM . sm^2 LN . sm^2 MN \dots (\overline{ap}^2 . \overline{aq}^2 . \overline{ar}^2 \dots)^{m-4}}{al . am . an \dots . sm BP . sm BQ . sm BR \dots} = \overline{pq}^2 . \overline{qr}^2 . \overline{pr}^2 \dots .$$

2) $l, m, n, \dots$ sind die n Schnitte einer Linie A mit einer Curve c_n der n^{ten} Ordnung; b ist ein Punkt auf A, von dem die $n(n-1)$ Tangenten gezogen sind; $L, M, N, \dots p, q, r, \dots$ sind eine Reihe von $n(n-1)$ Brennpunkten und $P, Q, R, \dots$ sind die n Asymptoten. Dann ist

$$\frac{\overline{lm}^2 . \overline{ln}^2 . \overline{mn}^2 \dots (sm^2 AP , sm^2 AQ . sm^2 AR \dots)^{n-1}}{sm AL . sm AM . sm AN \dots bp . bq . br \dots}$$
$$= sm^2 PQ . sm^2 QR . sm^2 PR \dots$$

Der Verfasser bespricht auch die Modificationen, die diese Theoreme im Falle sphärischer Curven erleiden. Die angewandte Methode der Untersuchung ist eine Ausdehnung der geometrischen Analysis von Grassmann, und diese die Entwicklung einer Bemerkung von Leibniz. Csy. (O.)

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

J. Versluys. Application nouvelle des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. Grunert Arch. L. 157-176, 218-233. 1869. LI. 49-72. 1870.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 82.

A. Grunert. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises, in Dreilinien-Coordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten. Grunert Arch. LI. 257-275. 1870.

Siehe Absch. IX. Cap. 2 C. p. 479.

F. Unferdinger. Relation zwischen den Halbmessern der Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide. Grunert Arch. L. 110-111. 1869.

Beweis der Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4}\right)$$

auf analytischem Wege. ϱ, ϱ_1, ... bezeichnen die Halbmesser der 5 Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide.

O.

Niewenglowski. Étude sur la sphère. Nouv. Ann. (2) IX. 26-30. 1870.

Die in der Note behandelten Sätze betreffen sphärische Curven, dann deren reciproke Curven und ebene Curven, welche man als besondere Projectionen der sphärischen ansehen kann. Anwendungen auf das sphärische Dreieck werden gemacht.

T.

J. Neuberg. Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre. Nouv. Ann. (2) IX. 317. 1870.

Zieht man durch einen Punkt A eine Gerade, welche eine Oberfläche zweiter Ordnung in den Punkten M und M' trifft; desgleichen durch einen anderen Punkt B eine Gerade, deren Schnittpunkte mit der Oberfläche N und N' sind; so ist $\frac{AM.AM'}{BN.BN'}$ eine constante Grösse, wenn beide Geraden parallel bleiben, welche Richtung sie sonst auch haben mögen. Auf diesen von Newton gegebenen Satz stützt sich die Definition der Indices. Ist nämlich B ein für alle Mal fest angenommen, so hängt

$$\frac{AM.AM'}{BN.BN'}$$

nur von der Lage des Punktes A ab. Zu dem festen Punkte B bestimmt man nun den Mittelpunkt O der Oberfläche zweiter Ordnung und nennt die Grösse

$$J_a = \frac{AM.AM'}{ON^2}$$

den Index des Punktes A. Der Index ist negativ oder positiv, je nachdem A und O demselben Gebiete der Oberfläche angehören oder nicht; für einen Punkt der Oberfläche ist der Index gleich Null, für den Mittelpunkt gleich der negativen Einheit. Der Verfasser entwickelt nun den Ausdruck für den Index eines Punktes, wenn die Gleichung der Oberfläche in allgemeinen Cartesischen oder tetraedrischen Coordinaten gegeben ist, transformirt diesen Ausdruck, indem er die Gerade durch O gehen lässt, wodurch $J_a = -\frac{AA'}{OA'}$ wird, wenn A' der Durchschnitt von OA mit der Polarebene des Punktes A, und knüpft hieran verschiedene Sätze. Hierauf wird der Index einer Geraden in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades definirt als der Quotient aus dem Quadrate der Halbsehne, die durch diese Gerade bestimmt ist, und der vierten Potenz des der Geraden parallelen Halbmessers. Ferner ist der Index einer Ebene das Product ihrer Abstände von ihrem Pol und dem Mittelpunkt der Fläche,

Es werden nun viele Relationen unter diesen Indices entwickelt, welche dadurch von Wichtigkeit sind, dass gewisse Functionen (Covarianten und Contravarianten), denen man oft in der Rechnung begegnet, hierbei eine geometrische Bedeutung erlangen.

Mz.

F. W. Newman. On the curvature of surfaces of the second degree. Rep. Brit. Ass. 1869. Mondes 1870. XXI. 413. (2)

Csy.

W. Walton. On a property of surfaces of the second degree. Quart. J. X. 167-170. 1869.

Die Arbeit ist eine Berichtigung einer Abhandlung von M. Terquem (Liouville J. IV. p. 241). Terquem giebt den Satz, dass der Ort der Punkte, für den die Summe der Normalen, die von ihm aus an eine Fläche zweiten Grades gezogen werden können, constant ist, eine concentrische Fläche zweiter Ordnung ist, deren Axen der Richtung nach mit denen der gegebenen Fläche zusammenfallen. Der Satz selbst ist wahr, die von Terquem gegebene Gleichung der gesuchten Fläche aber ist unrichtig.

He.

Housel. Axes des surfaces du 2me degré obtenues par une sphère concentrique. Nouv. Ann. (2) VIII. 260-265. 1869.

Es wird gezeigt, wie man mit Hilfe einer der Fläche zweiten Grades concentrischen Kugel eine kubische Gleichung aufstellen kann, deren Wurzeln den reciproken Werthen der Quadrate der Halbaxen der Fläche zweiten Grades proportional sind. Am Schluss werden noch Beziehungen zwischen den Axen und den conjugirten Durchmessern hergeleitet.

T.

P. C. V. Hansen. Nogle Sätninger om Fladerne af ander Orden. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 97. 1870.

Volumen und Schwerpunkt eines von einer Fläche zweiter Ordnung und von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers wird auf elementarem Wege bestimmt; die Dimensionen des Körpers müssen natürlich endlich sein.

Hn. (Wn.)

F. Unferdinger. Kubatur der Segmente und Schichtenräume in Flächen zweiter Ordnung. Wien. Ber. LX. 631-667. 1869.

Der bekannte Satz, dass Segmente und Schichtenräume zwischen parallelen Ebenen in zwei beliebigen Flächen zweiten Grades für jede Richtung der Ebenen und jedes Axenverhältniss proportionirt sind, wofern nur die Grenzebenen ihre conjugirten Durchmesser proportional theilen, und die zwei Flächen derselben Art angehören, d. h. beide Ellipsoide oder beide einschalige, beide zweischalige Hyperboloide sind — ein Satz der durch leichte Betrachtung aus den Eigenschaften der conjugirten Durchmesser hervorgeht — wird hier in viele einzelne Sätze zerspalten, und für jeden Specialfall besonders ausführlich bewiesen. H.

G. Bauer. Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung. Borchardt J. LXXI. 46-52. 1870.

Eine Fläche zweiter Ordnung, durch eine beliebige Ebene geschnitten, giebt als Schnittcurve einen Kegelschnitt; damit dieser Kegelschnitt ein Kreis werde, muss die Discriminante der quadratischen Gleichung, von welcher die Axen der Schnittcurve abhängen, verschwinden. Durch Herrn Hesse ist diese Discriminante als Summe von 10, 7, 6 oder 5 Quadraten (Borchardt J. LX. 305) und durch Herrn Henrici als Summe von 2 Quadraten (Borchardt J. LXIV. 187) dargestellt worden. In der oben bezeichneten Arbeit giebt der Herr Verfasser eine andere Zerlegung der Discriminante in Quadrate, und diese Zerlegung ist so beschaffen, dass sie die Bedingungen des Verschwindens der Discriminante, also die Bedingungen der Kreisschnitte, in einfacher Form giebt.

Stellt

$$ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+2px+2qy+2rz+d = 0$$

die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung und:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$$

die Gleichung der schneidenden Ebene dar, bezeichnet man ferner durch Δ die Determinante:

$$-\begin{vmatrix} a & n & m & \alpha \\ n & b & l & \beta \\ m & l & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix},$$

durch $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_l, \ldots$ die partiellen Ableitungen von Δ nach $a, b, c, l, \ldots$, so wird die Discriminante

$$R = (\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c)^2 - 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\Delta,$$

und als Bedingung für ihr Verschwinden erhält man schliesslich:

$$\alpha.\Delta_l = \beta.\Delta_m = \gamma.\Delta_n.$$

Für den Fall, dass α, β oder $\gamma = 0$ ist, dass also eine der Coordinatenaxen in einem Kreisschnitt der Fläche liegt, müssen noch beziehungsweise

$$m\beta - n\gamma = 0 \text{ oder } l\alpha - n\gamma = 0 \text{ oder } l\alpha - m\beta = 0$$

sein, und es müssen die Coefficienten der Flächengleichung respect. den Gleichungen:

$$(a-b)m^2 + (a-c)n^2 + 2lmn = 0,$$

oder

$$(b-a)l^2 + (b-c)n^2 + 2lmn = 0,$$

oder

$$(c-a)l^2 + (c-b)m^2 + 2lmn = 0$$

genügen. T.

L. Saltel. Note sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface de second ordre. Nouv. Ann. (2) IX. 463-469. 1870.

Aus der allgemeinen Definition der Brennpunkte folgt, dass ein Punkt einer Ebene Brennpunkt für die Schnittcurve derselben mit einer Oberfläche zweiter Ordnung ist, wenn der durch diesen Punkt gelegte Tangentenkegel von der Ebene in einem Kreise vom Radius Null geschnitten wird, wenn also die Ebene für den Tangentenkegel die Richtung der Kreisschnitte hat. Die hierauf gegründete Rechnung führt zu Formeln, welche zur Lösung zweier Aufgaben angewendet werden, nämlich zur Bestimmung des Ortes der Brennpunkte der Centralschnitte und derjenigen Schnitte, welche einer Axe parallel sind.

Schz.

LAGUERRE. Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) IX. 5-12. 1870.

Der Verfasser erinnert zunächst an folgenden Satz: Sind zwei Punkte A und B einer Oberfläche zweiten Grades gegeben, und zieht man in diesen beiden Punkten die Normalen an die Fläche, welche irgend eine Symmetrieebene derselben resp. in a und b treffen, so geht diejenige Ebene, welche senkrecht zur Geraden AB durch deren Mitte gelegt ist, auch durch die Mitte der Geraden ab. Man kann daher auch sagen: Die Projectionen der Normalen Aa und Bb auf die Sehne AB sind gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen. Bezeichnet man also mit N und N' die Längen der beiden Normalen, mit V und V' die Winkel, welche sie mit der Sehne bilden, so ist:

$$\frac{N'}{N} = -\frac{\cos V}{\cos V'}.$$

Der Verfasser betrachtet nun eine Curve C auf der Fläche 2ten Grades; M und M' seien zwei unendlich nahe Punkte von C; ist nun N die Normale in M, so wird $N+dN$ diejenige in M' sein; es sei nun ϱ der Krümmungsradius von C, $d\eta$ der Torsionswinkel, ferner ϖ das Complement desjenigen Winkels, welchen die Normale zur Fläche mit der Hauptnormale von C bildet (alles dies in dem betrachteten Punkte M), so findet der Verfasser folgende Relation:

$$\frac{N^3}{\varrho}\sin\varpi^3 = C^{2\int\frac{d\eta}{\tang\varpi}} \times \text{const.}$$

und knüpft hieran noch einige Folgerungen. Mz.

L. PAINVIN. Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) VIII. 49. 1869.

Es ist dies die Fortsetzung einer bereits früher besprochenen Arbeit (siehe Fortschr. d. M. I. 242). Dort wurde eine Gleichung vierten Grades entwickelt, deren Wurzeln λ den vier Kegeln entsprachen, welche durch den Durchschnitt zweier Oberflächen zweiten Grades gelegt werden können. Es werden nun noch folgende Fälle behandelt:

1) die Gleichung in λ habe drei gleiche Wurzeln,
2) sie habe zwei Paare gleicher Wurzeln,
3) sie habe vier gleiche Wurzeln,
4) ihre Wurzeln seien zum Theil Null oder unendlich.

Die Resultate sind so ausgedehnt, dass sie in der Abhandlung selbst nachgesehen werden müssen. Zum Schlusse werden noch die unendlich entfernten Zweige der Durchschnittscurve betrachtet. Mz.

H. M. Jeffery. On conicoids referred to quadriplanar coordinates. Quart. J. X. 1-22. 1869.

Der Verfasser behandelt Oberflächen zweiter Ordnung in homogenen Punktcoordinaten, bezogen entweder auf ein allgemeines Coordinaten-Tetraeder oder auf ein solches, in welchem die gegenüberliegenden Kanten zu einander senkrecht stehen.

Es werden metrische Relationen der durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades bestimmten Fläche untersucht. Die Grösse der Axen wird bestimmt und die Kriterien für die Classification der Flächen werden gegeben. Ferner werden die Bedingungen gesucht, unter denen die Gleichung ein Hyperboloid repräsentirt mit drei auf einander senkrechten Asymptoten und Aehnliches mehr. He.

C. Hierholzer. Ueber Kegelschnitte im Raume. Clebsch Ann. II. 564-587. 1870.

Nach dem Princip der Dualität entsprechen den Kegelschnitten im Raume, — insofern sie Grenzflächen einer Schaar Oberflächen zweiten Grades sind, die 8 Tangentialebenen und mit ihnen eine abwickelbare Fläche vierten Grades berühren, — Kegel zweiten Grades als Grenzflächen einer Schaar von Oberflächen zweiter Ordnung, die durch dieselben 8 Punkte und hiermit auch durch eine Raumcurve vierten Grades gehen. Sätze über Kegel zweiten Grades lassen sich daher in entsprechende über Kegelschnitte übersetzen. Der Verfasser behandelt nun in vorliegender Arbeit Kegel (2ter Ordnung) und überlässt dem Leser die Uebertragung der gefundenen Resultate auf Kegelschnitte. Der Inhalt dieser an Resultaten reichen Abhandlung

ist die Bestimmung des Ortes des Kegelmittelpunkts, wenn 6 oder 7 Stücke (meistens Tangenten) gegeben sind; ferner die Bestimmung der Anzahl von Kegeln, die gewissen 8 Bedingungen genügen. Die Methode ist analytisch. Mz.

A. Enneper. Ueber ein Problem der sphärischen Geometrie. Schlömilch Z XIV. 147-152. 1869.

Der Verf. leitet die Relation her zwischen den Elementen zweier sphärischen Ellipsen, von denen die eine einem unregelmässigen sphärischen Polygon umschrieben, die andere demselben eingeschrieben ist. In den gewonnenen Resultaten ist der von Richelot (Crelle V, 250) für 2 Kreise behandelte Fall enthalten.
M.

L. Geisenheimer. Ueber sphärische Kegelschnitte. Jena 1869.

Es werden die Raumcurven untersucht, welche entstehen, wenn man einen normalen elliptischen Kegel von einer Kugel durchschneiden lässt, deren Mittelpunkt im Scheitel des Kegels liegt. Der Verf. entwickelt zunächst gewisse Eigenschaften der sphärischen Ellipse, welche denen der ebenen in Bezug auf ihre Brennpunkte entsprechen, betrachtet dann die Tangente, die Osculationsebene, beweist Sätze über die den Polaren entsprechenden grössten Kreise, untersucht die Normalen, den Krümmungsradius und giebt endlich den Flächeninhalt und die Länge eines Bogens mit Hülfe elliptischer Functionen. M.

G. Darboux. Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces. C. R. LXVIII. 1311-1313. 1869.

Der Verfasser giebt von seiner Arbeit einen Auszug, wovon das Hauptsächlichste Folgendes ist:

Er behandelt diejenigen Curven, welche der Durchschnitt einer Kugel mit einer Fläche zweiten Grades sind. Ihre Theorie schliesst sich an die der elliptischen Functionen eng an. Sie haben 4 Focalen, welche eben solche Curven (Cycliques, wie der Verfasser sie nennt) sind. Der Verfasser behandelt ausserdem diejenigen Flächen vierten Grades, welche den unendlich ent-

fernten Kugelkreis zur Doppellinie haben. Flächen dieser Art können ein dreifach orthogonales System bilden, analog demjenigen homofocaler Flächen zweiten Grades. Die Coordinaten eines Punktes einer Oberfläche dritten Grades lassen sich einfach durch Abel'sche Functionen mit vier Perioden darstellen. Zu diesem Satz wird der Verfasser durch das Studium jenes orthogonalen Systems geführt. • Mz.

M. Roberts. Sur les lignes de courbure d'un ellipsoide. Brioschi Ann. (2) III. 294-308. 1869.

Die Gleichung des Ellipsoides sei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2} = 1;$$

es existiren dann auf dem Ellipsoide zwei Krümmungslinien, von denen die eine auf einem ein-, die andere auf einem zweischaligen confocalen Hyperboloide liegt. Der Bogen der letzteren ist stets mit Hilfe der elliptischen Functionen auszudrücken, der der ersteren dagegen zunächst nur dann, wenn zwischen den Axen des Ellipsoides ein solches Grössenverhältniss besteht, dass:

$$c^2-ab > 0$$

ist.

Im zweiten Theile der Arbeit wird dann gezeigt, dass der Bogen der auf dem einschaligen Hyperboloide gelegenen Krümmungslinie auch dann noch durch elliptische Functionen ausdrückbar ist, wenn die Axen des Ellipsoides keiner Bedingung unterworfen sind.

(Brioschi Ann. (2) II. 15-18. siehe Fortschr. d. M. I. p. 139.)

T.

G. Zurrio. Sulla superficie dell' ellissoide a tre assi inuguali. Atti di Catania. (3) V. 1870.

Der Verfasser giebt eine Formel, welche die totale Oberfläche eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen mittelst elliptischer Transcendenten ausdrückt. Dies Problem ist, wie er in der Einleitung bemerkt, bereits von Legendre, Catalan, Plana und Serret behandelt, aber die Reduction der Doppelintegrale, die die Oberfläche des Ellipsoids ausdrücken, auf elliptische In-

tegrale war bisher immer durch Betrachtungen geometrischer Natur erreicht, gleichsam als wenn die Hülfsmittel der Analysis für diese Reduction nicht ausreichten. Der Verfasser bedient sich nur analytischer Mittel. Er erhält eine Formel, welche ihm zuerst die Formel Catalan's und Serret's, dann auch die von Legendre giebt. Sie zeichnet sich vor diesen dadurch aus, dass sie nicht für specielle Voraussetzungen über die Grösse der drei Axen illusorisch wird (d. h. wenn sie gleich sind, wenn es sich also um die Kugel handelt). Jg. (O.)

A. Cayley. On the geodesics on an oblate spheroid. Phil. Mag. XL. 320-329. 1870.

Die geodätischen Linien, welche in dieser Arbeit betrachtet werden, sind die geodätischen Normalen zu einem gegebenen Meridian. Csy. (O.)

F. Joachimsthal. Sur les nombres des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoide. Nouv. Ann. (2) IX. 481-489. 1870.

Es ist die Uebersetzung der im 59sten Bande des Borchardt'schen Journales von Joachimsthal veröffentlichten Abhandlung.

Schz.

G. Darboux. Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipsoide. Inst. 1. sect. XXXVIII. 142. 1870.

Die angegebenen Sätze sind für das Ellipsoid und für andere Flächen das Analogon und die Erweiterung der von Poncelet und Chasles hergeleiteten Sätze, welche für die den Kegelschnitten ein- und umgeschriebenen Polygone gelten. T.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper 1869. Quest. 10. Messenger V. 55-57. 1869.

Die Krümmungscurven eines Paraboloids werden aus der Gleichung der Krümmungscurven eines Ellipsoids bestimmt. Für das Paraboloid $xy = cz$ sind es die Schnitte desselben mit dem System von Oberflächen

$$h = \sqrt{x^2+z^2} \pm \sqrt{y^2+z^2}.$$

Glr. (O.)

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 11. Messenger V. 57-58. 1869.

Die Form der Curve von constanter Neigung für eine Oberfläche, wie das Ellipsoid, wird untersucht. Für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

liegt die Curve constanter Neigung zur XY-Ebene zwischen zwei abgesonderten Ovalen, welche die Hauptschnitte $x=0$, $y=0$ in den Punkten treffen, die gegeben sind durch

$$\frac{z}{y} = \pm\frac{c^2}{b^2}\cot\lambda, \qquad \frac{z}{x} = \pm\frac{c^2}{a^2}\cot\lambda.$$

Glr. (O.)

F. Grelle. Ueber das an Volumen grösseste einem dreiaxigen Ellipsoid einbeschriebene Tetraeder. Schlömilch Z. XIV. 372-375. 1869.

Der Herr Verf. geht von der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$$

aus und bezeichnet die Coordinaten der Eckpunkte des Tetraeders durch $(x_0 y_0 z_0)$ u. s. f. Ist nun $\varDelta$ der durch diese Coordinaten ausgedrückte sechsfache Inhalt des Tetraeders, so müssen die 12 partiellen Ableitungen von

$$\varDelta+k_0\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)+\cdots+k_3\left(\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}-1\right)$$

nach x_0, y_0, ... z_3 verschwinden. Dies giebt 12 Gleichungen; durch Elimination von k_0, k_1, k_2, k_3 bleiben dann 8, von denen aber nur 6 sich als unabhängig erweisen. Diese 6 Gleichungen verbunden mit den 4, welche ausdrücken, dass die Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ u. s. f. auf dem Ellipsoid liegen, sind zur Bestimmung von x_0, y_0, ... z_3 vorhanden, woraus folgt, dass es unendlich viele, ihrer Lage nach verschiedene, grösseste Ellipsoidtetraeder giebt. Weiterhin wird gezeigt, dass jede der Seitenflächen eines solchen Tetraeders der Berührungsebene des Ellipsoids in dem der Fläche gegenüberliegenden Eckpunkt parallel ist; und ferner:

der Mittelpunkt des Ellipsoides ist der Schwerpunkt eines solchen Tetraeders. Zum Schluss zeigt der Herr Verf., dass die 4 elliptischen Kegel, deren gemeinsame Spitze im Schwerpunkt eines solchen Tetraeders liegt und deren Basen die Ellipsen sind, worin die Flächen des Tetraeders das Ellipsoid schneiden, gleiches Volumen haben. Mz.

P. DE CAMPOUX. Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (2) VIII. 395-399. IX. 113-123. 1870.

Es wird durch lineare Substitutionen die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung auf ein beliebiges anderes rechtwinkliges Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte transformirt und durch Elimination der Coefficienten der Transformationsformeln aus den Gleichungen für die neuen Coefficienten der transformirten Oberflächengleichung die bekannte kubische Gleichung $\Delta = 0$ abgeleitet, von welcher die Hauptaxen abhängen. Die Coefficienten dieser Gleichung sind drei von einander unabhängige Invarianten für diese Transformation. Durch geometrische Interpretation derselben werden bekannte Sätze auf's Neue abgeleitet. Schz.

H. LEMONNIER. Solution d'une question géométrique. Nouv. Ann. (2). IX. 532-537. 1870.

Behandelt ist die Lösung der Aufgabe, die Axen eines Kegels zweiten Grades mit Hilfe der Kegelschnitte zu construiren, wenn von demselben der Scheitel und ein ebener Schnitt gegeben ist. Auf die Lösung dieser Aufgabe lässt sich auch die zurückführen, die Axen einer Fläche zweiten Grades zu construiren, wenn gegeben ist ihr Mittelpunkt, ein ebener Schnitt, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunkt geht, und ein Punkt des centralen und dem ersten parallelen Schnittes. T.

E. HILL. On the asymptotes to a hyperbolic section of an oblique cone. Messenger V. 82-83. 1869.

Enthält einen einfachen geometrischen Beweis dafür, dass

die Ebene durch den Mittelpunkt des Kegels und parallel zur Schnittebene den Kegel in Geraden schneidet, die den Asymptoten des hyperbolischen Schnittes parallel sind. He.

A. Cayley. A memoir on cubic surfaces. Trans. of London. CLIX. 231-326. 1869.

Die Arbeit beruht auf der von Schläfli: „On the distribution of surfaces of the third order into species in reference to the presence or absence of singular points and the reality of the lines" (Trans. CLIII. 1863), und ist gleichsam eine Ergänzung derselben. Die schliessliche Eintheilung in Klassen, die von der Realität der Linien abhängt, ist vernachlässigt und nur die Eintheilung in 22 oder (nach des Verf.'s Zählung) in 23 Fälle, beobachtet, je nach der Natur der Singularitäten. Bei der ganzen Untersuchung sind diejenigen Gesichtspunkte berücksichtigt, welche die Theorie der Reciprocalflächen liefert. Seite 235 findet sich eine Tabelle der Singularitäten in den 23 Fällen.

Cly. (M.)

A. Sartiaux. Note sur les surfaces du troisième ordre. Nouv. Ann. (2) VIII. 323. 1869.

Wenn unter den achtzehn Durchschnittspunkten einer Fläche dritter Ordnung mit den sechs Kanten eines Tetraeders, sechs, deren jeder auf einer der Kanten liegt, in derselben Ebene liegen, so liegen die zwölf übrigen in einer Fläche zweiter Ordnung.

Diese und ähnliche Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung beweist der Verfasser mit Hülfe tetraedrischer Coordinaten und gelangt zu folgenden Resultaten:

Wenn die sechs Kanten eines Tetraeders eine Fläche dritter Ordnung osculiren (dreipunktig berühren), so liegen die sechs Berührungspunkte in einer Ebene. Ist die Gleichung dieser Ebene $w=0$ und die der Tetraederflächen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$, so ist die Gleichung der Fläche dritter Ordnung darstellbar in der Form:

$$\text{I.}\quad u^3 = \alpha yzt + \beta xzt + \gamma xyt + \delta xyz,$$

deren geometrische Deutung sich leicht ergiebt. Da diese Glei-

chung neunzehn willkürliche Constante enthält, schliesst der Verfasser, dass die Eigenschaft, von den sechs Kanten eines Tetraeders osculirt zu werden, allen Flächen dritter Ordnung zukommt, und beweist schliesslich von der Gleichung I. ausgehend den Satz, dass die sechs Osculationspunkte in der Wendungscurve der Fläche liegen, dass also in ihnen das Krümmungsmass $= 0$ ist.

A.

E. Weyr. Ueber den perspectivischen Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe, und jener dritter Classe vierter Ordnung. Prag. Ber. 1869. 22-28.

Der Verfasser erinnert zuerst an die Bedeutung der Projectionsmethode als Hilfsmittel zur Auffindung neuer Sätze, giebt alsdann die Fundamentaleigenschaften der Raumcurven dritter Ordnung an, — und geht dann zur Betrachtung des Kegels über, der von allen Geraden, welche einen beliebigen Punkt des Raumes mit sämmtlichen Punkten der Raumcurve verbinden, gebildet wird. Dieser Kegel ist von dritter Ordnung, aber nur von vierter Klasse, da er eine Doppelkante hat, nämlich die eine durch den angenommenen Punkt des Raumes gehende Secante der Raumcurve. Schneidet man diesen Kegel durch eine beliebige Ebene, so erhält man eine ebene Curve dritter Ordnung und vierter Classe. Der Kegel und die ebene Curve werden dann näher besprochen. Zum Schluss deutet der Verfasser noch die reciproke Betrachtungsweise an. Schneidet man die developpable Fläche der Raumcurve durch eine beliebige Ebene, so erhält man eine Raumcurve dritter Classe mit einer Doppeltangente, also von der vierten Ordnung.

Mz.

J. J. Sylvester. On Prof. Ch. Wiener's stereoscopic representation of the cubic eikosi-heptagram of Dr. Salmon. Rep. Brit. Ass. 1869/70.

Csy.

Chr. Wiener. Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuterndem Texte. Leipzig. Teubner 1869.

Das erwähnte Modell ist von dem Herrn Verfasser auf Anregung des Herrn Clebsch construirt und in Gypsabgüssen durch ihn zu beziehen. Die Photographien zeigen zwei stereoscopische Ansichten und sind wohl geeignet, eine Vorstellung von der Gestaltung der Fläche zu geben. Die in wenigen Seiten zusammengefassten Erläuterungen beziehen sich auf die Construction des Modelles, namentlich der 27 Geraden, nach Salmon, und erzeugender Kegelschnitte, welche letztere Aufgabe darauf zurückgeführt ist, eine Gerade zu construiren, welche vier gegebene sich nicht schneidende Gerade trifft. A.

L. Cremona. Sulle 27 rette di una superficie del 3° ordine. Rend. d. Ist. Lomb. (2) III. 1870.

Es wird gezeigt, dass die 55 doppelt berührenden Ebenen einer allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung 40 bilden, welche durch ihre Eigenschaften den Wurzeln der Gleichung vom 40ten Grade entsprechen, welche sich bei der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen mit 4 Perioden darbietet.

Jg. (O.)

A. Cayley. On the double-sixers of a cubic surface. Quart. J. X. 58-71. 1869.

Der Herr Verfasser untersucht in dieser Arbeit die Relationen, welche solche 12 unter den 27 Geraden einer Oberfläche dritter Ordnung verbinden, die ein Doppelsechsseit bilden. Sechs der Geraden werden angenommen und dann die Gleichungen der übrigen bestimmt. Zum Schluss wird ein Zahlenbeispiel gegeben für die Gleichungen von 12 solchen Geraden nebst einer Tabelle, enthaltend die Coordinaten der Schnittpunkte. Es wird jedoch bemerkt, dass für die gewählten Verhältnisse mehrere der Geraden zu nahe zusammen kommen, um eine passende Grundlage für Zeichnung oder Modell zu bilden. He.

C. Jordan. Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. C. R. LXVIII. 865-869. 1869.

C. Jordan. Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre. C. R. LXX. 326-328. 1870.

C. Jordan. Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré. Liouville J. (2) XIV. 147-166. 1869.

Siehe Abschnitt II. Cap. 1. (Nachtrag) p. 274.

G. Weihrich. Einige Sätze über die Raumcurve dritter Ordnung und die abwickelbare Fläche dritter Klasse. Pr. Alzei 1869.

Die genannten Gebilde werden auf analytischem Wege in zwei parallel laufenden Entwickelungen untersucht, und es wird insbesondere die Identität der Raumcurve dritter Ordnung mit der Gratlinie der abwickelbaren Fläche dritter Klasse nachgewiesen; alsdann werden die Kegel, welche sich durch die Raumcurve legen lassen, und die ebenen Schnitte der abwickelbaren Fläche untersucht. Die Rechnung ist sehr ausführlich, doch übersichtlich.

Neue Resultate enthält die Arbeit nicht. A.

R. Townsend. On the nodal cones of quadrinodal cubics and the zomal conics of tetrazomal quartics. Quart. J. X. 264-283. 1869.

Eine Untersuchung, betreffend die Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten und deren reciproke Polare, die Steiner'sche Fläche. Unter A, B, C, D homogene Punkt-Coordinaten verstanden, kann man diesen Flächen bez. folgende Gleichungen ertheilen:

$$A^{-1}+B^{-1}+C^{-1}+D^{-1} = 0, \quad A^{\frac{1}{2}}+B^{\frac{1}{2}}+C^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}} = 0.$$

An diese Gleichungen knüpft der Verfasser seine Discussion an und leitet aus ihnen mit grosser Leichtigkeit viele der bekannten Eigenschaften der beiden Flächen her. (Die Bezeichnung der Steiner'schen Fläche als tetrazomal quartic bezieht sich auf die

vorstehende Gleichungsform derselben und auf eine von Herrn Cayley angewandte Terminologie. Siehe Fortschr. d. M. I. p. 165).

Kln.

M. Gardiner. Properties of quadrics having common intersections, and of quadrics inscribed in the same developpable (being an extension of chapter XVI. of Chasles' conics). Quart. J. X. 132-147. 1869.

Die Arbeit enthält eine Reihe Theoreme, die Abschnitte betreffend, welche Oberflächen zweiter Ordnung mit gemeinschaftlicher Schnittcurve auf einer Geraden bestimmen, und die reciproken Theoreme für Flächen zweiter Ordnung, die derselben abwickelbaren Fläche eingeschrieben sind. He.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 5. Messenger V. 190-191. 1870.

Eine Oberfläche 3ten Grades hat höchstens 4 conische Punkte und eine 4ten Grades höchstens 16 conische Punkte.

Glr. (O.)

D. Andere specielle Raumgebilde.

H. Durrande. Note sur les surfaces du quatrième ordre. Nouv. Ann. (2) IX. 410-417. 1870.

Der Verfasser definirt nach einigen einleitenden Worten die Flächen vierter Ordnung folgendermassen: Es seien $S=0$, $S_1=0$ die Gleichungen zweier Flächen 2ten Grades, dann ist $S-\lambda S_1=0$ (wo λ unbestimmt) die Gleichung des Flächenbüschels, das durch die Curve $S=0$, $S_1=0$ hindurchgeht. Ebenso sei $\Sigma-\mu\Sigma_1$ ein zweites Flächenbüschel. Sind nun die Parameter λ und μ durch die homographische Relation verbunden

$$A\lambda\mu+B\lambda+C\mu+D=0,$$

so entspricht jeder Fläche des ersten Büschels eine, und nur

eine des zweiten. Eliminirt man aus der letzten Gleichung und den beiden

$$S - \lambda S_1 = 0, \qquad \Sigma - \mu \Sigma_1 = 0$$

die Grössen λ und μ, so kommt:

$$AS\Sigma + BS\Sigma_1 + CS_1\Sigma + DS_1\Sigma_1 = 0,$$

die Gleichung einer Fläche vierten Grades, welche durch die beiden Curven (S, S_1) und (Σ, Σ_1) (die Basen der Büschel) hindurchgeht.

Hat man also zwei homographische Büschel von Flächen 2ten Grades, so ist der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Flächen eine Fläche 4ter Ordnung, die durch die Basen der Büschel geht.

Die Gleichung zwischen λ und μ kann nun vereinfacht werden. Lässt man S und Σ sich entsprechen, und ebenso S_1, Σ_1, so müssen λ und μ gleichzeitig Null und Unendlich werden. Die Gleichung wird dann $\lambda + k\mu = 0$. Entspricht aber S der Fläche Σ_1 und S_1 derjenigen Σ, so ergiebt eine ähnliche Betrachtung: $\lambda\mu + k = 0$. Daher hat man folgende beide Formen der Gleichung jener Fläche 4ten Grades:

$$S\Sigma_1 + kS_1\Sigma = 0 \quad \text{und} \quad S\Sigma + kS_1\Sigma_1 = 0.$$

Beide Formen lassen eine doppelte Erzeugungsart der Fläche 4ten Grades durch Raumcurven 4ter Ordnung erkennen. Es werden nun folgende Fälle behandelt:

I. Jedes Büschel besteht aus Flächen, von denen eine alle übrigen doppelt berührt.

II. Beide Büschel bestehen aus Flächen, die eine ebene Berührungscurve gemein haben.

III. Eins der Büschel besteht aus homothetischen Flächen; d. i. ihre ebene Berührungscurve liegt im Unendlichen. Sind beide Büschel homothetisch, so wird die Fläche vom dritten Grade.

IV. Die Büschel sind Kugelbüschel.

Bekanntere Flächen, wie die Wellenfläche von Fresnel, die anallagmatischen Flächen von Moutard, der Torus, die Cyclide treten bei dieser Discussion als besondere Fälle auf.

Mz.

A. Cayley. On the quartic surface $(+)(U, V, W)^2 = 0$.
Quart. J. X. 24-34. 1869.

Der Verfasser untersucht diejenigen Oberflächen 4ter Ordnung, die in der Gleichung $(+)(U, V, W)^2 = 0$ enthalten sind, wo U, V, W quadratische Functionen der Coordinaten bedeuten. Die 8 Durchschnittspunkte der Flächen

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0$$

sind Knotenpunkte der Fläche. Da jedoch 8 beliebig gewählte Punkte nicht Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung sind, so folgt, dass diese Flächen nicht die allgemeinsten Flächen 4ter Ordnung mit 8 Knotenpunkten sind.

Der Herr Verfasser ist jedoch der Meinung, dass in obiger Gleichung alle Flächen dieser Art enthalten sind, deren 8 Knotenpunkte die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung sind, und ferner, dass man durch Particularisiren irgend eine grössere Anzahl von Knotenpunkten (bis zu 16, die grösstmöglichste Zahl für Flächen zweiter Ordnung) erhalten kann.

Setzt man für U, V, W lineare Functionen derselben, so kann man die Form der Gleichung wie die eines Kegelschnitts vereinfachen und z. B. auf die Form

$$V^2 - UW = 0$$

bringen, welche vollständig allgemein ist. In dieser Form werden diejenigen Fälle untersucht, wo U und W in Ebenenpaare zerfallen.

Sind P und Q lineare Functionen der Coordinaten, so giebt

$$V^2 - P^3 Q = 0$$

die allgemeinste Fläche mit einer Rückkehrcurve 2ter Ordnung und diese kann ferner so particularisirt werden, dass noch ein Knotenpunkt hinzutritt. Ebenso ist

$$V^2 - P^2 W = 0$$

die allgemeinste Fläche mit einem Kegelschnitt als Doppelcurve, die keinen weiteren Doppelpunkt enthält. Durch Particularisiren kann man noch 1, 2, 3 oder 4 Knotenpunkte erhalten, und mehr sind nicht möglich. Die Bestimmung der Constanten wird für alle diese Fälle durchgeführt. He.

A. Cayley. On the quartic surfaces $(+)(U, V, W)^2 = 0$.
Quart. J. XI. 35. 1870.

Fortsetzung der obigen Arbeit. Hier werden solche Flächen betrachtet, welche reciprok sind zu 1) dem parabolischen Ringe vom 6ten Grade, 2) dem elliptischen Ringe vom 8ten Grade, 3) der Fläche, welche der Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte eines Paraboloids ist, vom 9ten Grade, 4) der Parallelfläche eines Paraboloids vom 10ten Grade, 5) der Umhüllungsfläche von Ebenen, die zu Radien aus dem Mittelpunkte eines Ellipsoids in deren Endpunkten senkrecht sind, vom 10ten Grade, 6) der Fläche, auf welcher die Hauptkrümmungsmittelpunkte eines Ellipsoids liegen, vom 12ten Grade, 7) der Parallelfläche eines Ellipsoids vom 12ten Grade. Die Reciprocität wird durch die imaginäre Kugel $x^2+y^2+z^2+w^2 = 0$ hervorgebracht. Am Schlusse wird noch der allgemeine Torus, d. i. die Fläche, welche ein Kegelschnitt erzeugt, der sich um irgend eine Gerade des Raumes dreht, betrachtet. Mz.

L. Cremona. Sulle superficie gobbe di quarto grado.
Mem. di Bologna. (2) VIII. 1869.

Der Zweck dieser interessanten Abhandlung ist die Bestimmung der verschiedenen Arten der windschiefen Flächen 4ten Grades. Herr Cayley hat schon in seinem „Second memoir on skew surfaces otherwise scrolls" (Philos. Trans. 1864) eine ähnliche Untersuchung angestellt und 8 Arten solcher Flächen bestimmt, ohne jedoch den Weg anzugeben, der ihn zu diesem Resultate geführt, und ohne zu beweisen, dass dies die einzig möglichen seien, wenn er auch versichert, keine anderen gefunden zu haben. Herr Cremona nimmt zur Charakteristik der Arten die simultane Betrachtung der Doppelcurven und der Enveloppe der doppelt berührenden Ebenen. Er theilt die Oberflächen in zwei Gattungen, je nachdem sie zur Gattung 0 oder 1 gehören. Er erhält dabei nicht nur die 8 von Herrn Cayley gefundenen Arten, sondern auch noch 4 andere, die zur Gattung 0 gehören. Von diesen neuen Arten, die der Verf. als 1te, 3te, 4te, 8te bezeichnet, ist die erste eine windschiefe Fläche 4ten Grades, deren Doppelcurve eine cubische Raumcurve und deren Enveloppe der doppelt

berührenden Ebenen eine Enveloppe der dritten Classe ist; die 3te eine windschiefe Fläche 4ten Grades, mit einer dreifachen Geraden einerseits und einer Geraden und einem Quadrikegel andrerseits; die 4te eine Fläche mit einem Doppelkegel und einer in einem Punkte zweifach schneidenden Geraden einerseits und einer Geraden, betrachtet als Enveloppe der dreifach berührenden Ebenen andererseits; die 8te endlich eine Fläche mit einer dreifachen Geraden einerseits und einer wirklichen Enveloppe der dritten Classe andererseits. Was die Erzeugung dieser und der andern 8 Arten der Flächen betrifft, so verweisen wir auf die Abhandlung selbst, der der Verfasser eine Tabelle beigefügt hat, die übersichtlich die vollständige Classification der windschiefen Flächen vierten Grades darlegt. Wir bemerken nur noch, dass die 3te und 4te Art untereinander reciprok sind, während die 7te und 8te jede der andern und sich selbst reciprok ist. Jg. (O.)

A. Cayley. On the geometrical interpretation of the covariants of a binary cubic. Quart. J. X. 148-149. 1869.

Betrachtet man in den cubischen Formen

$$U = (abcd)(x, y)^3 u,$$

die Coefficienten *abcd* als Coordinaten eines Punktes im Raume, *x, y* als Parameter, so erhalten die Coordinaten von *U* eine einfache Bedeutung.

Die Discriminante $\nabla = 0$ repräsentirt eine abwickelbare Fläche 4ter Ordnung.

$U = 0$ ist Tangentenebene längs einer Geraden.

Die Hesse'sche Determinante $H = 0$ ist die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, welcher durch die Cuspidallinie der Fläche geht u. s. w. He.

H. Lemonnier. Étude analytique sur la cyclide. Nouv. Ann. (2) IX. 514-527. 1870.

Die betrachtete Fläche ist die Einhüllende einer Kugel, deren Mittelpunkt sich auf einem Kegelschnitt fortbewegt, während ihr Radius proportional dem Abstande des Mittelpunktes von einer in der Ebene des Kegelschnittes gegebenen Geraden *D*

ist. Die Gleichung dieser Fläche wird unter der Bedingung hergeleitet, dass die aufeinanderfolgenden Schnittebenen durch eine und dieselbe Gerade D' gehen. Von den Geraden D und D' gilt, dass immer nur eine die Fläche schneiden kann. Es werden dann die ebenen Schnitte der Fläche betrachtet, welche durch eine der Geraden D oder D' gehen. Dabei ergiebt sich, dass die untersuchte Fläche auch eine zweite, der ersten ganz analoge, Erzeugung mit Hilfe der Linie D' statt der Linie D gestattet. Die beiden Systeme von Krümmungslinien der untersuchten Fläche sind Kreise, daraus wird der Schluss gezogen, dass sie selbst eine Cyclide ist. Die Untersuchung paralleler Cycliden bildet den Schluss. T.

A. Enneper. Die cyklischen Flächen. Schlömilch Z. XIV. 393-421. 1869.

Als cyklische Flächen werden diejenigen definirt, welche durch einen Kreis erzeugt werden; der Kreiss heisst in Bezug auf die erzeugte Fläche Generatrix. Ein bekanntes Beispiel dieser Flächen ist diejenige, welche durch die Krümmungskreise der Normalschnitte in einem Punkte einer beliebigen Fläche gebildet wird. Eine andere Fläche dieser Art wird dadurch erhalten, dass man den Mittelpunkt der Generatrix auf einer Geraden fortrücken lässt. Die Gleichungen dieser beiden Arten von cyklischen Flächen werden entwickelt. Die Coordinaten eines Punktes einer cyklischen Fläche lassen sich als Functionen zweier Veränderlichen darstellen und so wird dann die allgemeine Gleichung einer cyklischen Fläche hergeleitet. Diese Gleichung giebt dann unmittelbar die Lösung des Problems, die cyklische Fläche zu finden, welche die Eigenschaft hat, dass in jedem ihrer Punkte die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwindet.

Bewegt sich eine Kugel mit veränderlichem Radius so fort, dass ihr Mittelpunkt auf einer Curve doppelter Krümmung hingleitet, dann wird die Kugelfläche von einer cyklischen Fläche eingehüllt, und eine solche cyklische Fläche besitzt die Eigenschaft, dass in einem jeden Punkt einer Generatrix einer der Hauptkrümmungshalbmesser der cyklischen Fläche constant ist.

Sind die Ebenen der Generatricen einer cyklischen Fläche zugleich Krümmungsebenen einer Curve, welche auf der Fläche liegt, und die Tangenten der Generatrix gleichzeitig Tangenten der Curve, dann drücken bestimmte Bedingungsgleichungen diese Eigenschaft aus, und umgekehrt, wenn diese Gleichungen erfüllt sind, sind auch die Ebenen der Generatricen Krümmungsebenen und ihre Tangenten Tangenten einer Curve, welche auf der cyklischen Fläche liegt.

Die Generatricen einer cyklischen Fläche schneiden sich in ihren aufeinander folgenden Lagen im Allgemeinen nicht, aber wenn sie sich schneiden, dann ist die cyklische Fläche die Umhüllungsfläche einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf einer beliebigen Curve fortrückt. Beide Schnittpunkte können auch zusammenfallen, dann ist die Tangente der Generatrix gleichzeitig Tangente einer Curve, welche auf der Fläche liegt, die Ebene der Generatrix ist dann entweder Krümmungsebene dieser Curve oder sie geht durch die Tangente der Curve, welche der Mittelpunkt beschreibt.

Wenn die Generatricen einer cyklischen Fläche in ihren aufeinanderfolgenden Lagen sich nicht schneiden, so wird der Abstand zweier Punkte derselben im Allgemeinen nicht constant sein, es muss Punkte geben, für welche ein Maximum und andere, für welche ein Minimum der Entfernung stattfindet. Die Gesammtheit dieser Punkte wird auf einer Curve für das Maximum und auf einer für das Minimum liegen. Diese Curven werden Strictionslinien genannt. Der Untersuchung der Strictionslinien ist der übrige Theil der Arbeit gewidmet. T.

De la Gournerie. Mémoire sur les lignes spiriques. Liouville J. (2) XIV. 9-64. 103-138. 1869.

In der Einleitung zu dieser Arbeit über spirische Linien wird zunächst eine specielle Involution vierter Ordnung besprochen, welche zur Discussion der spirischen Linien sehr brauchbar ist. Sie ist dadurch charakterisirt, dass alle ihre Gruppen von Punkten dieselben Inversionsmittelpunkte haben. Den zweiten Theil der Einleitung bilden allgemeine Sätze über anallagmatische Curven. Darunter werden nach Moutard die-

jenigen ebenen Curven verstanden, welche in Beziehung auf einen bestimmten Inversionskreis ihre eigenen Transformirten sind. Demnach können die anallagmatischen Curven auch als die Einhüllenden eines zu einem festen Kreise rechtwinkligen Kreises angesehen werden, dessen Radius veränderlich ist, und dessen Mittelpunkt eine gegebene Curve, déférent genannt, durchläuft.

Daran schliesst sich nun die Discussion der spirischen Linien. Man kann dieselben als ebene Schnittcurven einer Torusfläche definiren; da aber von den 6 Torusflächen, welche durch eine gegebene spirische Linie gelegt werden können, bisweilen sämmtliche imaginär werden, so ist es besser die spirische Linie durch eine ihrer charakteristischen Eigenschaften zu definiren, und so wird sie denn als diejenige ebene Curve vierter Ordnung definirt, welche eine Symmetrieaxe und zwei auf einem Kreise im Unendlichen gelegene Doppelpunkte besitzt. Die Ebene, welche zur Ebene der Curve senkrecht ist und die Symmetrieaxe enthält, wird Hauptebene genannt. Es werden nun die Fundamentaleigenschaften und die Fundamentalformeln der spirischen Linien abgehandelt. Daran schliesst sich dann die Betrachtung der Erzeugung spirischer Linien als anallagmatischer Curven.

Für den Fall, dass die Coefficienten der ungeraden Potenzen von x in der Gleichung der Curve gleichzeitig verschwinden, erhält die spirische Linie einen Mittelpunkt, sie besitzt dann zwei Symmetrieaxen und auch zwei Hauptebenen. Die allgemeinen Formeln sind auf diesen speciellen Fall nicht anwendbar, und so wird denn die spirische Linie mit einem Mittelpunkte besonders discutirt.

Ferner beschäftigt sich die Arbeit mit der Untersuchung der Eigenschaften der Brennpunkte und mit den confocalen spirischen Linien; ein jedes System confokaler spirischer Linien enthält eine kreisförmige kubische (cubique-circulaire) Linie, deren Eigenschaften besonders untersucht werden. Es folgt nun eine Classification sämmtlicher spirischer Linien. Den Schluss bildet die Untersuchung der spirischen Linien, welche einen Doppelpunkt auf ihrer Axe haben, und derjenigen, welche einen Mittelpunkt besitzen. (Fortschr. d. M. I. 250-251.) T.

Laguerre. Sur quelques propriétés des lignes spiriques. Inst. I. sect. XXXVII. 365-367. 1869.

Die spirischen Linien haben, wie alle anallagmatische Curven vier singuläre Brennpunkte, von denen zwei reell und zwei imaginär sind. Je nachdem die beiden reellen oder die beiden imaginären Brennpunkte auf der Symmetrieaxe liegen, erhält man besondere Arten der spirischen Linien. Die in der Note angegebenen Sätze betreffen nur diejenigen spirischen Linien, welche die reellen Brennpunkte auf der Axe haben. Sie ergeben sich aus folgendem Satze: Sind auf einer spirischen Linie zwei feste Punkte A und B und ein beweglicher C gegeben, und errichtet man in den Halbirungspunkten der Sehnen AC und BC Lothe, dann bestimmen diese Lothe auf der Axe der spirischen Linie zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte die beiden reellen Brennpunkte sind. T.

Laguerre. Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre. Liouville J. (2) XV. 193-216. 1870.

Chasles hat bewiesen, dass eine bewegliche Gerade, welche gezwungen ist, zwei feste im Raume gegebene Geraden stets zu schneiden, eine Raumcurve vierter Ordnung beschreibt, wenn sie sich bei ihrer Bewegung auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung stützt. Diese Curve ist so beschaffen, dass man eine beliebige Anzahl von Flächen zweiter Ordnung durch sie hindurch legen kann. Ist nun umgekehrt eine Raumcurve gegeben, welche der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist, dann kann man die Frage aufwerfen, ob sie immer durch die vorher angegebene Erzeugung entstanden gedacht werden kann, und wie man in dem Falle der Möglichkeit dieser Erzeugung die dazu nöthige Oberfläche zweiter Ordnung und die beiden festen Geraden bestimmen könne. Diese Fragen werden nun in der vorliegenden Arbeit dahin beantwortet, dass man durch die gegebene Curve stets sechs Oberflächen zweiter Ordnung legen kann, welche die angegebene Erzeugung gestatten, und dass man, wenn eine von diesen sechs Oberflächen ausgewählt ist, noch auf beliebig viele Weisen die beiden festen Geraden wählen darf.

Durch die gegebene Curve können vier Kegel zweiten Grades gelegt werden; deren Spitzen *O, P, Q, R* bestimmen die Ecken eines Tetraeders. Gruppirt man diese Punkte zu je zweien, so bestimmen sie stets zwei einander gegenüberliegende Kanten des Tetraeders, z. B. *OP* und *QR*; schneidet man diese Kanten durch irgend eine Gerade, dann wird dieselbe die gegebene Curve in einem Punkte *A* und auch noch in einem zweiten Punkte *B* schneiden. Bestimmt man alle diese Punktepaare *A* und *B* in Beziehung auf die Kanten *OP* und *QR*, dann bilden die Geraden, welche die zusammengehörenden Punkte verbinden, eine Kegelfläche vierter Ordnung, welche die Kanten *OP* und *QR* zu Doppellinien hat. Diese Fläche mag durch T_p bezeichnet werden. Ganz analoge Flächen T_q und T_r existiren für die Kanten *OQ* und *PR* und für *OR* und *PQ*.

Durch die Gerade *AB* kann man 4 Tangential-Ebenen zur Curve legen; die 4 Berührungspunkte X^{I}, X^{II}, X^{III}, X^{IV} derselben bilden die Ecken eines neuen Tetraeders, dessen zwei gegenüberstehende Kanten $X^{I}X^{II}$ und $X^{III}X^{IV}$ die gegenüberstehenden Kanten *OP* und *QR* des ersten schneiden. Wählen wir aus den Kanten $X^{I}X^{II}$, dann ergiebt sich, dass die Geraden AX^{I}, AX^{II}, BX^{I} und BX^{II} auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung S_p liegen, welche durch die gegebene Curve geht. Eine analoge Fläche $S_{p'}$ ergiebt sich durch Benutzung der Kante $X^{III}X^{IV}$; durch Anwendung der Flächen T_q und T_r erhält man dann noch 4 Flächen zweiter Ordnung S_q, $S_{q'}$, S_r und $S_{r'}$. Diese Flächen *S* haben also die Eigenschaft, dass einer jeden von ihnen eine Regelfläche 4ter Ordnung entspricht, deren jede Erzeugende die gegebene Curve in zwei Punkten trifft. Weiter ergiebt sich, wenn eine Gerade sich so bewegt, dass sie stets die Geraden *AB* und $X^{I}X^{II}$ schneidet, indem sie sich auf eine der Flächen zweiter Ordnung *S* stützt, dann erzeugt sie die gegebene Curve. Hat man eine der Flächen *S* ausgewählt, dann kann man die beiden Geraden *AB* und $X^{I}X^{II}$ noch auf unendlich viele Weisen auswählen.

Die Regelflächen der vierten Ordnung, welche sich durch die Untersuchung ergaben, nämlich die Flächen: T_p, T_q und T_r sind die von de la Gournerie unter dem Namen beschränkte

Quadricuspidalen (qu. limites) untersuchten Flächen. (Recherches sur les surfaces tétraédrales symmétriques p. 85). Sie gehören zu den allgemeineren Regelflächen 8ter Ordnung, welche Quadricuspidalen genannt sind. Diese können mit Hilfe der Durchschnittscurve K zweier Flächen zweiter Ordnung erzeugt werden.

Aus dieser Definition der Quadricuspidalen werden dann noch am Schluss einige Eigenschaften derselben hergeleitet.

Zur Literatur ist zu bemerken:

Clebsch: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. Borchardt J. LXIII.

Hesse: Ueber die Curven dritter Ordnung. Borchardt J. XLVIII.

Van Reiss: Ueber die Focalen. Journal de Quetelet V.

De la Gournerie: Recherches sur les surfaces tétraédrales symmétriques. T.

De la Gournerie. Note sur les quadricuspidales. Liouville J. (2) XV. 264-266. 1869.

Die von Laguerre in seiner eben besprochenen Arbeit gegebene Definition der Quadricuspidalen veranlasst den Herrn Verf. auf diese Flächen zurückzukommen. Er erörtert in dieser Note einige Sätze, welche sich leicht an die von Laguerre gegebene Definition anschliessen lassen. T.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1870. Question 6. Messenger V. 191-192. 1870.

Die Oberfläche, parallel zum Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(in der Entfernung k) ist die Enveloppe zu den Oberflächen 4ten Grades

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho}+\frac{y^2}{b^2+\varrho}+\frac{z^2}{c^2+\varrho}-\frac{k^2}{\varrho}=0,$$

wo ϱ der veränderliche Parameter ist. Analytisch kann man die Gleichung erhalten, indem man die Discriminante in Bezug auf ϱ der Function

$$\varrho(a^2+\varrho)(b^2+\varrho)(c^2+\varrho)\left(1+\frac{k^2}{\varrho}-\frac{x^2}{a^2+\varrho}-\frac{y^2}{b^2+\varrho}-\frac{z^2}{c^2+\varrho}\right)$$

gleich Null setzt. Glr. (O.)

E. Lampe. Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes. Pr. Berlin 1870.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit den Beziehungen der Fresnel'schen Wellenfläche zu der Fläche vierten Grades mit 16 singulären Punkten, welche Herr Kummer zuerst behandelt hat, (Monatsberichte der Berl. Akad. für 1864 p. 246 und p. 495. Abhandlungen der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1866 p. 62) und welche die Wellenfläche als eine besondere Form in sich schliesst. Nach einigen Bemerkungen über besondere Gleichungsformen von Flächen vierten Grades mit singulären Tangentialebenen, stellt der Verf. die Gleichung der Wellenfläche in den drei Formen dar, welche Herr Kummer der Gleichung der allgemeinen Fläche gegeben hat, entwickelt die Gleichung der Reciproken der Kummer'schen Fläche, und wendet sich schliesslich zu folgendem Problem: „Den Ort des Mittelpunkts eines Kegels zu bestimmen, welcher eine Fläche zweiter Ordnung einhüllt und dessen Schnitte, parallel einer der Hauptebenen, gleichseitige Hyperbeln sind“. Der gesuchte Ort ist im Allgemeinen eine Fresnel'sche Wellenfläche.

Schn.

Frosch. Die singulären Punkte und Tangentialebenen der Wellenoberfläche. Pr. Schneidemühl. 1870.

Der Titel verspricht mehr als die Arbeit enthält. Bekanntlich erhält man, wenn man die ersten Ableitungen der homogen gemachten Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche gleich Null setzt, 16 singuläre Punkte; es werden die 4 singulären Punkte auf der einen Coordinaten-Ebene reell, die je 4 auf den beiden andern Coordinaten-Ebenen imaginär, und die letzten 4 liegen in der unendlich entfernten Ebene. Aus den Coordinaten der singulären Punkte ergeben sich sofort durch Substitution der reciproken Werthe der Halbaxen die Tangentialebenen. Der Verf. stellt nur die 4 reellen Doppelpunkte und die entsprechenden Tangentialebenen auf.

M.

E. Catalan. Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes. Rapport de Gilbert. Bull. de Belg. (2) XXVII. 129-142. 1869.

Die Transformation ist folgende: Durch einen festen Punkt *O* zieht man in der Ebene, die durch die Normale *mn* eines Punktes *m* einer gegebenen Oberfläche *s* geht, die Gerade *OM*, gleich und senkrecht zu *Om*. Der geometrische Ort des Punktes *M* giebt dann eine neue aus der ursprünglichen *s* abgeleitete Oberfläche *S*. Der Herr Verfasser bestimmt die analytischen Relationen zwischen beiden Oberflächen und gelangt zu folgendem Satz: Die Normalen in zwei entsprechenden Punkten der beiden Oberflächen *s* und *S* liegen in der Ebene der Radiusvectoren dieser Punkte und sind auf einander senkrecht. Herr Catalan nennt solche Flächen, die, wie der Berichterstatter erwähnt, schon bei Mac-Cullagh und Salmon (der sie apsidales nennt) vorkommen. Es folgen dann in dem Berichte Specialitäten und Anwendungen auf die Wellenfläche, begleitet mit einem Ueberblick über die Theorie derselben. Da die Arbeit jedoch in den Memoiren d. A. noch abgedruckt wird, begnügen wir uns hier mit dieser Notiz. O.

E. Catalan. Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées. Rapport de Steichen. Bull. de Belg. (2) XXVIII. 21-24. 1869.

Nach dem kurzen Bericht besteht der Inhalt der Arbeit in folgenden Sätzen: 1) „Die Schnitte zweier conjugirter Flächen *s*, *S*, mit einer Kugel, deren Mittelpunkt im Pole liegt, sind correspondirende Curven; diese Curven sind parallel, d. h. sie haben in 2 entsprechenden Punkten dieselbe Normal-Ebene. (Ebene der Correspondenz)". 2) „Die Tangenten an Anziehungslinien (lignes d'attraction) in zwei correspondirenden Punkten sind nicht correspondirende Richtungen". 3) „Das Verhältniss unendlich kleiner correspondirender Flächen auf zwei conjugirten Oberflächen ist gleich der Tangente des Winkels, den der Radius vector *Om* mit der Ebene bildet, die in *M* die Trajectorie osculirt".

Unter Anziehungslinie wird eine Curve verstanden, deren Tangente in m enthalten ist in der Ebene, die durch die Normale mn für s und den Pol O geht. O.

Ph. Gilbert. Sur quelques propriétés des surfaces apsidales. Bull. de Belg. (2) XXVIII. 21-24. 31-53. 1869.

A. Enneper. Zur Charakteristik der Helicoidflächen. Gött. Nachr. 1870. 335-343.

Die Helicoidfläche wird folgendermassen definirt: Durchläuft ein fester Punkt einer ebenen Curve eine Helix (Schraubenlinie) eines Kreiscylinders, während die Ebene der Curve beständig durch die Axe des Cylinders geht, so erzeugt die Curve eine Helicoidfläche. Wird die Axe des Cylinders zur z-Axe genommen, so ist die allgemeine Gleichung dieser Flächen:

$$z = m \operatorname{arctang} \frac{y}{x} + F(x^2+y^2),$$

wo m eine Constante und $F(r)$ eine beliebige Function von r ist. Für diese eine Gleichung setzt der Verfasser folgende drei:

$$x = p\cos w, \quad y = p\sin w, \quad z = mw+q,$$

wo p und q Functionen einer Variablen v sind,

$$w = gu + f(v),$$

während g eine Constante und $f(v)$ eine beliebige Function von v ist. Es sind nun folgende Ausdrücke:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nur von der Variablen v abhängig.

Der Verfasser unternimmt es nun, zu beweisen, dass auch umgekehrt: wenn in einer Fläche diese Grössen E, F, G, A, B, C nur von einer der Variablen u oder v abhängen, diese Fläche eine Helikoidfläche ist.

Mz.

W. K. Clifford. On the umbilics of anallagmatic surfaces. Rep. Brit. Ass. 1869. Mondes XXI. 412.

Csy.

Staudigl. Untersuchung einiger Gewölbformen, durch welche ein Raum mit trapezoidförmigem Grundrisse überwölbt werden kann. Schlömilch Z. XIV. 97-120. 1869.

Die erste der untersuchten Gewölbformen ist eine windschiefe Gewölbform mit horizontaler Richtebene und zwei elliptischen Leitlinien, welche zugleich Stirnbogen sind. Als elliptische Leitlinien werden halbe Ellipsen mit gleichen vertikalen Axen angenommen; dann theilen die horizontalen Projectionen der Erzeugenden die Grundrissseiten, über welchen die elliptischen Leitlinien angenommen werden, proportional und sind unabhängig von der Grösse der vertikalen Axe. Diese Gewölbform wird durch eine jede vertikale Ebene, welche die beiden Widerlagslinien proportional theilt, so dass die grösseren oder kleineren Theile an demselben Stirnbogen liegen, in einer Ellipse geschnitten, welche dieselbe vertikale Axe hat wie die Stirnbogen und deren horizontale Axe die Verbindungslinie der Theilpunkte ist. Als zweite Gewölbform wird eine Form untersucht, für welche alle vier Stirnbogen halbe Ellipsen mit gleichen vertikalen Axen sind. Für die elliptischen Schnitte dieser Form ergiebt

sich, dass jede vertikale Ebene, welche zwei gegenüberliegende Seiten des Grundrisses proportional theilt, so dass die grösseren oder kleineren Segmente derselben Grundrissseite anliegen, als Schnitt eine Ellipse giebt, deren vertikale Halbaxe der vertikalen Halbaxe der Stirnbogen gleich ist.

Die beiden noch behandelten Gewölbformen sind Kreuzgewölbformen. Die erste von diesen besitzt als Stirnbogen zwei halbe Ellipsen mit gleichen vertikalen Axen. Die Ellipsen werden zugleich als Leitlinien für zwei gerade Conoide angenommen, deren Richtebene als horizontal vorausgesetzt wird, und deren Durchdringung die Kreuzgewölbform giebt. Besonders untersucht werden die horizontalen Projectionen der Gratbogen dieser Kreuzgewölbform. Als Resultat ergiebt sich, dass von diesen Projectionen, welche von der vertikalen Halbaxe der elliptischen Leitlinien unabhängig sind, im Allgemeinen die eine elliptisch und dann die andere hyperbolisch sein muss. Es kann aber die eine auch geradlinig und dann die andere kreisförmig sein. Es wird dann noch der Fall erörtert, in dem die elliptischen Leitlinien nicht zugleich Stirnbogen sind, auch hier werden die horizontalen Projectionen der Gratbogen einer besonderen analytischen Betrachtung unterworfen. Die letzte Gewölbform, welche untersucht wird, ist eine Kreuzgewölbform, welche aus windschiefen Flächen mit einer horizontalen Richtebene und zwei elliptischen Leitlinien besteht. Hierbei erhält man vier Stirnbogen, welche halbe Ellipsen mit gleichen Halbaxen sind. Die Construction der Erzeugenden und der Gratbogen wird besprochen und die horizontalen Projectionen derselben werden analytisch untersucht. Als Resultat ergiebt sich, dass die Umhüllende der horizontalen Projectionen aller Erzeugenden eine Parabel ist, ferner dass die horizontalen Projectionen der Gratbogen parabolische Segmente sind, deren Axen parallel sind zur Axe der Parabel, welche die horizontalen Projectionen der Erzeugenden beider Flächen umhüllt. Wenigstens eine der Parabeln, deren Segmente Projectionen der Gratbogen sind, muss die umhüllende Parabel berühren.

T.

L. Burmester. Ueber Isophoten. (Linien gleicher Lichtintensität). Zweiter Theil. Schlömilch Z. XIV. 310-328. 1869.

Der erste Theil dieser Arbeit (Schlömilch Z. XIII. 267) ist bereits im ersten Bande dieser Zeitschrift (cf. p. 255) besprochen worden. In dem gegenwärtigen zweiten Theile werden die Eigenschaften der Isophoten der Flächen zweiter Ordnung erörtert und geometrische Constructionen für dieselben angegeben.

T.

A. R. Clarke. On the course of geodesic lines on the Earth's surface. Phil. Mag. XXXIX. 252-263. 1870.

Csy.

L. Lindelöf. Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée renferment le plus grand volume. Bull. de St. Pét. XIV. 237-269. 1869. Clebsch Ann. II. 150-159. 1870.

Der Verfasser beweist auf einem grösstentheils analytischen Wege den Steiner'schen Satz:

„Von allen convexen Polyedern, welche dieselbe Flächenzahl und gleiche Oberfläche haben, hat dasjenige den grössten Inhalt, welchem eine Kugel eingeschrieben werden kann, die jede Polyederfläche in ihrem Schwerpunkte berührt".

Ni.

L. Lindelöf. Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minima. Clebsch Ann. II. 160-166. 1870.

Die Catenoide (Kettenfläche, d. h. die durch Rotation einer Kettenlinie um ihre Axe entstandene Fläche) ist bekanntlich die kleinste Rotationsfläche zwischen zwei gegebenen Kreisen. Jedoch kommt ihr diese Eigenschaft nur in gewissen Grenzen zu. Diese Grenzen in einem allgemeineren Falle, als bis dahin geschehen zu bestimmen, ist dem Verfasser bereits in seinem

Werke, leçons de calcul de variations (Paris 1861) gelungen. Er ist dabei zu dem Resultate gelangt, dass wenn man den einen Endpunkt der erzeugenden Kettenlinie beliebig nimmt, die erzeugte Oberfläche dann die Minimaleigenschaft verliert, wenn der andere Endpunkt sich von dem ersten entfernend eine solche Lage annimmt, dass die in beiden Endpunkten gezogenen Tangenten sich in der Rotationsaxe schneiden. Der Verfasser giebt hier einen mehr elementaren Beweis als am angeführten Orte, und zugleich einige darauf bezügliche numerische Rechnungen. Veranlassung ist ihm der Umstand, dass Plateau, welcher die fraglichen Flächen als Gleichgewichtsfiguren der Flüssigkeiten experimentell darstellt, auf die Arbeit des Verfassers bei seinen Untersuchungen bis jetzt keine Rücksicht genommen hat, wozu derselbe schliesslich aufgefordert wird. Ni.

R. Baltzer. Ueber den Ausdruck des Tetraeders durch die Coordinaten der Eckpunkte. Leipzig Ber. 1870. 97-98.

Nachdem der Verfasser eine kurze historische Uebersicht über die Literatur des Gegenstandes unter Namhaftmachung der einzelnen Autoren gegeben hat, theilt er eine höchst einfache Ableitung der Formel für das sechsfache Tetraeder-Volumen mit, die wegen der der ganzen Entwicklung innewohnenden Kürze hier Platz finden möge.

Bedeutet NC den Abstand des Punktes C von der Ebene OAB, so ist auch dem Zeichen nach

$$3OABC = OAB.NC.$$

Legt man durch O drei beliebige Axen, in Bezug auf welche A die Coordinaten x_1, y_1, z_1 habe u. s w., so findet man durch Projection der aus den Coordinaten von C bestehenden gebrochenen Linie auf die Normale n der Ebene OAB:

$$NC = x_3 \cos xn + y_3 \cos yn + z_3 \cos zn.$$

Werden ferner die Fläche OAB und ihre Projectionen parallel mit x, y, z auf die Ebenen yz, xz, xy durch p, p_x, p_y, p_z bezeichnet, die Normalen der Ebenen yz, xz, xy durch x', y', z', so hat der Normalschnitt des Prismas, welches die Fläche OAB

parallel mit x auf die Ebene yz projicirt, die Werthe

$$p\cos xn = p_x . \cos xx'$$

u. s. w. Nun hat das Parallelepipedon, dessen Kanten auf x, y, z positive Einheiten sind, die Werthe

$$\sin yz \cos xx' = \sin xz \cos yy' = \sin xy \cos zz' = \sin xyz.$$

Folglich ist

$$2p\cos xn = \frac{2p_x}{\sin yz}\sin xyz = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz$$

u. s. w.

Durch Vereinigung der drei Determinanten findet man:

$$6OABC = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Wenn man die Geraden, auf denen die Kanten OA, OB, OC liegen, durch f, g, h bezeichnet, so ergeben sich, unter Voraussetzung eines orthogonalen Systems, bei dem $\sin xyz = 1$, leicht die Gauss'sche und Staudt'sche Gleichung, sowie durch Vereinigung beider Systeme:

$$\sin^2 fgh = \begin{vmatrix} 1 & \cos fg & \cos fh \\ \cos fg & 1 & \cos gh \\ \cos fh & \cos gh & 1 \end{vmatrix}.$$

Wtn.

A. Cayley. A third memoir on skew surfaces otherwise scrolls. Trans. of Lond. CLIX. 111-126. 1869.

Eine Ergänzung der zweiten Abhandlung über krumme Flächen CLIV. (1864). Es werden 2 neue Gattungen (die 9te und 10te) von Flächen vierten Grades aufgestellt. Ein Zusatz besagt, dass Prof. Cremona im Ganzen 12 Gattungen solcher Flächen zählt.

Cly. (M.).

A. Cayley. On certain skew surfaces otherwise scrolls. Trans. of. Cambridge. XI. 277-289. 1869.

Diese Untersuchungen wurden veranlasst durch die Abhandlungen von de la Gournerie (C. R. 1865 u. 1866, und „Sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques etc." Paris 1867). Ob-

wohl die meisten Resultate mit denen de la G.'s übereinstimmen, so ist doch die Art der Behandlung verschieden und allgemeiner, indem die Ordnungen etc. der verschiedenen krummen Flächen durch Betrachtungen erhalten sind, die sich auf die Theorie des Entsprecheus beziehen. Cly. (M.)

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

D. Chelini. Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, d'aree e di punti. Mem. di Bologna X. 1870.

Nach dem Princip, welches dahin strebt, viele Betrachtungen auf die reine Geometrie zurückzuführen, welche bisher in der Mechanik behandelt sind, welche aber in Wirklichkeit dieser fremde Fragen sind, da sie ja nur als Anwendungen ausgesprochen zu werden pflegten, widmet der Verfasser den ersten Theil seiner Abhandlung der Theorie der Zusammensetzung von Systemen von Geraden nach Art der Zusammensetzung der Kräfte oder Geschwindigkeiten, und zeigt die Reduction eines solchen Systems auf eine Gerade und auf ein Paar oder auf zwei Gerade, welche sich nicht schneiden, wobei er Gelegenheit findet, diese Eigenschaft unter mehreren Gesichtspunkten darzustellen, die schon von Poinsot und Chasles aufgestellt sind. Im zweiten Theil werden in analoger Weise Systeme von ebenen Flächen betrachtet und die Beweise für einige Sätze von Chasles und Cayley gegeben. Dort befindet sich speciell die Formel:

$$6\Sigma V = RG'\cos(RG') + R'G\cos(R'G),$$

wo V das Volumen eines der Tetraeder ist, die zu entgegengesetzten Kanten zwei verschiedenen Systemen angehörige Geraden haben, von denen das eine auf die Gerade R und das Paar G, das andere auf die Gerade R' und das Paar G' reducirbar ist. Der dritte Theil bezieht sich auf mit numerischen Coefficienten behaftete Punkte (in der Mechanik den Massen entsprechend)

und enthält auf die Anschauung gegründete Beweise für die Fundamentaleigenschaften bezüglich der Momente, der Schwerpunkte und der harmonischen Centren. Der letzte Theil betrachtet die Anwendungen der vorstehenden Bezeichnungen auf die Methoden der homogenen Coordinaten in der Ebene wie im Raume und zeigt ihre Nützlichkeit für Fragen, die ausserhalb der Mechanik liegen. Ein sehr einfaches Beispiel wird hinreichen, die Natur des vom Verfasser befolgten Ganges zu kennzeichnen. Es seien A, B, C die Spitzen, a, b, c die Seiten eines Dreiecks, Δ sein doppelter Flächeninhalt, x, y, z die Lothe von irgend einem Punkte P auf die drei Seiten a, b, c; π, ξ, η, ζ die Lothe von den Punkten P, A, B, C auf eine Gerade R. Da die drei Stücke a, b, c eine geschlossene Figur bilden, so lassen sie sich auf ein Paar des Momentes Δ reduciren, oder wenn man die Momente in Beziehung auf den Punkt P betrachtet, so hat man die bekannte Gleichung:

$$ax+by+cz = \Delta.$$

Setzt man andererseits voraus, dass die Punkte P, A, B, C mit den Coefficienten m, m', m'', m''' behaftet sind, und betrachtet ihre Momente in Beziehung auf die Gerade R, so hat man:

$$m'\xi+m''\eta+m'''\zeta = m\pi,$$

eine Gleichung, aus der man durch successives Zusammenfallenlassen von R mit a, b, c folgern kann

$$m:m':m'':m''' = \Delta:ax:by:cz.$$

Ein bekanntes barycentrisches Theorem stützt der Verfasser auf ein anderes, welches man als dem obigen reciprok betrachten kann, und welches nicht weniger elegant ist. Aus der Proportion geht hervor, dass man die obige Gleichung auch in der Form

$$a\xi x + b\eta y + c\zeta z = \pi\Delta$$

schreiben kann. Diese Formel zeigt, dass die Segmente $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$, betrachtet als auf den Seiten a, b, c existirend, zur Resultante das Segment Δ haben, wenn man es als auf der Geraden R der Coordinaten ξ, η, ζ vorhanden betrachtet. Diese Eigenschaft geht unmittelbar daraus hervor, dass man immer hat

$$\Delta^2 = a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2-2bc\,\eta\zeta\cos A-2ca\,\zeta\xi\cos B-2ab\,\xi\eta\cos C,$$

die bekannte Gleichung für die tangentialen Coordinaten einer Geraden. Setzt man $\pi = 0$, so drückt die Gleichung

$$a\xi x + b\eta y + c\zeta z = 0$$

die Fundamentalrelation zwischen den Coordinaten eines Punktes und einer Geraden aus, wenn die Gerade durch den Punkt geht. Der Verfasser entwickelt mit grosser Genauigkeit die Consequenzen dieser Methode in der Ebene wie im Raum. Zum Schluss der Abhandlung deutet er an, wie er dazu gekommen sei, die Coordinaten einer Geraden in einer Weise zu definiren, die schon von Herrn Zeuthen benutzt worden ist.

Jg. (O.)

J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig. Teubner. Erste Abtheilung mit einem Vorwort von A. Clebsch, 1868. Zweite Abtheilung, herausgegeben von Felix Klein, 1869. Gött. Anz. 1869. 1569-1581.

Ueber das in der Ueberschrift genannte Werk des verstorbenen grossen Geometers wird von Herrn Clebsch in den Gött. Anz. eine Kritik erstattet. Ein Referat über das Werk findet sich bereits im ersten Bande dieser Zeitschrift (cf. Fortschr. d. M. I. p. 198). T.

G. Janni. Esposizione della nuova geometria di Plücker. Battaglini G. VIII. 302. 1870.

Wie schon im ersten Bande p. 198 referirt ist, wird in dieser neuen Plücker'schen Geometrie die gerade Linie als das Element sämmtlicher räumlichen Gebilde betrachtet.

Man findet auch am citirten Orte verdeutlicht, was unter linearen Complexen und linearen Congruenzen zu verstehen ist.

Das System dreier linearen Complexe wird in dieser Abhandlung Configuration genannt; die allen dreien gemeinschaftlichen Strahlen liegen auf einem Hyperboloid.

Mz.

A. Clebsch. Ueber die Plücker'schen Complexe. Clebsch Ann. II. 1-8. 1869.

Mit Anwendung der Plücker'schen Strahlen- und Axencoordinaten p und q kann man die Gleichung eines Plücker'schen Complexes n^{ter} Ordnung auf doppelte Weise schreiben: $F(p) = 0$ oder $\Phi(q) = 0$. Setzt man:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

oder

$$Q = q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} = 0,$$

dann lässt sich, und das ist der Gegenstand der Arbeit,

$$F(p) = 0, \quad (\Phi(q) = 0)$$

immer und nur auf eine Weise durch Anwendung von

$$P = 0 \quad (Q = 0)$$

so modificiren, dass man sie als symbolische Potenz eines solchen linearen Complexes betrachten darf, dessen Gerade sämmtlich eine feste Gerade schneiden. Die so gewonnene Form wird die Normalform der Complexgleichung genannt.

Als Anwendung des Vorigen wird die Gleichung der Fläche vierter Ordnung und vierter Classe aufgestellt, welche bei einem Complexe zweiter Ordnung von der Spitze zerfallender Complexkegel beschrieben und von den Ebenen zerfallender Complexcurven berührt wird (Plücker: Neue Geometrie des Raumes p. 307 folgg.). Andere Anwendungen behält sich der Verf. vor.

T.

v. Drach. Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe. Clebsch Ann. II 128-139. 1870.

Die Bedingung dafür, dass sich zwei Gerade schneiden, ist durch die homogenen Coordinaten, welche von Plücker zur Bestimmung der Geraden als Raumelement eingeführt sind, ausgedrückt durch die Gleichung

$$q'_{03}q_{12} + q'_{13}q_{20} + q'_{23}q_{01} + q'_{12}q_{03} + q'_{20}q_{13} + q'_{01}q_{23} = 0.$$

Werden in dieser Gleichung die Coordinaten q variabel gedacht, so stellt sie einen Complex ersten Grades dar und zwar den sogenannten speciellen linearen Complex, der also aus allen Geraden besteht, welche eine gegebene feste Gerade, die Axe

des Complexes, schneiden. Findet zwischen den q' die Relation statt $q'^2_{12}+q'^2_{20}+q'^2_{01} = 1$, so heissen die q' die homogenen rechtwinkligen Coordinaten, und die Gleichung des speciellen Complexes ersten Grades ist alsdann in der Normalform gegeben; dieselbe ist stets herzustellen durch Multiplication obiger Gleichung mit dem Factor

$$\frac{1}{\sqrt{q'^2_{12}+q'^2_{20}+q'^2_{01}}}.$$

Der Verf. untersucht nunmehr die Frage, welche Bedeutung die linke Seite der Gleichung in der Normalform habe, wenn die q nicht einer Geraden aus dem Complexe, sondern einer beliebigen Geraden im Raum angehören. Von den zwei Interpretationen, die er giebt, möge die letzte hervorgehoben werden. Der Verf. spricht sie durch folgenden Satz aus: „Werden in die linke Seite der Gleichung eines speciellen Complexes erster Ordnung in der Normalform die rechtwinkligen homogenen Coordinaten einer beliebigen Geraden eingesetzt, so stellt sie das Product aus der Entfernung jener Geraden von der Axe des Complexes in den Sinus ihres Neigungswinkels gegen die Axe dar". Ist daher N jene Entfernung und O besagter Winkel, so kann der Complex auch durch $N \sin O = 0$ dargestellt werden. Die gefundene Bedeutung der linken Seite der speciellen Complexgleichung führt den Verf. zur Aufstellung eines tetraedrischen Coordinatensystems für die Raumgerade: es sind die tetraedrischen Coordinaten einer Geraden die Producte aus den Entfernungen derselben von den Kanten des Fundamentaltetraeders in die Sinus ihrer betreffenden Neigungswinkel gegen diese Kanten. Nachdem der Verf. den Zusammenhang zwischen diesen und den Plücker'schen Coordinaten beleuchtet hat, wendet er sich zu eingehender Untersuchung des allgemeinen linearen Complexes, der repräsentirt wird durch eine allgemeine lineare homogene Gleichung zwischen den 6 Grössen q. Es zeigt sich, dass ein allgemeiner linearer Complex aus allen Geraden besteht, für welche die Producte aus ihren Entfernungen von zwei festen Geraden in die Sinus ihrer betreffenden Neigungswinkel gegen dieselben ein constantes Verhältniss haben. Bedeuten also N_1 und N_{11} die Entfernungen einer Geraden von den zwei festen

Axen und O_1 und O_{11} die bezüglichen Neigungswinkel derselben gegen die Axen, so ist für alle Geraden des Complexes

$$N_1 \sin O_1 = \varkappa N_{11} \sin O_{11}.$$

Bei derartiger Bestimmung des Complexes wird das constante Verhältniss $\varkappa$ der Modul, die beiden gegebenen Geraden die Directricen des Complexes genannt; je nach dem Werth des Moduls $\varkappa$ erhält man bei denselben Directricen eine ganze Reihe von Complexen, welche dieselbe Congruenz gemein haben und nach Plücker's Benennung eine zweigliedrige Gruppe bilden. Von diesen Gesichtspunkten aus beleuchtet der Verf. nunmehr eingehender den allgemeinen linearen Complex; auf die Einzelheiten hier näher einzugehen, würde zu weit führen.

Schn.

M. Pasch. Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden. Giessen 1870.

Sei ein Linien-Complex gegeben. In jeder durch eine Linie desselben hindurchgelegten Ebene befindet sich eine Complex-Curve, welche die Linie berührt. Dreht man die Ebene um die Complexlinie, so rückt im Allgemeinen dieser Berührungspunkt fort und zwar ist die Beziehung der Ebene zu dem Punkte eine projectivische. Auf dieselbe projectivische Beziehung kommt man, wenn man die Complexkegel betrachtet, deren Spitzen auf der Geraden liegen. Jeder solche Kegel hat nämlich die angenommene Complexlinie zur Erzeugenden, und somit nach deren Erstreckung eine Tangentialebene; die Beziehung zwischen der Kegelspitze und der Tangentialebene ist wieder eine projectivische und zwar dieselbe projectivische Beziehung, welche eben betrachtet wurde. — Nun giebt es aber eine Congruenz besonderer Linien des Complexes — dieselben werden nach Plücker die singulären Linien des Complexes genannt —, bei welchen die genannte projectivische Beziehung eine uneigentliche wird, insofern allen durch eine solche Gerade hindurchgelegten Ebenen derselbe Punkt als Berührungspunkt, allen auf ihr angenommenen Punkten dieselbe Ebene als Berührungsebene entspricht. Der gemeinsame Berührungspunkt heisst nach Plücker der zugeordnete singuläre Punkt der gewählten singulären Linie, die

gemeinsame Berührungsebene ihre zugeordnete singuläre Ebene. Der zugeordnete singuläre Punkt ist Spitze eines Complex-Kegels, welcher die entsprechende singuläre Linie zur Doppelerzeugenden hat. Umgekehrt ist auch jeder Punkt ein singulärer Punkt, dessen Kegel eine doppelerzeugende Linie besitzt; seine singuläre Linie ist die Doppelerzeugende. Auf der anderen Seite: Die zugeordnete singuläre Ebene enthält eine Complex-Curve, welche die entsprechende singuläre Linie zur Doppeltangente hat; jede Ebene, die eine Curve mit Doppeltangente enthält, ist eine singuläre Ebene; die Doppeltangente ist ihre entsprechende singuläre Linie. — Diese Definitionen, die in Plücker's „Neue Geometrie" unter mehr particulärer Form vorkommen, werden vom Verf. in der vorstehend auseinandergesetzten Weise gegeben.

Nun ist bei Plücker vermöge ausführlicher Betrachtung der besonderen Eigenthümlichkeiten der Complexe zweiten Grades gezeigt, dass für Complexe zweiten Grades die Fläche der singulären Punkte mit der Fläche der singulären Ebenen identisch wird. Die singulären Linien berühren diese Fläche in den zugeordneten singulären Ebenen. Der Verf. zeigt, dass ein Gleiches für beliebige Complexe gilt, dass also allgemein die Fläche der singulären Punkte mit der Fläche der singulären Ebenen identisch ist. Um dies einzusehen, hat man, wie der Verf. entwickelt, sich nur deutlich zu machen, wie die Brennfläche bei einer durch 2 Complexe bestimmten Congruenz zu Stande kommt. Die Fläche der singulären Punkte und die mit ihr identische Fläche der singulären Ebenen ist die eine Brennfläche der von den singulären Linien des Complexes gebildeten Congruenz.

Kln.

F. Klein. Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. Clebsch Ann. II. 198-226. 1869. Gött. Nachr. 1869. 258-276.

Als Coordinaten einer Geraden im Raume werden die relativen Werthe der sechs zweigliedrigen Determinanten genommen, welche aus den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen gebildet sind. Da zwischen diesen Grössen eine identische Re-

lation zweiten Grades besteht, so kann man auch als homogene Coordinaten einer Linie sechs beliebig angenommene Grössen ansehen, welche nur der Bedingung zu genügen haben, dass sie eine bestimmte Gleichung zweiten Grades befriedigen. Noch eine Gleichung zweiten Grades zwischen diesen Veränderlichen bestimmt einen Liniencomplex zweiten Grades.

Die Bedingungsgleichung und die Complexgleichung zweiten Grades können, unter gewissen Bedingungen, stets und eindeutig auf die Normalform gebracht werden, dass nur noch die Quadrate der Veränderlichen in ihnen vorkommen. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, den geometrischen Sinn dieser Transformation zu erörtern. Denn diese Normalform hat Bedeutung nicht bloss für die Complexe zweiten Grades überhaupt, sondern auch für die Flächen vierter Ordnung und vierter Klasse mit 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkten, welche mit diesen Complexen in Beziehung stehen. Die algebraische Darstellung der auftretenden geometrischen Gebilde wird am Schluss gegeben.

T.

F. Aschieri. Sopra un complesso di 2^0 grado. Battaglini G. VIII. 35-37. 1870.

Sind die Coordinaten einer Geraden f, g, h, l, m, n, so genügt der Bedingungsgleichung

$$\Theta = F_1 . f^2 + G_1 . g^2 + H_1 . h^2 + L_1 . l^2 + M_1 . m^2 + N_1 . n^2 = 0$$

zwischen ihnen eine dreifach unendliche Anzahl von Geraden, welche einen Strahlencomplex bilden, dessen Zusammenhang mit einem System von Flächen zweiten Grades obige Abhandlung untersucht. Zur Erzeugung eines solchen Complexes betrachtet der Verfasser zwei Flächen zweiter Ordnung resp. zweiter Klasse mit gemeinsamem Fundamentaltetraeder, und stellt die Bedingung auf, dass die vier Punkte resp. die vier Tangentialebenen, welche eine beliebige Gerade, als gerade Punktreihe resp. als Axe eines Ebenenbüschels gedacht, mit den beiden Flächen gemein hat, harmonisch liegen. Der geometrische Ort aller Geraden von dieser Eigenschaft ist der Strahlencomplex, der durch die Gleichung $\Theta = 0$ charakterisirt ist. Umgekehrt gehört auch jedem Complex zweiten Grades, dessen Gleichung auf diese Form ge-

bracht werden kann, eine einfach unendliche Anzahl solcher Flächen zweiten Grades derartig an, dass jeder derselben eine andere zu derselben Anzahl gehörige Fläche entspricht, welche mit ihr in der angegebenen Weise den Complex erzeugen kann. Und zwar können solche Flächen sich sowohl so entsprechen, dass der Complex als der geometrische Ort der beiden harmonisch theilenden geraden Punktreihen erscheint, als auch so, dass der Complex als der Ort der Axen erscheint, durch welche vier harmonisch liegende Tangentialebenen an die beiden Flächen gelegt werden können. Beide Fälle ergeben jedoch verschiedene Anordnungen der Flächen zu Paaren. Scht.

F. Aschieri. Sopra un complesso del 2^0 grado. Generazione geometrica dei complessi del 1^0 grado. Battaglini G. VIII. 229. 1870.

Der Verfasser recapitulirt die von ihm auf pag. 35 desselben Bandes bewiesenen Eigenschaften eines durch zwei Oberflächen zweiten Grades bestimmten Complexes zweites Grades, um einige Spezialisirungen und Folgerungen daran zu knüpfen, und giebt im Zusammenhang damit eine Erzeugungsart eines Complexes ersten Grades. Scht.

S. Lie. Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes. Gött. Nachr. 1870. 53.

Diese Abhandlung enthält eine Reihe von Eigenschaften desjenigen Liniencomplexes zweiten Grades, dessen Singularitätenfläche in ein Tetraeder ausgeartet ist. Der dadurch charakterisirte Complex, welcher von Herrn Reye in seiner „Geometrie der Lage“ untersucht und deshalb von Herrn Lie Reye'scher Complex genannt worden ist, wird hier als die Gesammtheit der geraden Linien definirt, welche ein gegebenes Tetraeder nach gegebenem Doppelverhältnisse schneiden, wobei es gleichgültig ist, ob dem letzteren die vier Punkte entsprechen, in welchen jede der Geraden von den vier Tetraederebenen geschnitten wird, oder ob es von den vier Ebenen erfüllt wird, welche sich durch diese Gerade und die vier Tetraederecken legen lassen. Da nun durch die dreifach unendliche Anzahl homographischer Transformationen,

welche dieses Fundamentaltetraeder unverändert lassen, die Linien des Complexes sich nur unter einander vertauschen, der Complex aber in seiner Gesammtheit derselbe bleibt, so bezeichnet Herr Lie diese Transformationen als die dem Complex zugehörigen. Reciprok nennt er solche, welche, zweimal hintereinander angewandt, zu dem Complexe zurückführen. Durch die continuirliche Aufeinanderfolge von Complexlinien, von denen jede die vorhergehende schneidet, entsteht die Complexcurve, welche, wenn diese Complexlinien sämmtlich in einer Ebene liegen, Ebene, wenn sie sämmtlich durch einen Punkt gehen, Punkt des Complexes heisst. Eine jede der dem Complexe zugehörigen homographischen Transformationen führt nun eine solche beliebig ausgewählte Complexcurve in eine andere Complexcurve über, in welche sie dann durch keine der andern Transformationen übergeführt werden kann. Dadurch gruppiren sich die Complexcurven zu Schaaren von jedesmal dreifach unendlich vielen, welche Gattungen von Complexcurven genannt sind. Wird nun als Element des Reye'schen Complexes nicht mehr die gerade Linie, sondern eine beliebige Complexcurve aufgefasst, so ist der Complex die Gesammtheit aller der gewählten Gattung angehörigen Complexcurven.

Nach diesen Vorbereitungen untersucht der Verf., wie sich die Complexcurven den Transformationen gegenüber verhalten, und beginnt damit, letztere auf zwei fundamentale reciproke Umformungen zurückzuführen, welche er die g'' Transformation und die r'' Transformation nennt.

Die erstere führt eine gerade Linie des Complexes in eine eben solche über, und wird durch irgend eine der dreifach unendlich vielen Flächen zweiten Grades vermittelt, für welche das dem Complexe angehörige Fundamentaltetraeder ein sich selbst conjugirtes ist. Die conjugirten Polaren hinsichtlich einer solchen Fläche und auch die von derartigen Polaren erzeugten Complexcurven sind g'' reciprok. Die r'' Transformation dagegen führt einen Punkt in eine Complexgerade über, wobei von den eben genannten Flächen zweiter Ordnung zwei solche ausgewählt werden müssen, dass die Schnittgerade der in Bezug auf beide bestimmten Polarebenen dem gegebenen Complexe angehöre. Jede

dieser beiden Transformationsarten umfasst eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Diese Definitionen gestatten dem Verfasser, die folgenden beiden Sätze auszusprechen, erstens, dass, wenn zwei Complexgerade eine Complexcurve k berühren, sie auch eine ihr g'' reciproke k_g berühren, und zweitens, dass, wenn ein gegebener Punkt und eine gegebene Complexgerade einer Complexcurve angehören, sie auch Punkt und Tangente einer derselben r'' reciproken k_r sind.

Der folgende Abschnitt ist der Betrachtung der Complexcurven gewidmet, welche durch eine gewisse Aufeinanderfolge von g'' und r'' Transformationen aus einer Complexcurve abgeleitet sind. Eine symbolische Bezeichnung derartig abgeleiteter Curven und eine tabellarische Anordnung derselben erleichtern dem Verfasser das Aussprechen von Beziehungen zwischen diesen Curven, welche hier übergangen werden müssen. Diese werden dann in Zusammenhang mit den tetraedralsymmetrischen Curven des Herrn de la Gournerie gebracht, welche derselbe in seinem Werke: „Surfaces réglées tétraédralement symmétriques" betrachtet, und von denen er selbst schon nachgewiesen hat, dass ihre Tangenten mit dem Coordinatentetraeder ein constantes Doppelverhältniss bestimmen. Schliesslich macht Herr Lie die Bemerkung, dass die oben erwähnte r'' Transformation sich als eine Abbildung des Reye'schen Complexes auf den Punktraum auffassen lässt, womit sich die gewöhnliche Raumgeometrie auf den Complex überträgt.
Scht.

F. Klein und S. Lie. Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. Berl. Monatsber. 1870. 891-899.

Die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche werden mit den einfach unendlich vielen Complexen zweiten Grades in Beziehung gesetzt, von denen jeder diese Fläche zur Singularitätenfläche hat, d. h. zum Ort für die Punkte, deren Complexkegel in zwei Ebenen zerfallen ist, oder, was dasselbe ist, zur Einhüllenden der Ebenen, deren Complexcurve in zwei Punkte zerfallen ist. Für irgend einen der Complexe liegen nun diese beiden Punkte, welche in einer Tangentialebene der Fläche die

zugehörige Complexcurve repräsentiren, auf der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der Fläche, und mit deren Berührungspunkt auf einer Geraden, welche seine zugeordnete singuläre Linie genannt wird. Dann bilden die Punkte der Kummer'schen Fläche, deren zugeordnete singuläre Linien Haupttangenten der Fläche sind, eine Curve von der 16ten Ordnung und von der 16ten Classe, welche eine Haupttangentencurve ist. So gehört zu jedem der einfach unendlich vielen Complexe eine Haupttangentencurve, womit alle Haupttangentencurven erhalten werden. Entsprechend den unter diesen Complexen zweiten Grades befindlichen 6 doppelt zu zählenden linearen Complexen, giebt es auch 6 ausgezeichnete Haupttangentencurven, welche nur noch von der 8ten Ordnung und Klasse sind. Von den Singularitäten der Haupttangentencurven sei erwähnt, dass dieselben 16 mit den Knotenpunkten der Fläche identische Spitzen, 16 mit den Doppeltangentialebenen derselben identische stationäre Ebenen, und 6.16 stationäre Tangenten haben. Schliesslich betrachten die Verfasser die Bestimmung der Haupttangentencurven noch unter einem anderen Gesichtspunkte, indem sie von einem der 6 vorher erwähnten linearen Complexe ausgehen, und die Fläche als die Brennfläche eines demselben angehörigen Strahlensystems, des einen Systems ihrer Doppeltangenten, auffassen.

Scht.

TH. REYE. Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie. Schlömilch Z. XV. 64-66. 1870.

Die hier mitgetheilte Eigenschaft der Schraubenlinie folgt aus einem Satze von Plücker (Neue Geometrie d. Raumes 1868 p. 59): „Die Osculations-Ebene einer Complex-Schraubenlinie in einem ihrer Punkte ist die diesem Punkte (im linearen Complexe) entsprechende Ebene.“

Fügt man hierzu den bekannten Satz: „Liegen in einem räumlichen Polarsysteme mehrere Punkte in einer und derselben Ebene, so gehen die denselben zugeordneten Ebenen durch den dieser Ebene entsprechenden Punkt, welcher in dem Falle, dass dieses Polarsystem ein Nullsystem ist, in der genannten Ebene selbst liegt‘ — so ergiebt sich unmittelbar der von Herrn Reye

angeführte Satz, der also keineswegs vollständig neu ist — ebensowenig als die Schraubenlinie die einzige transcendente Curve ist, für die derselbe aufgestellt werden kann. Er gilt in der That von allen Complex-Curven, z. B. von der Loxodrome auf der Kugel (Plücker a. a. O. p. 61). St.

B. IRMER. Ueber Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brenncurven. Diss. Halle 1870.

Mz.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformation, Abbildungen.

A. CAYLEY. On a correspondance of points and lines in space. Rep. Brit. Ass. 1869/70.

Csy.

J. J. RICHELOT. Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten. Borchardt J. LXX. 137-156. 1869.

Diese Abhandlung enthält analytische, jedoch immer geometrisch gedeutete Untersuchungen derjenigen Correlation zwischen zwei räumlichen Gebieten, welche verlangt, dass jedem Element des einen Gebiets ein eben solches des andern entspreche. Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der beiden räumlichen Gebiete mögen beziehungsweise X, Y, Z und ξ, η, ζ heissen, und danach diese beiden Gebiete als lateinisches und griechisches unterschieden werden. Wenn dann Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3 lineare ganze rationale Functionen von ξ, η, ζ sind, so muss, damit ein Punkt einem Punkte, eine Gerade einer Geraden, eine Ebene einer Ebene entspreche,

$$X = \frac{\Phi_1}{\Phi}, \quad Y = \frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad Z = \frac{\Phi_3}{\Phi}$$

sein. Die funfzehn Verhältnisse der in diesen vier Functionen

vorkommenden sechzehn Coefficienten sind durch die Angabe der Coordinatenwerthe von fünf Paaren entsprechender Punkte eindeutig bestimmt, und zu jedem sonst noch gegebenen Punkte des einen Gebiets lässt sich der entsprechende des andern Gebiets construiren. Dieser Construction und der Deutung jener Correlationscoefficienten legt Herr Richelot die Lösung der Aufgabe zu Grunde, die Axen derjenigen Ebenenbüschel aufzusuchen, deren entsprechende ihnen gleich sind. Verstehen wir unter der Verschwindungsebene des einen Gebiets diejenige Ebene, deren Punkte allen unendlich weit entfernten Punkten des andern Gebiets entsprechen, und unter der einer Axe zugehörigen Normalebene diejenige auf ihr senkrechte Ebene, deren entsprechende Ebene auf der der Axe entsprechenden Geraden senkrecht steht, so lautet das Haupttheorem, zu dem der Verfasser gelangt, folgendermassen: „Bei der eindeutigen allgemeinsten Raumcorrelation giebt es in der Verschwindungsebene eines jeden der beiden Raumgebiete eine Ellipse, deren zwei Focalcurven die Eigenschaft haben, dass ihre Tangenten-Axen der Correlation und die zugehörigen Berührungspunkte respective die Schnittpunkte der Axe mit der zugehörigen Normalebene sind". Den Schluss der Abhandlung bilden einige Mittheilungen über die geometrische Bedeutung der Correlationscoefficienten.

Scht.

G. Wenzel. Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. Breslau, 1870.

Bei der collinearen Beziehung zweier räumlichen Gebilde Σ und Σ_1 auf einander giebt es zu jeder Ebene eine Normale, deren entsprechende Gerade zu der der Ebene entsprechenden Ebene auch Normale ist, aber nicht umgekehrt zu jeder Geraden eine normale Ebene, deren entsprechende Ebene zu der der Geraden entsprechenden Geraden Normalebene ist. Dieser Bedingung genügen nämlich nur dreifach unendlich viele Geraden, welche der Herr Verfasser Axen nennt. Der Punkt, in welcher eine Axe von der in dem eben ausgesprochenen Sinne ihr zugehörigen Normalebene geschnitten wird, wird ihr Fusspunkt genannt. Ferner giebt es in je zwei collinearen Strahlbündeln im

allgemeinen zwei Axen projectivisch gleicher entsprechender Ebenenbüschel, deren Vertheilung in den beiden räumlichen Gebieten schon Richelot in Borchardt's J. LXX. 138-156 s. p. 611 und Maegis in seiner Inauguraldissertation analytisch untersucht haben. Die auf den Principien der synthetischen Geometrie beruhenden Untersuchungen des Verfassers sind umfassender, und behandeln die Vertheilung der Axen und ihrer Fusspunkte, der Axen entsprechender projectivisch gleicher Ebenenbüschel, und endlich der Axen, welche zugleich Axen projectivisch gleicher Ebenenbüschel sind.

Der unendlich fernen Ebene, als einer der beiden räumlichen Gebilde angehörig betrachtet, entspricht im andern eine Ebene, welche Herr Richelot Verschwindungsebene genannt hat. Zu jeder der beiden Verschwindungsebenen, z. B. zu E_v giebt es eine einzige Normale V, welcher in Σ_1 eine Normale V_1 der anderen Verschwindungsebene entspricht. Dann bilden die durch V gehenden, zu einander senkrechten Ebenen, deren entsprechende Ebenen in V_1 auf einander senkrecht sind, mit E_v die drei Symmetrieebenen. Deren Schnittgeraden heissen Hauptaxen, ihr Schnittpunkt Mittelpunkt, und jede durch ihn gehende Ebene Durchmesserebene des räumlichen Systems. Es wird nun gezeigt, dass zu den Axen jede in einer Symmetrieebene liegende Gerade, jeder Durchmesser des räumlichen Gebildes und jede zu einer Hauptaxe parallele Gerade gehört, ferner, dass alle durch einen beliebigen Punkt gehenden Axen eine Kegelfläche zweiter Ordnung bilden, welche also durch die von dem angenommenen Punkte auf die Symmetrieebene gefällten Lothe, sowie durch einen Durchmesser hindurchgeht, und dass, reciprok dazu, die in einer beliebigen Ebene gelegenen Axen einen Kegelschnitt umhüllen, welcher die Schnittgeraden der Ebene mit den Symmetrieebenen, sowie die unendlich ferne Gerade dieser Ebene berührt, also Parabel ist. Verstehen wir unter Axe einer Fläche zweiter Ordnung jede der dreifach unendlich vielen Geraden, deren Polare in einer zu ihr senkrechten Ebene liegt, so ergiebt sich, dass in jedem der beiden collinearen räumlichen Gebilde eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades existirt, welche dieselben Symmetrieebenen haben, wie das räumliche Gebilde,

und den in ihm vorhandenen Axencomplex zu dem ihrigen haben. Die Fusspunkte der Axen, welche die collineare Beziehung bestimmt, sind auch die Fusspunkte für die Axen der Flächen. In jedem Punkte des Raumes schneiden sich ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid rechtwinklig, und die unendlich vielen einschaligen Hyperboloide werden durch die Axen projectivisch gleicher Ebenenbüschel erzeugt. Die Lage derjenigen Axen, welche zugleich Axen der collinearen Beziehung und Axen projectivisch gleicher Ebenenbüschel sind, charakterisirt folgender Satz:

„In jeder der beiden Symmetrieebenen des einen wie des andern von zwei collinearen räumlichen Gebilden, welche auf der Verschwindungsebene senkrecht stehen, umhüllen die Axen projectivisch gleicher Ebenenbüschel, welche auch zugleich Axen der collinearen Beziehung sind, eine Curve zweiter Ordnung. Dieselbe ist in der einen Ellipse, in der andern Hyperbel; die Hauptaxen des räumlichen Gebildes sind die Axen der beiden Curven; und ihre grossen oder Hauptaxen liegen in der Schnittlinie ihrer Ebene". Die beiden eben erwähnten in den beiden zur Verschwindungsebene senkrechten Symmetrieebenen gelegenen Kegelschnitte haben die merkwürdige Eigenschaft, dass je zwei Punkte des einen von beiden die Eigenschaft der Brennpunkte in Bezug auf den andern hat, d. h., dass die Summe oder Differenz ihrer Entfernungen von einem veränderlichen Punkte des andern constant ist. Diese beiden Kegelschnitte ergeben sich überdies als die beiden reellen Focalcurven der erwähnten Schaar confocaler Flächen. Scht.

C. F. Geiser. Sopra un teorema fondamentale della Geometria. Brioschi Ann. (2) IV. 25. 1870.

Das Fundamentaltheorem der Geometrie, welches der Verfasser bespricht, ist: Sind durch irgend welche Betrachtungen (in denen weder transcendente Curven noch transcendente Functionen vorkommen) zwei geometrische Formen so auf einander bezogen, dass jedem Elemente der einen Form ein und nur ein Element der andern Form entspricht, und umgekehrt; — so sind die beiden Formen in Bezug auf ihre Elemente projectivisch.

Der Beweis dieses Theorems stützt sich auf das folgende: Sind zwei variable Grössen λ und λ' von einander abhängig, so dass jedem Werthe der einen ein und nur ein Werth der andern entspricht, und umgekehrt, so muss zwischen ihnen eine analytische Relation von der Form:

$$\alpha\lambda\lambda'+\beta\lambda+\gamma\lambda'+\delta = 0$$

statthaben. Der Verfasser bemerkt nun, dass dieser Satz auf der stillschweigenden Voraussetzung beruht, dass jede eindeutige Relation zwischen λ und λ' auch analytisch ausgedrückt werden kann. Diese Voraussetzung ist aber unannehmbar; und daher muss das Theorem so eingeschränkt werden, dass man von den geometrischen Formen, die man auf einander bezieht, a priori weiss, dass die Abhängigkeit ihrer entsprechenden Elemente sich durch eine algebraische Gleichung ausdrücken lässt. Hierdurch wird das Fundamentaltheorem allerdings bedeutend weniger allgemein.

Am Schluss erwähnt der Verfasser noch Folgendes: Man sagt: „Eine Curve n^{ter} Ordnung ist eine Figur, deren Punkte in orthogonalen Coordinaten ausgedrückt, einer Gleichung n^{ten} Grades genügen". Und auch: „Eine Curve n^{ter} Ordnung ist eine Figur, die n (und nur n) Punkte mit einer beliebigen Geraden gemein hat." Damit aber die zweite Definition mit der ersten überein-komme, muss die Curve, die man bei der zweiten Definition im Auge hat, mit den rechtwinkligen Coordinaten irgend eines ihrer Punkte einer algebraischen Gleichung genügen, die für alle reellen und imaginären Werthe von x und y bestehen bleibt.

Mz.

A. Enneper. Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen. Clebsch Ann. II. 587-623. 1870.

Die in den Göttinger Nachr. 1867 (siehe Fortschr. d. M. I. p. 227) angefangenen Untersuchungen finden sich hier wiederholt und ergänzt und namentlich auf die Theorie beliebiger Curven einer Fläche ausgedehnt. Mit Hülfe der Relationen, welche sich auf den Zusammenhang zwischen der Doppelschaar der Coordinatenlinien und der Fläche selbst beziehen, gelangt

Herr E. zu folgenden für die Deformationsfrage interessanten Ergebnissen. „Lässt sich eine Fläche so biegen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so kann dieses auf unendlich viele Arten geschehen, wenn ein System von Krümmungslinien gleichzeitig kürzeste Linien bildet, in allen andern Fällen nur auf eine Weise. Hat eine Fläche die bemerkte Eigenschaft, so ist dieses auch mit einer ihrer Parallelflächen der Fall. Findet zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern eine Relation statt, so ist abgesehen von den Rotationsflächen, entweder ihr Product oder die Summe ihrer reciproken Werthe gleich einer positiven Constanten. Lässt sich eine Fläche mit planen Krümmungslinien so biegen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so sind die Ebenen des planen Systems einer festen Geraden parallel; dasselbe findet für die deformirte Fläche statt“. K.

A. Enneper. Ueber ein Problem der analytischen Geometrie. Gött. Nachr. 1870. 267.

K.

Max Nöther. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. Clebsch. Ann. III. 161-226. 1870.

Diese Abhandlung betrachtet vorzugsweise diejenigen Flächen, aus denen ein Flächenbüschel eine Schaar von rationalen Curven ausschneidet, das heisst, von solchen Curven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen. Das Problem der Abbildung solcher Flächen auf Kegelflächen oder specieller auf Ebenen wird zuerst für den Fall gelöst, dass die Curven der Schaar von ungrader Ordnung oder auch von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung mit $(2n-1)$fachem Punkte sind. Erfüllen die Flächen diese Bedingung nicht, so lassen sie sich auf einfachere Flächen φ zurückführen, welche, von der m^{ten} Ordnung, eine $(m-2)$fache Gerade besitzen, von einem Ebenenbüschel in einer Schaar von Kegelschnitten, von einer Ebene im allgemeinen, aber in mehreren Kegelschnitten geschnitten werden. Auch für diese Flächen φ wird die Abbildung auf einer Ebene untersucht, und

namentlich die Abbildung der auf ihnen liegenden $(n-2)$fachen Geraden eingehend erörtert.

Der zweite Theil der Abhandlung wendet die im ersten Theile entwickelte eigenthümliche Methode der Abbildung auf einer Ebene auf drei speciellere Flächenarten an, und zwar zuerst auf die windschiefe Fläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$fachen Geraden. Bei dieser geschieht die Abbildung durch die Projection aus einem Punkte P der vielfachen Geraden auf die Bildebene, wobei die vielfache Gerade zu einem $(n-1)$fachen Fundamentalpunkte A wird, die $n-1$ von P ausgehenden Geraden der Fläche zu ebenso vielen einfachen Fundamentalpunkten B werden, und die dreifach unendliche Schaar von ebenen Curven der Fläche zu einer dreifach unendlichen Schaar von Curven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte in A und $n-1$ einfachen festen Punkten in B wird. Die zweite Anwendung besteht darin, durch Projectionen, die auch von Herrn Clebsch in anderer Weise behandelte Fläche fünfter Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung zur Doppelcurve hat, auf eine Fläche φ zu reduciren. Endlich werden die Eigenschaften und die Abbildung einer Fläche von der 6ten Ordnung mit einer doppelten Raumcurve dritter Ordnung und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden ausführlich erörtert.

Scht.

E. Habich. Note sur une méthode de transformation des surfaces. Nouv. Ann. (2) VIII. 253. 1869.

Eine Fläche

$$F_1(r, O, \varphi) = 0$$

wird durch eine Relation

$$f(r, r') = 0$$

in eine Fläche

$$F_2(r', O, \varphi) = 0$$

transformirt. Unter allen den hierdurch definirten Transformationen entsprechen sich die Krümmungslinien nur dann, wenn entweder $\frac{r'}{r} = \text{const.}$ oder $r \,.\, r' = \text{const.}$ ist.

Schn.

A. TRANSON. De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes. Nouv. Ann. (2) VIII. 222-230. 1869. Inst. 1. sect. XXXVII. 125-126. 1869.

Es wird die Transformationsart behandelt, in der einem jeden Punkte der einen Figur ein Punkt der andern Figur entspricht. Diese Transformationsart theilt sich in zwei andere, welche isogonal und isolog genannt werden. Die isogonale Transformation ist dadurch charakterisirt, dass den Curven, welche durch irgend einen Punkt der ersten Figur gehen, Curven entsprechen, welche durch den entsprechenden Punkt der zweiten Figur gehen, und ferner dadurch, dass diese Curven sich unter denselben Winkeln schneiden, wie die entsprechenden. Wenn aber mehrere Curven der ersten Figur durch denselben Punkt gehen, und wenn die ihnen entsprechenden der zweiten durch den entsprechenden Punkt gehen, und das Bündel der Tangenten der ersten Curven dem der zweiten Curven homograpisch ist, dann heisst die Transformation isolog. Die Beziehungen zwischen der homographischen, isogonalen und isologen Transformation bildet den Gegenstand der Arbeit.

Die Note im Jnst. ist bereits ein Referat der in den Nouv. Ann. erschienenen Arbeit. T.

MOUTARD. Transformations géométriques des surfaces. Inst. 1. sect. XXXVII. 372-373. 1869.

Es wird der Zusammenhang erörtert, welcher zwischen dem Problem der Umformung der Flächen und der Aufgabe besteht, für eine gegebene Fläche eine andere zu finden, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihre linearen Elemente zu den entsprechenden der gegebenen orthogonal sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass die ursprüngliche Fläche entweder eine Fläche zweiter Ordnung oder eine Regelfläche sei, oder allgemein überhaupt nur die Eigenschaft habe, durch eine ebene Curve von unveränderlicher Gestalt erzeugt zu werden. T.

A. RIBAUCOUR. Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre. Inst. 1. sect. XXXVII. 371-372. 1869.

Die Note enthält die Mittheilung zweier geometrischen

Sätze, welche sich auf die Abbildung zweier Flächen auf einander beziehen. Sie zeigen, wie man, wenn zwei auf einander abbildbare Flächen gegeben sind, eine beliebige Anzahl von Gruppen derselben erhalten könne. T.

M. Nöther. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Clebsch. Ann. II. 293-317. 1869.

In den C. R. 1868 hat Clebsch das Geschlecht p einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung, die nur mit den gewöhnlichen Singularitäten behaftet ist, ohne Beweis mitgetheilt. (vgl. Fortschr. d. M. I. p. 234). Dieser Satz wird in der vorliegenden Abhandlung auf Flächen mit höheren konischen Knotenpunkten und höheren vielfachen Curven, sodann auf algebraische Gebilde von beliebig vielen Dimensionen erweitert. Der Beweis dieses allgemeineren Theorems, das der Verfasser bereits in den Gött. Nachr. 1869 Nr. 15 mitgetheilt hatte, ist nach der von Clebsch und Gordan in ihrer „Theorie d. Abel'schen Functionen" bei Curven angewandten Methode geführt. — Der Verfasser bespricht zuerst die singulären Stellen, die in zwei eindeutig einander entsprechenden algebraischen Gebilden von zwei und drei Dimensionen auftreten können. Diese Verhältnisse lassen sich mit Hilfe successiver Transformationen leicht übersehen. Wie a. a. O. werden sodann die für die, in den x homogene algebraische, irreductible Gleichung

$$f(x_1, x_2, \dots x_{r+2}) = 0$$

„normirten" Differentialausdrücke aufgestellt, deren Integrale allenthalben endlich bleiben. Dabei bleiben höhere Singularitäten von $f=0$ ausgeschlossen. Die Anzahl p dieser Differentiale ist dann für zwei einander eindeutig entsprechende algebraische Gebilde von r Dimensionen dieselbe, womit das folgende Theorem bewiesen ist:

„Das Geschlecht p der $r$fachen algebraischen Mannigfaltigkeit $f=0$ ist gleich der Anzahl der in einer $r$fachen Mannigfaltigkeit vom Grade $n-r-2$, $\Theta=0$ noch unbestimmt bleibenden Constanten, wenn $\Theta=0$ gezwungen wird, durch jede μfache auf $f=0$ liegende $h$fache Mannigfaltigkeit $(\mu-r+h)$fach

hindurchzugehen. Für $\mu + h \leqq r$ hat Θ keiner Bedingung zu genügen. — Die Zahl p hat die Eigenschaft, für zwei $r$fache Mannigfaltigkeiten $f = 0$, $F = 0$, welche sich im Allgemeinen Punkt für Punkt eindeutig entsprechen, die gleiche zu sein, so dass p die Classenzahl ist für die Classe, zu der $f = 0$ und $F = 0$ gehören. Die Gleichheit der Zahl p ist das nothwendige (natürlich nicht hinreichende) Kriterium für die Möglichkeit einer eindeutigen rationalen Transformation zweier $r$fachen algebraischen Mannigfaltigkeiten in einander".

NB. Die $r$fache Mannigfaltigkeit bezieht sich hier immer auf r von einander unabhängige complexe Veränderliche.

St.

Housel. Homographie et perspective. Nouv. Ann. (2) IX. 492-515. 1869.

Der Herr Verfasser hatte sich die Aufgabe gestellt, durch Rechnung unter Benutzung Cartesischer Coordinaten für die Ebene wie für den Raum zu beweisen, dass zwei homographische, d. i. allgemein collinear verwandte Figuren durch blosse Verschiebung und Drehung in central collineare oder perspectivische Lage gebracht werden können. Für die Ebene ist diese Frage bereits mehrfach geometrisch und analytisch gelöst und kürzlich von Herrn Smith in der Abhandlung „Focal Properties of Homographic Figures" im zweiten Bande der Proc. of Lond. Mathem. Society pag. 202 genauer präcisirt. Für den Raum ist die vom Herrn Verf. gegebene Lösung dieser Frage irrthümlich, wie auch schon Herr Smith in der Schluss-Note derselben Abhandlung pag. 248 gezeigt hat. (Siehe Abschn. VIII. Cap. 5 A. p. 394.

Schz.

L. Painvin. Note sur la transformation homographique. Nouv. Ann. (2) IX. 97. 1870,

Der Verf. behandelt folgende Frage: Können zwei homographische Figuren durch eine passende Verrückung dahin gebracht werden, homolog zu sein? Das Resultat ist nach einer längeren Rechnung mit hinzugefügter geometrischer Interpretation folgendes: Zwei homographische Figuren des Raumes können

im Allgemeinen nicht dahin gebracht werden, homolog zu sein. Damit dies möglich sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Curve in der einen Figur, welche dem imaginären Kugelkreise im Unendlichen in der anderen entspricht, auch ein Kreis ist. Dann giebt es zwei, und nur zwei, Arten, dies zu bewerkstelligen. Dies wird dann angegeben. Mz.

J. Clerk Maxwell. On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress. Proc. of. L. M. S. II. 58-60. 1869.

Ist F, eine beliebige Function der Coordinaten xyz, gegeben, so kann zu jedem der Punkte xyz ein entsprechender $\xi\eta\zeta$ bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{dF}{dx}, \quad \eta = \frac{dF}{dy}, \quad \zeta = \frac{dF}{dz}.$$

Die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ werden auf Axen bezogen, welche denen der xyz parallel, aber so weit entfernt sind, dass die beiden entsprechenden Figuren sich nicht schneiden. Bildet man die Function

$$\Phi = x\xi + y\eta + z\zeta - F,$$

so genügt dieselbe den Gleichungen:

$$x = \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad y = \frac{d\Phi}{d\eta}, \quad z = \frac{d\Phi}{d\zeta}.$$

Die Functionen F und Φ stellen reciproke räumliche Diagramme vor. Dieselben können verwendet werden zur Darstellung innerer Kräfte; es werden zwei Methoden dafür angegeben. Die erste ist folgende:

Sind a, b irgend zwei aufeinanderfolgende Punkte des ersten Diagramms und α, β die entsprechenden des zweiten, so denke man sich um ab senkrecht dazu ein Flächenelement beschrieben. Ist nun die auf die Einheit dieser Oberfläche wirkende Kraft zusammengesetzt aus einem Zuge parallel zu $\alpha\beta$ und gleich $P\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}$ und einem Druck parallel zu ab und gleich

$$P\left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}\right), \quad (P = \text{const.}),$$

so wird ein in dieser Weise definirtes System von inneren Kräften

jeden Punkt des ersten Diagramms in Gleichgewicht halten. Die zweite: Ist *a* irgend ein Oberflächenelement des ersten Diagramms und *α* das entsprechende des zweiten und wirkt auf *α* ein gleichmässiger normaler Druck gleich *P* für die Flächeneinheit, und eine Kraft gleich und parallel der Resultante dieses Druckes auf die Fläche *a*, dann wird ein so definirtes System von inneren Kräften in dem ersten Diagramm jeden Punkt im Gleichgewicht halten. Schz.

P. Bretschneider. Punktverwandtschaft und Linearverwandtschaft ebener Figuren. Pr. Plauen i/V. 1870.

Eine von einem anderen Ausgangspunkte abgeleitete Darstellung der von Magnus (Crelle J. VIII. u. IX.) analytisch und von Steiner in der „Allgemeinen Anmerkung" seiner Entw. d. Abh. geom. Gest. synthetisch entwickelten Verwandtschaft mit einigen Anwendungen. Schz.

U. Dini. Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di un'altra. Brioschi Ann. (2) III. 269-294. 1870.

Nach Herrn Beltrami lassen sich nur Oberflächen constanter Krümmung so auf einer Ebene eindeutig abbilden, dass die Bilder geodätischer Linien Gerade werden. Herr Dini untersucht, unter welchen Bedingungen sich irgend zwei Flächen eindeutig so aufeinander abbilden lassen, dass jeder geodätischen Linie der einen eine geodätische Linie der anderen entspricht. Aehnlichkeit der kleinsten Theile wird bei dieser „geodätischen Abbildung" nicht verlangt. Die Beantwortung der Frage stützt sich auf folgenden Satz: Fixirt man auf einer Oberfläche 2 beliebige Curven *A* und *B*, so kann der Ort der Punkte, deren geodätische Entfernungssumme von *A* und *B* constant ist „geodätische Ellipse", der Ort der Punkte von constanter Entfernungs-Differenz „geodätische Hyperbel" genannt werden. Enthält nun eine Oberfläche eine Doppelschaar isothermer, geodätischer Ellipsen und Hyperbeln, welche dieselbe Basis *A* und *B* haben, und wählt man dieselben zu Coordinatenlinien, so hat das Linien-Element der Oberfläche

die Form:

$$ds^2 = (U-V)(U_1\,du^2 + V_1\,dv^2),$$

wo UU_1 nur von u, VV_1 nur von v abhängen; — umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, so sind die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ (isotherme) Hyperbeln und Ellipsen in Bezug auf die Curven A und B, deren Gleichungen sind:

$$\int\sqrt{(U-h)\,U_1}\,du + \int\sqrt{(h-V)\,V_1}\,dv = c,$$

$$\int\sqrt{(U-h)\,U_1}\,du - \int\sqrt{(h-V)\,V_1}\,dv = c_1,$$

c, c_1 und h sind Constante, h ist so zu wählen, dass $U-h$ und $V-h$ in dem betrachteten Theil der Oberfläche stets positiv bleiben. — Nachdem Herr D. diesen Satz entwickelt hat, erledigt er die Frage, wann sich zwei Flächen S und S' geodätisch aufeinander abbilden lassen. Da Aehnlichkeit der kleinsten Theile nicht verlangt wird, so giebt es nach Tissot auf S eine einzige Doppelschaar orthogonaler Curven, die bei eindeutiger Abbildung von S auf S' eine eben solche zum Bilde hat. Fasst man diese als Coordinatenlinien auf, so kann die Bedingung, dass den geodätischen Linien auf S eben solche auf S' entsprechen sollen, einfach analytisch ausgedrückt werden, und es ergiebt sich, dass die Linien-Elemente auf S und S' von folgender Form sein müssen:

$$ds^2 = (U-V)(U_1\,du^2 + V_1\,dv^2);$$

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{aV+b} - \frac{1}{aU+b}\right)\left(\frac{U_1}{a(aU+b)}\,du^2 + \frac{V_1}{a(aV+b)}\,dv^2\right)$$

(U, U_1 hängen nur von u, V und V_1 nur von v ab; a und b sind beliebige Constanten). Eine Oberfläche S (resp. ein Theil derselben) lässt sich demnach immer, aber auch nur d a n n geodätisch abbilden, wenn auf ihr eine Doppelschaar orthogonaler, isothermer geodätischer Kegelschnitte (mit derselben Basis) vorhanden ist; die Abbildung kann aber dann (wegen der willkürlichen Constanten a und b) auf unzähligen Flächen S' bewirkt werden, die nicht auf einander abwickelbar sind. Man bemerkt sofort, dass den Flächen 2ten Grades und sämmtlichen Rotationsflächen diese Eigenschaft zukömmt; die Grund-Curven schrumpfen in diesen Fällen zu Punkten zusammen, den Nabel-

punkten. Im letzten Theile seiner Arbeit geht Herr Dini näher auf den besonderen Fall der Flächen von constanter Krümmung ein. K.

Max Nöther. Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. Gött. Nachr. 1870. 1-6.

Von den in Betracht kommenden Flächen wird vorausgesetzt, dass aus ihnen durch ein Flächenbüschel eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven, und zwar durch eine Fläche des Büschels je eine Curve, ausgeschnitten wird. Solche Flächen lassen sich durch eine Reihe eindeutiger Abbildungen zunächst auf zwei Flächenfamilien reduciren, dann aber auch durch weitere eindeutige Abbildungen Punkt für Punkt eindeutig auf einer Ebene abbilden. Die Reduction auf zwei Flächenfamilien lässt sich auch noch in dem Fall ausführen, dass eine jede Fläche des Büschels mehrere Curven aus der gegebenen Fläche ausschneidet. T.

E. B. Christoffel. Sopra un problema proposta da Dirichlet. Brioschi Ann. (2) IV, 1-10. 1870.

E. B. Christoffel. Ueber die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise. Gött. Nachr. 1870. 288.

E. B. Christoffel. Ueber die Abbildung einer n-blättrigen, einfach zusammenhängenden Fläche auf einem Kreise. Gött. Nachr. 1870. 359.

Riemann hat in seiner Doctor-Dissertation (S. 21) gezeigt, dass jede einfach zusammenhängende Fläche eindeutig und in den kleinsten Theilen ähnlich auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann; die Form der Function zu bestimmen, welche für eine gegebene Begrenzung der Fläche diese Abbildung vermittelt, unternimmt Herr Chr. in einer Reihe von Abhandlungen. In einer früheren Arbeit (Brioschi Ann. (2) I, 89) handelt es sich um das Innere eines einblättrigen $n$seitigen Polygons, die obengenannten betreffen die Ergänzungsfläche, welche

nach Ausschnitt eines $n$seitigen Polygons von einer unbegrenzten einblättrigen Fläche bleibt, ferner die krummlinig begrenzte einblättrige und schliesslich die n-blättrige, einfach zusammenhängende Fläche. In allen Fällen wird das Innere einer Halbebene (dieselbe ist leicht auf dem Kreise abbildbar) auf die betreffende Fläche abgebildet; die umgekehrte Abbildung verlangt die Inversion eines Integrals aus einer Funktion, die im Allgemeinen nicht algebraisch ist. Als Beispiel für die Methode der Untersuchung soll hier der Gang der ersten Abhandlung (Br. Ann. (2) I, 89) kurz angedeutet werden. Die unabhängige, auf das Innere der Halb-Ebene beschränkte Variable sei Z, die zu bestimmende Function, welche die Halb-Ebene auf das Innere eines n-seitigen Polygons abbildet, sei z; $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ seien die Polygonwinkel, $a_1, a_2, \dots a_n$ die auf dem Rande (der X-Axe) der Halb-Ebene gelegenen Bilder der Polygon-Ecken. Der Herr Verfasser betrachtet die Grösse

$$X = (a_1-Z)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}} (a_2-Z)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}} \dots (a_n-Z)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}} \frac{dz}{dZ}$$

und zeigt, dass dieselbe in der ganzen Halb-Ebene von Null verschieden, eindeutig, stetig und endlich ist. Da nun $\log X$ dem imaginären Theil nach längs der X-Axe constant bleibt, so folgt, dass $\log X$, also auch X in der Halb-Ebene überall constant ist. Daher ergiebt sich:

$$(a_1-Z)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}} (a_2-Z)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}} \dots (a_n-Z)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}} \frac{dz}{dZ} = \text{constant.}$$

Selbstverständlich ist wegen der Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \dots a_n$ Z durch diese Gleichung allein noch nicht eindeutig definirt; sie wird es erst, wenn man, wie Herr Chr. an dem Beispiel der Rechtecksabbildung zeigt, den Zweig von Z bezeichnet, welcher die Abbildung leisten soll. Die Grössen $a_1, \dots a_n$ gelten als bekannte Constanten, jedem Werthsystem derselben entspricht für gegebene λ ein bestimmtes Polygon; ist aber das Polygon gegeben, so sind diese Quantitäten aus einer Anzahl transcendenter Gleichungen zu bestimmen. — Dass diese Bestimmung immer möglich ist, hat der Herr Verf. nicht a posteriori bewiesen. Dieser Nachweis ist freilich entbehrlich, wenn der Riemann'sche

Satz, dass für jede beliebige Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche wirklich eine, die verlangte Abbildung vermittelnde, Function existirt, ohne Einschränkung wahr ist; — am Schlusse seiner Abhandlung Gött. Nachr. 369 verweist jedoch der Herr Verf. selbst auf die Zweifel, die gegen den genannten Satz erhoben worden sind. Für das Rechteck, auch für die Ergänzungsfläche desselben, ist die Abbildungsfrage vollständig gelöst, damit auch die darauf hinauslaufenden Wärmeprobleme. Im Falle krummliniger Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche fasst Herr Chr. die Curve als Grenze eines eingeschriebenen Polygons auf und wendet die früher entwickelten Formeln an. Diese setzten die Bilder der Polygon-Ecken als gegeben voraus, deshalb scheint die allgemeine Abbildungsaufgabe nur lösbar, wenn bekannt ist, wie sich die Grenz-Curve auf der reellen Axe der Halb-Ebene abbildet; der Herr Verf. zeigt aber, wie die Abbildung auch ohne diese Kenntniss in manchen Fällen gelingen kann; im Allgemeinen (z. B. wenn die Grenzkurve aus Stücken verschiedener Curven zusammengesetzt ist) scheint die Schwierigkeit unüberwindlich; zur völligen Lösung der Frage ist daher noch ein bedeutender Schritt erforderlich.

K.

H. Schwarz. Ueber einige Abbildungsaufgaben. Borchardt J. LXX. 105-121. 1869.

H. Schwarz. Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. Borchardt J. LXX. 121-137. 1869.

Die Resultate der erstgenannten Arbeit sind zum Theil specielle Fälle der oben besprochenen, die auf etwas verschiedenem Wege gewonnen sind; dei der Abbildung des Quadrats werden die Bilder der Ecken auf dem Rande der Halb-Ebene nicht durch den Kalkül, sondern durch eine glückliche Vermuthung bestimmt. Die Ergänzungsflächen, sowie den Fall der beliebig krummlinigen Begrenzung hat Herr S. nicht in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen. In Betreff der im vorhergehenden Referat hervorgehobenen Constantenbestimmung bemerkt

der Herr Verf., der betreffende Nachweis sei ihm selbst für den Fall des Vierseits gelungen, für den allgemeinen verdanke er einen solchen Herrn Weierstrass; es wäre gewiss sehr dankenswerth, wenn diese Beweise auch veröffentlicht würden. Neu ist die Abbildungsmethode für Polygone, welche von Kreisbogen begrenzt werden; in diesem Falle betrachtet Herr S. die Form der Function

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}\right)^2$$

(u die Variabele des Polygons, t die der Halb-Ebene); enthält das Polygon im Innern keine Windungspunkte, so ist dieser Ausdruck eine rationale Function von t. Am Ende der ersten Abhandlung wendet sich Herr S. zu der Aufgabe: Die geschlossene einfach zusammenhängende Oberfläche eines ebenen Polyeders auf die Oberfläche einer Kugel eindeutig so abzubilden, dass mit Ausnahme der den Ecken entsprechenden Punkte die Abbildung überall in den kleinsten Theilen ähnlich, in diesen Punkten aber die Stetigkeit nicht unterbrochen sei. Unter der Voraussetzung, dass eine solche Abbildung möglich ist, wird die Form der abbildenden Function gegeben; — man denkt die Oberfläche des Polyeders auf einer Ebene u abgewickelt, die Kugel durch reciproke Radiivectoren eindeutig auf eine Ebene x abgebildet und bezieht diese beiden Ebenen auf einander. Für den Fall der regulären Polyeder lässt sich die Lösung nachträglich leicht verificiren. Die zweite Abhandlung beschäftigt sich eingehend mit dem Tetraeder und kommt zu dem Resultat: „Die Aufgabe der conformen Abbildung eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel mit der Bedingung, dass die Punkte beider Flächen einander eindeutig entsprechen sollen, ist stets lösbar, und zwar lässt diese Aufgabe nur eine Lösung zu, wenn festgesetzt wird, dass drei gegebenen Punkten der einen Fläche beziehlich drei gegebene Punkte der anderen entsprechen sollen."

K.

H. Schwarz. Notizia sulla rappresentazione di un' ellisse sopra un circolo. Brioschi Ann. (2) III. 166. 1870.

Ein elliptisch begrenztes Flächenstück (u) wird durch die

Function

$$s = \sin\mathrm{am}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin u\right)$$

eindeutig und conform auf das Innere eines Kreises (s) abgebildet. K.

E. Jochmann. Zur Abbildung der Rechtecke auf der Kreisfläche. Schlömilch Z. XIV. 532. 1869.

Den Parallelen zu den Rechtecksseiten entsprechen in dem conformen Kreisbilde orthogonale Curvensysteme 4ten Grades, welche Herr Jochmann einer eingehenden Untersuchung unterwirft. K.

H. Weber. Ueber ein Problem der Abbildung. Clebsch Ann. II. 140. 1869.

Die Fläche einer Lemniskate lässt sich durch eine algebraische (event. rationale) Function conform auf den Kreis abbilden. K.

R. Hoppe. Abbildung der Flächen 2ten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente. Clebsch Ann. II. 504. 1870.

Von den centrischen Oberflächen zweiten Grades werden zunächst die Octanten auf je ein Rechteck (dessen eine Seite bei den Hyperboloiden ins Unendliche rückt) zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet; die 8 Rechtecke werden in zwei Reihen zu je vier zu einem einzigen zusammengestellt; dasselbe bildet das erste Bild der Gesammt-Oberfläche, in welchem aber mehrere Theile getrennt liegen, die auf der Oberfläche zusammenhängen. Dieser Zusammenhang wird durch eine Abbildung des Rechtecks auf eine zweite Ebene, so weit wie möglich, wieder hergestellt. Das Ellipsoid erscheint schliesslich auf das Innere einer Ellipse abgebildet; die Ellipse ist Bild des Normalbogens, der zwei Nabelpunkte verbindet und längs dessen man die Oberfläche aufgeschlitzt denkt. Das einschalige Hyperboloid wird auf der unbegrenzten Ebene abgebildet; der elliptische Hauptschnitt ist in einen Kreis verwandelt,

das Innere stellt die eine Hälfte des Hyperboloids (der Mittelpunkt die unendlich entfernten Punkte), das Aeussere die andere dar. — Analog gestaltet sich die Lösung bei den nicht centralen Flächen 2ten Grades. Litterat. Borchardt J. LIX, 74.

K.

F. A. Grunert. Ueber conforme Kartenprojectionen. Grunert Arch. L. 176-216. 1869.

Herr G. macht zunächst auf zwei die Theorie der Kartenprojectionen betreffende Arbeiten, die eine von A. Germain (Paris A. Bertrand), die andere von Wittstein (Astronom. Nachr. No. 1704) in empfehlender Weise aufmerksam und behandelt sodann die conforme Abbildung des Sphäroids auf eine Ebene, bei welcher die Meridiane in Gerade durch einen Punkt O, die Parallelkreise in Kreise um O verwandelt werden, während die (geogr.) Längen auf dem Sphäroid zn den entsprechenden Winkeln des Bildes in constantem Verhältniss bleiben. Herr G. befolgt, wie er erklärt, im Wesentlichen die Methode von Lambert, dessen Verdienst um diese Theorie er, namentlich Gauss gegenüber, hervorhebt. Die Arbeit ist ihrem pädagogischen Zwecke entsprechend recht ausführlich gehalten. K.

F. Eisenlohr. Ueber Flächenabbildung. Borchardt J. LXXII. 144-151. 1870.

Bildet man ein gekrümmtes Flächenstück nach Aehnlichkeit der kleinsten Theile auf eine Ebene ab, so erscheint die Contour desselben im Bilde verzerrt, die Bilder der geodätischen Linien mehr oder weniger gekrümmt. Für die Kartenzeichnung ist es deshalb von Interesse, unter allen möglichen conformen Abbildungen (für jede besondere Begrenzung) diejenige zu bestimmen, welche die geringste Verzerrung zeigt. Herr Eisenlohr bemerkt nun, dass sich die Grösse der Verzerrung in einem gegebenen Punkte und für ein gegebenes Flächenstück nach folgenden Weisen messen lässt. An irgend einer Stelle des Bildes erhalten diejenigen geodätischen Linien des Originals, welche senkrecht zu einer Curve gleicher Vergrösserung stehen, keine, die von jener Curve berührten geodätischen Linien aber die grösste Krümmung. Der Fehler in einem Punkte des Bildes

kann daher durch die Krümmung der geodätischen Linie gemessen werden, welche in diesem Punkte die Linie gleicher Vergrösserungen berührt. Der Gesammtfehler ist ein Integral, dessen Element das Flächenelement des Bildes ist, multiplicirt mit dem Quadrat der grössten Krümmung in demselben. Herr Einsenlohr stellt nun die Bedingung fest, unter welcher dieses über das Gesammtbild erstreckte Integral ein Minimum wird. Die Untersuchung behandelt zunächst die Abbildung zweier beliebigen Flächen aufeinander, auf denen eine Doppelschaar orthogonaler, isothermer Linien zu Coordinatenlinien gewählt sind. Man erhält den Satz: Die Abbildung zeigt im Innern die kleinste Verzerrung, wenn die Vergrösserung auf dem ganzen Umfange der Begrenzung denselben Werth behält. Nimmt man zu dieser Bedingung diejenigen, welche sich auf die Stetigkeit des Vergrösserungsfactors beziehen, (cf. Weber, Borchardt J. LXVII. 231 u. f.) so ist die Art der conformen Abbildung völlig bestimmt. Herr E. betrachtet schliesslich die Abbildung der Kugel auf eine Ebene und geht insbesondere auf den Fall ein, dass das abzubildende sphärische Flächenstück von zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen begrenzt wird. K.

A. Ribaucour. Sur la déformation des surfaces. C. R. LXX. 330. 1870.

Wenn ein der Gestalt nach unveränderlicher Körper vier Bedingungen unterworfen ist, beschreiben, wie Mannheim gezeigt hat, seine Punkte Oberflächen, deren Normalen sich alle in einem gegebenen Augenblicke auf zwei Gerade stützen. Schneiden sich diese Paare von Geraden immer, so bildet der Ort ihrer Schnittpunkte im Körper und im Raume 2 aufeinander abwickelbare Flächen. Herr Ribaucour hat diesen Satz zum Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über Deformation gemacht, deren Ergebnisse ohne weiteren Beweis mitgetheilt sind. Von denselben seien folgende angeführt:

In jeder Tangenten-Ebene einer Fläche (A) sei ein Punkt M gegeben, den man durch die (krummlinigen) Coordinaten u und v des Berührungspunktes A bestimmt denke; durch M sei eine Parallele zur Normale in A gezogen. Diese Parallelen sind

Tangenten zweier Oberflächen *B* und *C*, welche von den durch *M* gehenden Geraden in *B* und *C* berührt werden mögen. Denkt man die Oberfläche (*A*) deformirt, während die Tangenten-Ebenen und die Punkte *M* mit ihr fest verbunden bleiben, so ist *MB.MC* constant. — Denkt man in jeder Tangenten-Ebene von *A* eine Curve verzeichnet und schneiden alle diese Curven irgend eine Flächenfamilie rechtwinklig, so behalten sie diese Eigenschaft, wenn (*A*) deformirt wird. Sind die Curven Kreise, so gehört die rechtwinklig durchschnittene Flächenschaar einem dreifachen Systeme orthogonaler Flächen an, welche Herr Ribaucour cyklische Systeme nennt. Jeder Oberfläche (*A*) erscheinen unzählig viele cyklische Systeme zugeordnet, deren Bestimmung von der Lösung einer nicht linearen partiellen Differential-Gleichung 2ter Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen abhängt. Die Integration erscheint nur in wenigen Fällen möglich; Herr Ribaucour theilt aber mit, dass er ohne dieselbe verschiedene derartige Systeme entdeckt habe. K.

A. Ribaucour. Sur la déformation des surfaces. Inst. 1. sect. XXXVII. 389. 1869.

Die kurze und nicht recht verständliche Notiz berichtet über Sätze, welche Herr Ribaucour in der Société Philomathique de Paris mitgetheilt hat. Dieselben betreffen Methoden, nach denen aus einer Gruppe auf einander abwickelbarer Flächen neue Flächen dieser Art abgeleitet werden können. K.

C. Exner. Ueber die Gestalt kleiner Flächenstücke. Grunert Arch. LI. 7-9. 1870.

K.

Blazek. Ueber das dreiaxige Ellipsoid als Deformation der Kugel aufgefasst. Prag. Ber. 1869. 29 31.

Der Herr Verf. betrachtet das Ellipsoid mit den Halbaxen *a, b, c* als Deformation einer Kugel mit dem Radius *r* in der Weise, dass einem jeden Punkte *x, y, z* in, auf oder ausserhalb des letzteren Gebildes ein entsprechend gelegener

$$\frac{ax}{r},\quad \frac{by}{r},\quad \frac{cz}{r}$$

am ersteren Gebilde beigeordnet ist, und beweist auf elementare Weise Lehrsätze über die dem Ellipsoid ein- oder umgeschriebenen Polyeder vom grössten oder kleinsten Volumen.

Mz.

F. Klein und S. Lie. Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. C. R. LXX. 1222-1226. 1275-1279. 1870.

Die Untersuchung betrifft diejenigen Curven, welche durch unendlich viele sich continuirlich an einander anschliessende lineare Transformationen in sich selbst übergeführt werden, sowie Flächen, die in bestimmter Weise durch zweifach unendlich viele Curven der genannten Art erzeugt werden und in Folge dessen die Eigenschaft besitzen, durch zweifach unendlich viele vertauschbare lineare Transformationen ungeändert zu bleiben. Die Verf. gehen wesentlich darauf aus, zu zeigen, wie diese Flächen und Curven eben vermöge ihrer hierin enthaltenen Definition eine grosse Menge sonstiger geometrischer Eigenschaften besitzen. Insbesondere entwickeln sie, wie die fraglichen Curven und Flächen in sich selbst übergehen durch eine unbegrenzte Reihe geometrischer Verwandtschaften, die aus den erzeugenden linearen Transformationen auf einfache und nothwendige Weise erwachsen. Zu diesen Curven und Flächen gehören beispielsweise, abgesehen von den Kegelschnitten, den Flächen zweiten Grades, den Raumcurven dritter Ordnung: die logarithmische Spirale, die Loxodrome auf der Kugel, die Flächen, deren Gleichung die folgende ist:

$$x^a y^b z^c = \text{const.}$$

u. s. w. Auch stehen diese Untersuchungen im engsten Zusammenhange mit dem in neuerer Zeit wiederholt betrachteten Linien-Complex, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse schneiden. Eine ausführlichere Darlegung dieser Betrachtungen, zunächst nur so weit sie sich auf ebene Curven beziehen, haben die Verf. inzwischen in den mathematischen Annalen gegeben ((Band IV. p. 50-84), auf welche denn hier verwiesen werden mag.

Kln.

A. Clebsch. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. Gött. Nachr. 1870. 486-489.

Der Herr Verf. bespricht in dieser Note die Abbildung der algebraischen Flächen 5ter Ordnung auf einer Ebene für den Fall, dass die Flächen eine Doppelcurve 4ter Ordnung besitzen. Zur Abbildung wird eine zweiblättrige Ebene benutzt. Eine ausführlichere Darlegung dieser Art der Abbildung und der in der Note angegebenen Principien behält sich der Herr Verf. für eine andere Gelegenheit vor. T.

A. Clebsch. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. Clebsch Ann. I. 253. 1869.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine allgemeine Exposition der eindeutigen Abbildung algebraischer Flächen auf eine Ebene. Bei der hervorragenden Wichtigkeit, welche diese Art von Betrachtungen in der neueren Geometrie gewonnen hat, mag eine kurze Auseinandersetzung des früher in dieser Richtung Geleisteten hier Platz finden. Eindeutige Verwandtschaften, welche über die Collineation hinausgehen, sind zunächst zwischen zwei Ebenen untersucht worden: die Betrachtung der einfachsten, der sogenannten quadratischen, geht bis auf Poncelet, Plücker, Magnus und Steiner zurück. Die allgemeinsten derartigen Verwandtschaften betrachtete Cremona in zwei wichtigen Abhandlungen, die 1863 und 1865 in den Abhandlungen der Academie zu Bologna erschienen, und darf der Gegenstand seitdem als eine der analytischen Geometrie der Ebene angeschlossene selbstständige Disciplin betrachtet werden. Von mehreren Flächen hat man seit langer Zeit, ob auch ohne Bewusstsein des allgemeinen Princips, die Flächen zweiten Grades auf die Ebene eindeutig bezogen, oder, wie man sagt, abgebildet. Denn das Verfahren der stereographischen Projection einer Kugel auf eine Ebene ist nichts Anderes als eine solche Abbildung. Diese Abbildung ist bekanntlich zugleich eine conforme, was im Allgemeinen bei diesen Abbildungen nicht der Fall ist, indem vielmehr der ganze Nachdruck einzig auf den eindeutigen algebraischen Zusammenhang zwischen Fläche und Ebene zu legen ist. —

Andererseits hatte, was wieder auf eine eindeutige Abbildung der Fläche auf die Ebene zurückkommt, Plücker 1847 im Crelle'schen Journale Bd. 34 den Gedanken entwickelt, den Punkt auf dem einschaligen Hyperboloide ähnlich wie den Punkt in der Ebene durch 2 Coordinaten eindeutig zu bestimmen, namentlich durch die beiden Strecken, welche von ihm aus gerechnet auf den beiden durch ihn gehenden Erzeugenden durch zwei feste Erzeugende der Fläche abgeschnitten werden. Aber die eigentliche Theorie der Flächenabbildung begann erst, als Chasles 1863 in den Comptes Rendus die Geometrie auf einer Fläche zweiter Ordnung vermöge einer eindeutigen Beziehung derselben auf die Ebene ausführlich behandelte. Den Gedanken, die Geometrie auch auf höheren Flächen mit der Geometrie der Ebene in Zusammenhang zu bringen, fassten gleichzeitig Clebsch und Cremona, indem sie unabhängig von einander im Anschluss an die Grassmann'sche Erzeugungsweise die Flächen dritter Ordnung in diesem Sinne behandelten. Die bez. Arbeit von Clebsch ist im 65ten Bde. von Borchardt's Journal mitgetheilt; Cremona's Abhandlung fand erst später Veröffentlichung (Borchardt's Journal Bd. 68) als Bestandtheil der bei der Berliner Academie eingereichten Preisarbeit über die Flächen dritter Ordnung. Im 67ten Bde. desselben Journal's findet sich bereits eine bez. Arbeit von Clebsch über die Steiner'sche Fläche und die Linienfläche dritter Ordnung, der sich im 68ten Bde ein Aufsatz über die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt anschliesst. (Vergl. Fortschr. d. M. I. p. 258).

Der vorliegende Aufsatz, der im Auszuge bereits in den Rend. d. Ist. Lomb. erschienen war (vergl. Bd. I. dieser Fortschritte p. 235) giebt zunächst eine übersichtliche Auseinandersetzung der Erscheinungen, welche sich im Allgemeinen bei einer solchen Abbildung einstellen. Geht man von der Abbildungsebene aus, so zeigen sich in ihr eine Anzahl sogenannter Fundamentalpunkte, denen auf der Fläche Gerade, Kegelschnitte, . . ., immer aber rationale Curven entsprechen. Indem der Verf. diese Fundamentalpunkte und die Ordnung der Abbildungscurven ebener Schnitte gegeben sein lässt, bestimmt er die Ordnung der abgebildeten Fläche, den Grad ihrer Doppelcurve, (die eine auf die

Ebene abbildbare Fläche im Allgemeinen besitzt), so wie die Singularitäten der auf der Fläche liegenden algebraischen Raumcurven, welche gegebenen Curven der Bildebene entsprechen. Die Abbildung der Doppelcurve geschieht dabei so, dass jedem ihrer Punkte zwei Punkte der Bildebene entsprechen, so dass in den einfachsten Fällen, wo die Doppelcurve eine rationale Curve ist, das Bild eine hyperelliptische Curve wird. — Statt von der Abbildungsebene kann man auch von der abzubildenden Fläche selbst ausgehen. Dann ist im Allgemeinen ein höheres algebraisches Problem zu lösen, wenn die Abbildung geleistet werden soll, und es entstehen also mehrere gleichberechtigte Abbildungsarten. Beispielsweise verlangt die Abbildung der Fläche dritter Ordnung die Kenntniss ihrer 27 Geraden und ist dann auf 72 Weisen möglich.

In der vorliegenden Abhandlung sind die allgemeinen Principien noch insbesondere angewandt zur Untersuchung der Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden, der Fläche fünfter Ordnung mit einer Raumcurve dritter Ordnung als Doppelcurve und der Fläche fünfter Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden. (Eine zusammenhängende Darstellung der Verhältnisse bei der eindeutigen Abbildung ist in neuester Zeit von Darboux in einer Reihe von Aufsätzen des Bulletin des Sciences Mathémathiques t. II gegeben worden, worauf hier verwiesen sein mag.) Kln.

A. Clesch. Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung. Clebsch Ann. I. 634-636. 1869.

Im Anschluss an die vorhin erwähnte Abbildung der geradlinigen Flächen dritter Ordnung (vergl. Borchardt's Journal LXVII.) zeigt der Verf., dass auf einer solchen Fläche Curven vom Geschlechte $p = 0$ in unbegrenzt vielen Arten existiren, nicht aber Curven von einem anderen Geschlecht. Vielmehr giebt es für jeden gegebenen Werth von p nur eine endliche Anzahl von Curvenarten auf der Fläche.

Kln.

A. Clebsch. Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades haben. Clebsch Ann. II. 445-467. 1869.

Die bez. Fläche wird mit Hülfe der oben besprochenen Principien der Abbildungstheorie behandelt.

Kln.

E. Armenante. Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano. Brioschi Ann. (2) IV. 50-73. 1870.

Diese Arbeit schliesst sich einmal an eine Abhandlung von Cremona (cf. Fortschritte I. p. 259) über Linienflächen vom Geschlechte $p=0$, die zwei Leitlinien besitzen, an, andererseits bedient sie sich derjenigen Methoden, die Clebsch in dem vorbesprochenen Aufsatze entwickelt hat. Dass Linienflächen vom Geschlechte $p=0$, und nur diese auf der Ebene abbildbar sind, hat Cremona bereits gezeigt. Der Verf. bewerkstelligt diese Abbildung ganz allgemein für Linienflächen beliebiger Ordnung. Die Abbildung zeigt immer einen höheren Fundamentalpunkt beziehungsweise mit einigen festen Tangenten und ausserdem eine Reihe einfacher. Er reducirt dieselbe vermöge einer geeignet bestimmten Cremona'schen Transformation auf eine normale Abbildung, die unter allen möglichen die niedrigsten Abbildungsfunctionen benutzt, nämlich bez. von den Graden $\frac{m+1}{2}$ und $\frac{m+2}{2}$, je nachdem der Grad n der Fläche gleich ist $2m+1$ oder gleich $2m$. Hierbei sind übrigens, wie sich aus einer neueren Arbeit von Clebsch (Clebsch Ann. Bd. V. p. 1) ergiebt (über die seiner Zeit referirt werden soll), nur gewisse, so zu sagen allgemeinste Fälle eingeschlossen, indem in besonderen Fällen die niedrigst zulässige Abbildung von einer höheren als der eben angegebenen Ordnung werden kann. Der Verf. erläutert seine Methode an der Linienfläche n^{ten} Grades mit $(n-1)$facher Leitlinie, insbesondere an der Linienfläche vierter Ordnung mit dreifacher Leitgeraden.

Kln.

G. Korndörfer. Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten. Clebsch Ann. I. 592, II. 41. 1869. III. 496 1870. IV. 117. 1871.

Ueber die Abbildung der Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt, die sonst keine singulären Punkte besitzt, welche Clebsch Borchardt's J. Bd. 67 gab, wurde bereits im ersten Bande dieser Fortschritte p. 258 referirt. Korndörfer hat nun in ähnlicher Weise die besonderen Fälle behandelt, welche bei dieser Fläche auftreten können. Diese Fälle bestehen entweder in dem Hinzutreten von Knotenpunkten oder darin, dass der Doppelkegelschnitt in zwei sich schneidende Gerade aufbricht, welche gelegentlich auch zusammenfallen können. Am Schlusse der Arbeit ist eine Uebersicht über die überhaupt vorkommenden Fälle zugefügt. Der Fall, auf welchen Cayley neuerdings aufmerksam machte (in den Proc. of the London Math. Society III), dass der Doppelkegelschnitt in einen Cuspidalkegelschnitt übergeht, ist bei Korndörfer nicht behandelt.

Kln.

A. Clebsch. Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen. Gött. Nachr. 1870. 253.

Auszug aus dem Folgenden. Kln.

A. Clebsch. Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen. Clebsch Ann. III. 45-75. 1870.

Während die eindeutige Abbildung einer Fläche auf eine Ebene, falls sie möglich ist, im Allgemeinen auf ein höheres algebraisches Fundamentalproblem führt, ist die Lösung eines solchen bei der Beziehung der Fläche auf eine mehrfache Ebene nicht nöthig; die Fläche kann z. B. zu einer mehrfachen Ebene dadurch in Beziehung gesetzt werden, dass man sie von einem beliebigen Punkte aus projicirt. Die Blätter der mehrfachen Ebene hängen längs einer Curve, der „Uebergangscurve", zusammen. [Es mag hier ausdrücklich auf den Unterschied solcher

mehrfachen Flächen von den Riemann'schen Flächen hingewiesen werden. Die Punkte einer Riemann'schen Fläche haben reelle Coordinaten, umfassen daher nur ein doppelt unendliches Werthgebiet, und die Blätter hängen nur in einzelnen Punkten zusammen. Hier dagegen können die Punktcoordinaten complexe Werthe annehmen, sie erfüllen ein vierfach unendliches Werthgebiet, und die verschiedenen Blätter des Gebietes hängen längs einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit, d. h. einer Curve zusammen.] Das Problem der eindeutigen Abbildung ist dadurch auf das Problem der Abbildung einer mehrfachen Ebene mit gegebener Uebergangscurve auf eine einfache zurückgeführt.

Für die Untersuchung der bisher gekannten eindeutigen Flächenabbildungen genügt es, eine Doppelebene zu betrachten, da die Abbildung auf eine solche in allen bekannten Fällen ohne Weiteres geleistet werden kann. Es zeigt sich nun, dass der Uebergang von einer Doppelebene zu einer einfachen Ebene, sofern er möglich ist, immer nur auf die Zweitheilung derjenigen Abel'schen Functionen führt, welche von der Uebergangscurve abhängen, wodurch dann der Charakter der erwähnten Fundamentalprobleme eine eigenthümliche Beleuchtung erfährt. Es muss übrigens hinzugefügt werden, dass dieses Zweitheilungsproblem in solchen Fällen, wo man von einer Fläche ausgehend erst zur Doppelebene gelangt ist, im Allgemeinen eine Reduction dadurch erfährt, dass eine seiner Lösungen oder eine Lösung seiner Resolvente als bekannt zu adjungiren ist. Beispielsweise verlangt die Abbildung der Doppelebene mit einer Uebergangscurve vierter Ordnung die Bestimmung der 28 Doppeltangenten. Die Abbildung einer Fläche dritter Ordnung durch Projection von einem ihrer Punkte aus führt aber auf eine Uebergangscurve vierter Ordnung, von der eine Doppeltangente bekannt ist, insofern sie dem Projectionspunkte entspricht; die 27 übrigen sind die Bilder der 27 Geraden der Fläche (eine Beziehung, auf die Geiser zuerst aufmerksam gemacht hat (Clebsch Ann. I. 129 s. p. 417)) und bleiben noch zu bestimmen. — Als Anwendung der hiermit angedeuteten Principien behandelt der Verf. die Abbildung der Fläche dritter Ordnung, der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, der Fläche vierter Ordnung mit

Doppelgerade und der Fläche fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve vierter Ordnung. Die Uebergangscurve wird in den beiden ersten Fällen eine Curve vierter Ordnung, im dritten Falle eine Curve sechster Ordnung mit einem vierfachen Punkt und im letzten Falle eine Curve sechster Ordnung mit einem vierfachen und einem Doppelpunkt. Die letztgenannte Fläche ist übrigens ausführlicher von Clebsch in den Abhandlungen der Göttinger Societät Bd. XV. 1870 behandelt. Kln.

C. F. GEISER. Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. Borchardt J. LXX. 249-257. 1869.

Die von Herrn Camille Jordan in den Comptes rendus vom 15. März 1869 (s. p. 273) veröffentlichten algebraischen Untersuchungen lassen einen Zusammenhang erkennen zwischen den Geraden einer allgemeinen Fläche dritten Grades und den Geraden einer Fläche vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades hat. Dies geometrisch zu bestätigen, ist der Zweck dieses Aufsatzes. Es werden zwei Methoden angewandt, die Punkte einer solchen Fläche vierten Grades mit denen einer Fläche dritten Grades im Allgemeinen eindeutig in Beziehung zu setzen, eine indirekte und eine direkte. Mittelst beider wird abgeleitet, dass wenn man aus den 27 Geraden einer Fläche dritten Grades irgend eine und diejenigen zehn, welche diese schneiden, ausscheidet, die übrigen 16 Geraden in Bezug auf gegenseitiges Schneiden oder Nichtschneiden dieselbe Anordnung zeigen als die 16 Geraden einer Fläche vierten Grades von der angegebenen Art. In beiden Abbildungsmethoden entsprechen nämlich die letzteren solchen 16 Geraden der Fläche dritten Grades, welche auf die angegebene Weise erhalten werden Die erste dieser Methode beruht auf einer geeigneten Vereinigung der von Herrn Clebsch angegebenen Abbildungen der allgemeinen Fläche vierten und dritten Grades auf eine Ebene (Borchardt J. B. LXIX. 142, (siehe Fortschr. d. M. I. p. 258) LXV. 359). Die zweite ist eine Verallgemeinerung des Principes der reciproken Radien, wobei als fester Pol irgend ein einfacher Punkt der gegebenen Fläche vierten Grades und eine Fläche zweiten Grades

gewählt wird, welche in der Doppelcurve den durch dieselbe als Leitlinie und den Pol als Mittelpunkt bestimmten Kegel berührt. Die entsprechende Fläche dritten Grades geht dann durch die Doppelcurve. Mittelst dieser Beziehung wird zuletzt aus den Eigenschaften einer Fläche dritten Grades, welche den unendlich entfernten imaginären Kreis des Raumes enthält, der Satz abgeleitet, dass auf Flächen vierten Grades, welche diesen imaginären unendlich entfernten Kreis zur Doppelcurve haben, entweder zwei oder sechs reelle Kreisschaaren liegen. Schz.

F. Klein. Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse. Clebsch Ann. II. 371-372. 1870.

Die Complexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse gehören zu den Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppellinie haben. Die Abbildung dieser Flächen ist von Herrn Clebsch (Clebsch Ann. I. 253, s. p. 633) gegeben. Die Abbildung jener ersten specielleren wird hier von dem Herrn Verf. erörtert.

T.

H. Müller. Ueber eine Construction der allgemeinen Curve vierter Ordnung, welche durch 14 ihrer Punkte bestimmt ist. Pr. Lahr 1870.

Bezeichnet man durch $\varkappa$, λ, μ die Coordinaten eines Punktes in der Ebene; und durch

$$f_1(\varkappa, \lambda, \mu) = 0, \qquad f_3(\varkappa, \lambda, \mu) = 0,$$
$$f_2(\varkappa, \lambda, \mu) = 0, \qquad f_4(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$$

die Gleichungen von vier Curven dritter Ordnung in der Ebene, welche sämmtlich durch 6 gegebene Punkte $p_1, p_2, \dots p_6$ gehn; bestimmt man ferner die vier Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes x im Raume durch die Gleichungen

$$\varrho x_1 = f_1, \quad \varrho x_2 = f_2, \quad \varrho x_3 = f_3, \quad \varrho x_4 = f_4,$$

so ist jeder Punkt $\varkappa$, λ, μ der Ebene die Abbildung eines Punktes x einer Fläche dritter Ordnung und umgekehrt; wie dies von Herrn Clebsch zuerst gezeigt ist. Jeder ebene Schnitt dieser Fläche dritter Ordnung hat zur Abbildung eine Curve dritter Ordnung, welche durch die sechs Punkte $p_1, \dots p_6$ hin-

durchgeht. Die Abbildungen der Schnitte eines Ebenenbüschels bilden einen Büschel von Curven, welche ausser durch die sechs Punkte $p_1, \dots p_6$ noch durch drei Punkte gehn, nämlich die Abbildungen der drei Punkte, in welchen die Axe des Ebenenbüschels die Fläche dritter Ordnung schneidet.

Sind nun in der Ebene ausser jenen Punkten $p_1, \dots p_6$ noch acht andere Punkte gegeben: $p_7, \dots p_{14}$, so bestimme man die Abbildungen der sieben Punkte $p_7, \dots p_{13}$, sie seien $m_7, \dots m_{13}$; ziehe ferner von p_{14} die sieben Strahlen nach den Punkten $p_7, \dots p_{13}$; man hat nun einen Ebenenbüschel zu suchen, dessen sieben durch die Punkte $m_7, \dots m_{13}$ gelegte Ebenen bezüglich den sieben Strahlen (p_{14}), $p_7, p_8, \dots p_{13}$ projectivisch sind.

Die Abbildungen der Schnitte jener Ebenen sind sieben Curven dritter Ordnung eines Büschels, zu dessen neun Grundpunkten die Punkte $p_1, .. p_6$ gehören, und welches zu dem ebenen Strahlenbüschel (p_{14}) durch die Punkte $p_7, \dots p_{13}$ projectivisch geordnet ist. Der Ort des Durchschnitts irgend zweier entsprechender Elemente aus diesen beiden Büscheln ist die verlangte Curve vierter Ordnung.

In Bezug auf die Construction der Axe des Ebenenbüschels verweist der Herr Verfasser auf seine Abhandlung: „Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung"; Clebsch Ann. Bd. I. p. 415. siehe Abschn. VIII. Cap. 5 p. 434. Auf die Untersuchung der drei nothwendigen Punkte eines Büschels von Curven vierter Ordnung ist nicht eingegangen. A.

E. Weyr. Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. Schlömilch Z. XIV. 445-477. 1869.

Zwei ebene Systeme S und Σ, denen als Elemente Punkte zu Grunde liegen mögen, werden definirt als quadratisch oder eindeutig verwandt, wenn zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte lineare Beziehungen stattfinden, so zwar, dass jedem Punkte des einen Systems im Allgemeinen nur ein Punkt des anderen entspricht. Sind x, y, z die homogenen Coordinaten eines Punktes im System S und ξ, η, ζ die des entsprechenden Punktes im System Σ, so ist diese Verwandtschaft ausgedrückt

durch die Relationen

$$xf_{i1}+yf_{i2}+zf_{i3} = 0; \qquad i = 1, 2,$$

wo

$$f_{ij} = a_{ij}\xi + b_{ij}\eta + c_{ij}\zeta$$

und $j = 1, 2, 3$ zu setzen ist. Diese Gleichungen, welche die Natur der Verwandtschaft festsetzen, werden Verwandtschaftsgleichungen genannt.

Bedeuten x, y, z und ξ, η, ζ homogene Liniencoordinaten, so sind die Systeme S und Σ eindeutig so auf einander bezogen, dass jeder Geraden des einen Systems im Allgemeinen nur eine Gerade des anderen Systems entspricht: zugleich werden durch die Relationen eindeutig verwandte Strahlenbündel umfasst, mögen als erzeugende Elemente Strahlen oder Ebenen gelten. Der Verf. beschränkt sich nunmehr darauf die Natur der eindeutigen Verwandtschaft für den Fall zu untersuchen, dass den ebenen Gebilden Punkte als Elemente zu Grunde liegen.

Wenn die beiden Verwandtschaftsgleichungen überhaupt eine Verwandtschaft festsetzen sollen, so ist eine nothwendige Bedingung, dass beide unabhängig sind. Dieser Bedingung widerspricht die Annahme, dass 8 Punkten des einen Gebildes 8 Punkte des anderen entsprechen sollen. Giebt man aber sieben Paar entsprechender Punkte in den Systemen S und Σ an, so ist dadurch, wie die weitere Untersuchung zeigt, eine eindeutige Verwandtschaft derselben bestimmt; auf diese geht der Verf. nunmehr näher ein.

Im Allgemeinen entspricht jedem Punkte ξ, η, ζ ein einziger Punkt x, y, z; wählt man aber ξ, η, ζ so, dass sich die Coefficienten beider Verwandtschaftsgleichungen nur um einen constanten Factor λ unterscheiden, so reduciren sich die zwei Gleichungen auf eine, welche linear ist, also ausspricht, dass dem so gewählten Punkt ξ, η, ζ in Σ alle Punkte einer Geraden in S entsprechen. Die Werthesysteme ξ, η, ζ, für welche das statt hat, werden durch die 3 Gleichungen bestimmt:

$$f_{21} = \lambda f_{11}, \qquad f_{22} = \lambda f_{12}, \qquad f_{23} = \lambda f_{13};$$

die Elimination von ξ, η, ζ aus diesen Gleichungen führt auf eine cubische Gleichung für λ, und diese zeigt, dass im Allgemeinen drei solcher Werthsysteme ξ, η, ζ existiren. Es giebt also in dem

eindeutig verwandten Systeme drei Punkte in Σ, denen drei Gerade in S entsprechen, und eine analoge Schlussfolgerung zeigt, dass gleichfalls in S drei Punkte auftreten, denen 3 Gerade in Σ entsprechen. Diese, die Hauptpunkte des Systems, liegen zu den in jedem System auftretenden Hauptlinien so, dass je zwei Hauptlinien sich in einem Hauptpunkte schneiden. Nachdem der weitere Verlauf der Untersuchung ergeben hat, dass die Angabe eines Hauptpunktes und der ihm entsprechenden Hauptlinie der Angabe von zwei Paaren entsprechender Punkte gleich kommt, wendet sich der Verf. zur Entwickelung von anderen Eigenschaften eindeutig verwandter Systeme, wobei sich zwei Fälle zur Unterscheidung bieten, je nachdem die cubische Gleichung für λ 3 reelle oder zwei conjugirte imaginäre Wurzeln hat. Im ersten Fall sind alle Hauptelemente reell, und die ihm entsprechende Verwandtschaft ist diejenige, welche Herr Fr. Seidewitz in der Abhandlung „Darstellung geometrischer Verwandtschaft etc.“ (Grunert Arch. VII. 1-3) unter dem Namen geometrische Verwandtschaft behandelt hat; im zweiten Falle enthält jedes System zwei conjugirt imaginäre Hauptpunkte, denen zwei conjugirt imaginäre Hauptlinien entsprechen und zwar ist die Verbindungslinie ersterer, sowie der Schnittpunkt letzterer reell und Hauptelement des Systems. In beiden Fällen entspricht einer Curve C_n n^{ten} Grades eine Curve Γ_{2n} $2n^{\text{ten}}$ Grades, welche in den Hauptpunkten $n$fache Punkte hat; hat aber C_n in den Hauptpunkten resp. einen p, q, rfachen Punkt, so ist der entsprechende Ort Γ_{2n} aus den resp. p, q, rfachen Hauptlinien und einer Curve von der Ordnung $2n-(p+q+r)$ zusammengesetzt.

Eine weitere Interpretation der Verwandtschaftsgleichungen zeigt, dass, wenn zwei ebene Systeme S und Σ in eindeutiger Verwandtschaft stehen, sie sich auf unendlich viele Arten auf einander so reciprok beziehen lassen, dass der einem Punkte des einen Systems eindeutig verwandte Punkt als der Durchschnitt jener Geraden erscheint, die dem erstgenannten Punkt vermöge der reciproken Verwandtschaften entsprechen. Wenn daher zwei ebene Systeme S und Σ beliebig oft auf einander reciprok bezogen sind, und zwar so, dass die Polaren auf Punkten des einen durch sieben Punkte des anderen resp. hindurchgehen, so werden

die Polaren jedes Punktes durch einen fixen Punkt gehen. Nachdem von diesem Gesichtspunkt aus die von Herrn Th. Reye behandelte quadratische Verwandtschaft, (Schlömilch Z. XI.) beleuchtet ist, nimmt der Verf. die Systeme S und Σ auf einem Träger (Ebene) an und behandelt besonders ihre involutorische Lage; diese hat statt, wenn jedem Punkt der nämliche Punkt entspricht, mag man ersteren zu S oder Σ rechnen. Mit Leichtigkeit folgert er aus den analytischen Formen, dass 4 Paar entsprechender Punkte die involutorische Verwandtschaft fixiren, und gewinnt den Satz: „Für zwei eindeutig verwandte Systeme in involutorischer Lage lässt sich stets ein Kegelschnittbüschel angeben, so dass der einem Punkte zugeordnete Punkt der Durchschnitt der Polaren des ersteren bezüglich des Kegelschnittbüschels ist".

Zum Schlusse giebt der Verf. eine Anwendung der behandelten Verwandtschaft auf die Construction von gewissen Curven. Als Grundlage dient ihm folgender Satz: „Eine durch drei $n$fache und weitere einfache Punkte bestimmte Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung lässt sich construiren, sobald man im Stande ist, eine Curve n^{ter} Ordnung zu verzeichnen." Im Besonderen ist damit die Construction einer Curve vierter Ordnung geleistet, wenn 1) drei Doppelpunkte und fünf weitere Punkte, 2) zwei Doppelpunkte, eine Spitze und vier weitere Punkte 3) ein Doppelpunkt, zwei Rückkehrpunkte und drei einfache Punkte, endlich 4) drei Spitzen und zwei einfache Punkte gegeben sind. Die Arbeit, welche über die quadratische Verwandtschaft vielfach neues Licht verbreitet, schliesst endlich mit dem bemerkenswerthen Resultat: „Von einer Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist ein $n$facher Punkt, und $2n+2$ weitere einfache Punkte gegeben; dieselbe ist linear zu construiren."

Schn.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.)

G. Krebs. Lehrbuch der Physik und Mechanik. Wiesbaden 1870.

Das Lehrbuch enthält das, was man gewöhnlich in Schullehrbüchern der Art zu finden pflegt. Die Mechanik ist verhältnissmässig ausführlich behandelt. Die mathematischen Entwickelungen sind elementar. O.

R. Wolf. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich I. Bd. 1869-1870.

Dieses Handbuch behandelt im XXIII. und XXIV. Kapitel des ersten Bandes die reine Dynamik. Jedem Paragraphen, der in Kürze die Hauptformeln und ihre Entwickelung enthält, folgen werthvolle literarisch-historische Notizen, welche eine Uebersicht über den Entwickelungsgang der Wissenschaft und die betreffende Literatur gewähren. M.

W. Schell. Theorie der Bewegung und Kräfte. Leipzig 1870.

Das vorliegende umfangreiche Werk (beinahe 1000 Seiten gross Octav) in seinen Einzelheiten genau zu besprechen, würde den hier gestatteten Umfang eines Referates weit überschreiten. Es ist ein Lehrbuch der reinen Mechanik, das dem neueren Stand-

punkte der Wissenschaft entsprechend im ersten Theile eine eingehende Erörterung der Geometrie der Bewegung enthält, und dann erst die Theorie der Bewegung und der Kräfte behandelt. Neue grundlegende Gedanken sind in dem Werke nicht enthalten; es will nur das Bekannte in systematischer, zusammenhängender Form geben. Dafür bietet es eine seltene Fülle von Material und zeichnet sich auch dadurch in dankenswerther Weise vor anderen Lehrbüchern aus, dass es einen Reichthum an Quellen- und Literaturangaben enthält, wie er unseres Wissens sich in keinem ähnlichen Werke findet. O.

J. HENRICI. Elementar-Mechanik des Punktes und des starren Systems. Leipzig 1869.

Ein Lehrbuch der ersten Elemente der Mechanik. Die Behandlung ist rein theoretisch, aber so, dass die Kenntniss der Trigonometrie nicht nothwendig ist; die trigonometrischen Entwickelungen sind jedoch den einzelnen Capiteln anhangweise angereiht. Der erste Abschnitt behandelt die Bewegung des Punktes und führt die Begriffe der gleichförmigen, der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung und der relativen Bewegung ein. Den Schluss des Abschnitts bilden die Wurfbewegung und die Schwingungsbewegung. Im zweiten Abschnitt wird von den Kräften an einem Punkte gesprochen. Nach Erläuterung des Begriffs wird die Zusammensetzung von Kräften und ihrer Projectionen behandelt und endlich Lehrsätze über die unfreie Bewegung eines Punktes und veränderliche Kräfte gegeben. Der dritte Abschnitt ist den einfachen starren Systemen, Hebel und Kräftepaar, gewidmet. Der vierte Abschnitt endlich handelt von der Bewegung starrer Massen, und enthält das Nöthige über Translation und Rotation derselben sowie die Bestimmung von Trägheitsmomenten. Zahlreich eingestreute Aufgaben machen das Buch empfehlenswerth. O.

L. BROTHIER. Elementi di Meccanice. Milano. Treves 1870.

A. PRIVAT-DESCHANEL. Elementary treatise on natural philosophy. London, Blackie 1870.

A. TRANSON. Cinématique ou phoronomie. Inst. 1 sect. XXXVIII. 117. 1870.

Es wird constatirt, dass die Aufstellung der Cinematik (Lehre von der Bewegung, abgesehen von den hervorbringenden Kräften) als Wissenschaft nicht von Ampère, sondern von Wronski herrühre. Der Begriff der Cinematik findet sich bereits in der ersten Nummer der von Wronski herausgegebenen Sphinx im Jahre 1818, während Ampère's „Essai sur la philosophie des sciences" erst 1834 erschienen ist. Wronski theilt dort die Mathematik in Geometrie, Algorithmie und Phoronomie, bei welch letzterer er den Begriff der Kraft ausdrücklich ausschliesst. Die Mechanik ordnet er als besonderen Theil der Physik unter.

O.

A. GENOCCHI. Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. Atti di Torino IV. 1869.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. p. 336.

A. GENOCCHI. Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide. Soc. It. dei IL. (3) II. 1869.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. p. 336.

PIARRON DE MONDÉSIR. Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la mécanique. C. R. LXIX. 1351-1355. 1869. LXX. 92-96, 150-155, 246-249. 1870.

Der Verfasser schlägt vor, im d'Alembert'schen Princip das unklare Wort „Kraft" durch „mechanische Arbeit" zu ersetzen. Von den verschiedenen Formen, unter welchen dieselbe sich darstellt, hat er vier betrachtet, die statische, dynamische, elastische, calorische. Unter statischer Arbeitsmenge (magasin de travail statique) versteht der Verfasser die Arbeitsmenge, die ein der Schwere unterworfener Körper in Folge seines möglichen Falles über eine horizontale Ebene hinaus besitzt. Die dynamische Form ist eine Folge der Bewegung des Körpers und zerfällt in die eigentlich dynamische Arbeitsmenge in Folge der Translation und die drehende (tournant) in Folge der Rotation. Die elastische

Arbeitsmenge ist die, welche ein durch irgend eine Kraft deformirter Körper besitzt, dessen Schwerpunkt momentan nicht mit der Gleichgewichtslage zusammenfällt. Die calorische Arbeitsmenge endlich ist die, die ein Körper durch Zuführung einer gewissen Quantität Wärme erhält. Wird nun ein in Bewegung befindliches System zu irgend einer Zeit betrachtet, so wird eine gewisse Arbeitsmenge unter irgend welchen Formen vorhanden sein. Dieselbe Arbeitsmenge muss aber auch zu einer anderen Zeit, wenn auch in anderer Form da sein. Daraus ergiebt sich die Gleichung der Arbeitsmengen. Dies ist im Princip die neue Methode, die der Verfasser in einem demnächst zu veröffentlichenden Werke angewandt hat. Ob der Begriff der Arbeitsmenge grössere Klarheit enthält, als der der Kraft, das zu beurtheilen ist hier nicht der Ort, dürfte auch erst nach Erscheinen des Werkes zu entscheiden möglich sein, da die in den folgenden Noten angegebenen Resultate und Andeutungen über die Benutzung der Methode dazu nicht ausreichen. O.

J. M. DE TILLY. Études de mécanique abstraite. Mém. cour. de Belg. in 8°. XXI. 1870.
Rapport par Liagre et Quetelet. Bull. de Belg. XXVII. 615-620. 1869.

Die Fruchtlosigkeit der vielfach wiederholten Versuche, einen Beweis des Parallelen-Axioms auf Grund der vorangehenden Axiome zu liefern, hat bekanntlich Lobatchefsky und etwas später Bolyai dazu geführt, eine allgemeinere Geometrie zu construiren, in welcher die gewöhnliche Geometrie als specieller Fall enthalten und eben durch die Geltung des Parallelenaxiom's charakterisirt ist, vergl. Baltzer's Elemente der Mathematik, sowie eine Reihe von Veröffentlichungen und Uebersetzungen von Hoüel in den Mém. de l'Académie de Bordeaux und in dem Journ. der École Normale. Lange Zeit unbeachtet zogen diese Untersuchungen die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich, als durch Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher bekannt wurde, dass Gauss sich bereits vor Lobatchefsky mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt hatte. Wenn durch die bez. Untersuchungen mathematisch allein bewiesen

ist, dass das Parallelen-Axiom nicht aus den vorangehenden folgt, dass es ein wesentlich neues Element in die Fundamente der Geometrie einführt: so wandte sich das allgemeine Interesse der namentlich auch von Gauss angeregten philosophischen Frage zu, woher das Parallelen-Axiom stammt, ob es Gründe giebt, dasselbe als absolut richtig zu betrachten, oder ob es möglicherweise nur approximative Geltung beansprucht. Durch diese Fragestellung ist das rein mathematische Interesse, welches die genannten Betrachtungen bieten, wohl nur zu sehr in den Hintergrund gedrängt worden, während dieses gerade, völlig unabhängig von den eben berührten philosophischen Speculationen, über deren Werth oder Unwerth verschiedene Meinungen aufgestellt worden sind von ungemeiner Bedeutung zu sein scheint. In der That ist der Raum, wie ihn sich Lobatchefsky und Bolyai denken, das erste Beispiel mit mehr als zwei Dimensionen für die seitdem entwickelte Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse, deren Theorie Riemann (Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsschrift) in allgemeinen Zügen entworfen und Beltrami (Theoria degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica 1868) weiter ausgeführt hat. Neuere Untersuchungen (Ueber die sog. Nicht-Euklidische Geometrie- Math. Annalen Bd. IV. p. 573) haben dann gelehrt, dass diese Massbestimmungen von constantem Krümmugsmasse gleichbedeutend sind mit denjenigen, die Cayley, in Anlehnung an Chasles, von Betrachtungen der neueren Geometrie ausgehend, in der Ebene auf einen Kegelschnitt, im Raume auf eine Fläche zweiten Grades hat gründen lehren. (A sixth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. 1859.) Es ist hierdurch für die etwas abstracte Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse, wenigstens für zwei und drei Dimensionen ein sinnliches Bild gewonnen, und die Frage nach den bez. geometrischen resp. mechanischen Verhältnissen ist nun ein mit unserer gewöhnlichen räumlichen Anschauung fassbares Problem. Der Verfolg dieser Betrachtungen hat — wiederum abgesehen von den Anwendungen, die Jemand zum Zwecke der Naturerklärung unter Nicht-Annahme des Par-

allelen-Axioms davon machen möchte — einen grossen Werth, insofern es sich um eine mathematisch höchst interessante Begriffsbildung handelt, die überdies die gewöhnliche Massbestimmung im Raume und die auf sie bezüglichen Aufgaben als Ausartungsfall umschliesst und uns dieselben daher von einem höheren Standpunkte aus auffassen lehrt.

Wenn Ref. hiermit den Gesichtspunkt entwickelt hat, der ihm der mathematisch richtige scheint, so geht die Schrift, welche augenblicklich zum Berichte vorliegt und die über die unter Nicht-Annahme des Parallelen-Axioms aufzustellende Mechanik handelt, durchaus von der anderen, eben gekennzeichneten, von philosophischen Ansichten getragenen Anschauung aus, wie dies am deutlichsten aus dem Schluss-Satze hervorspringt:

„Comme il résulte que l'on peut, en toute sécurité, employer la science usitée dans les applications terrestres et que, par conséquent, la science abstraite n'y sert à rien; et que d'ailleurs il n'est pas encore établi que cette dernière puisse conduire aux applications indiquées dans les numéros précédents, il convient peut-être, après en avoir posé les bases, d'ajourner la continuation de son étude jusqu'à ce qu'il soit prouvé qu'elle puisse être autre chose qu'un objet de curiosité.“

Der Inhalt der Schrift lässt sich als ein erster Versuch ansehen, die Kinematik und weiterhin die Dynamik in Anlehnung an die „géométrie abstraite“ zu behandeln, wobei von den Voraussetzungen der gewöhnlichen Dynamik möglichst viel beibehalten wird (vgl. übrigens die Note von Schering. Die Schwerkraft im Gaussischen Raume. Gött. Nachrichten 1870 siehe Cap. 4 sowie die Arbeit von Lipschitz: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt J. LXXIV. 116.) Ref. kann nicht genug hervorheben, wie sehr diese Dinge an Uebersichtlichkeit gewinnen, wenn man die Vorstellungen der neueren Geometrie aufnimmt und also unter Bewegungen nunmehr solche continuirliche lineare Transformationen des Raumes versteht, welche eine gegebene Fläche zweiten Grades ungeändert lassen. Es werden dadurch nicht nur alle Dinge, welche der Verf. berührt, an sich

evident, sondern eine Reihe von Schwierigkeiten, die er gelegentlich als von ihm noch nicht überwunden bezeichnet, erledigen sich von selbst. Kln.

J. Ch. Walberer. Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. Münnerstadt 1866.

Das Buch behandelt in elementarer Weise die Hauptsätze aus der Statik und Dynamik fester Körper, soweit sie auf Schulen gegeben werden können. Am Schluss findet sich eine ziemlich grosse Anzahl von Uebungsaufgaben. Neues bietet das Buch nicht. O.

Capitel 2.
Kinematik.

A. H. Béchaux. Mechanical geometry. An application to geometry of some propositions in statics. London Harderick 1869.

G. Battaglini. Memoria sulle dinami in involuzione. Atti di Napoli IV. 1869.

Man betrachtet als Coordinaten einer Dyname die sechs Kräfte, welche, nach den Kanten eines Tetraeders wirkend, ein einem gegebenen System von Kräften äquivalentes System bilden. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Eigenschaften der Dynamen, welche mit ihren Coordinaten eine oder mehrere homogene Gleichungen des ersten Grades verificiren. Der Herr V. betrachtet eine bilineare Form zwischen den Coordinaten zweier Dynamen, welche die Summe aller der Tetraeder repräsentirt, welche gebildet werden können, indem man zu zwei ihrer entgegengesetzten Kanten die Geraden nimmt, welche zwei irgend welche Kräfte repräsentiren, die resp. zu Systemen gehören, äquivalent der ersten und der zweiten Dyname. Wenn dann ein solcher Ausdruck 0 ist, werden die beiden Dynamen untereinander harmonisch genannt. Nun verificiren alle Dynamen mit ihren Coordinaten n gegebene homogene Gleichungen ersten Grades ($n < 6$) und sind harmonisch in Beziehung auf ebensoviele der angeführten Dynamen. Die Coordinaten der diesen Bedingungen unterworfenen Dynamen werden linear durch die

Coordinaten von $6-n$ gegebenen Dynamen ausgedrückt; nach Variation mit einem Multiplicator in dieser linearen Relation werden alle Dynamen, die erhalten werden, in $(6-n)$facher Involution genannt. Damit solche Involutionen Dynamen einer andern von $n$facher Vielfachheit entsprechen, müssen die beiden associirten Involutionen so beschaffen sein, dass, während die Dynamen der ersten Involution in Beziehung auf alle Dynamen der zweiten harmonisch sind, umgekehrt die Dynamen der zweiten harmonisch in Beziehung auf die der ersten sind. Bei der Untersuchung der einzelnen verschiedenen Fälle von Involutionen werden in der Abhandlung discutirt die Eigenschaften in Beziehung auf die Complexe der Axen der Null-Momente, bezüglich der verschiedenen Dynamen der Involution, wie auch die speciellen Eigenschaften der Dynamen, welche eine Resultante zulassen. Schliesslich werden die Bedingungen dafür untersucht, dass in einer Involution die Dynamen im Gleichgewicht sind. Bi. (O.)

G. Battaglini. Nota sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido. Rend. di Napoli 1870.

Man stelle sich ein starres System vor, bezogen auf ein Fundamental-Tetraeder. Es wird bewiesen, dass unendlich kleine Rotationen, die dem System gleichzeitig nach den Axen auferlegt sind, sich immer auf unendlich kleine gleichzeitige Rotationen um die Kanten des Fundamental-Tetraeders reduciren lassen. Es werden ferner bewiesen die Sätze von Chasles über die Geraden, welche bei unendlich kleiner Bewegung des Systems normal zu den Trajectorien aller Punkte sind, oder welche nur die Trajectorien eines ihrer Punkte berühren, ferner die Sätze über conjugirte Rotationsaxen, und über die Axen der streifenden Rotation. Die Arbeit schliesst mit den Ausdrücken für die unendlich kleinen Variationen der quadriplanaren Coordinaten eines Punktes, die aus irgend einer dem System auferlegten, unendlich kleinen Bewegung entstehen. Bi. (O.)

G. Battaglini. Nota sul movimento geometrico finito di un sistema rigido. Rend. di Napoli 1870.

Ein starres System wird in zwei verschiedenen Lagen auf ein Fundamental-Tetraeder bezogen und die Coordinaten der

Axe der streifenden Rotation, die Rotation und Translation in Bezug auf diese Axe bestimmt, nebst der Eigenschaft der der Rotationsaxe conjugirten Axe. — Zum Schluss wird die Formel gegeben, welche die endliche Variation der quadriplanaren Coordinaten eines Punktes bei Verschiebung des Systems aus einer Lage in eine andere ausdrückt. Bi. (O.)

C. Neumann. Geometrische Untersuchung über die Bewegung eines starren Körpers. Clebsch Ann. I. 195-207. 1869.

Ein starrer Körper kann bekanntlich aus einer beliebig gegegebenen Position in eine beliebig gegebene andere Position jederzeit übergeführt werden vermittelst einer Schraubenbewegung. In Bezug hierauf wird vom Verf. folgender Satz aufgestellt:

Sind a_1, a_2, a_3 die Lagen, welche drei mit dem Körper fest verbundene Punkte bei der ersten, ferner b_1, b_2, b_3 diejenigen Lagen, welche dieselben bei der zweiten Position inne haben, und zieht man von einem willkürlich gewählten Punkt α aus drei Linien $\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, $\alpha\beta_3$ respective parallel und gleich lang mit a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, so wird die Axe jener Schraubenbewegung immer senkrecht stehen gegen die durch die Punkte β_1, β_2, β_3 bestimmte Ebene. Nn.

C. Neumann. Untersuchungen über die Bewegung eines Systems starrer Körper. Leipz. Ber. XXI. 132-138. 1869. Clebsch Ann. III. 350-354. 1870.

Es sei gegeben ein Pendel, welches unter dem Einfluss der Schwerkraft hin- und herschwingt um seine in festen Lagern ruhende horizontale Axe. Jedoch sei der pendelnde Körper zusammengesetzt aus zwei Körpern A und B, die relativ gegen einander beweglich sind.

A ist von schalenförmiger Gestalt, beweglich um die gegebene Pendelaxe. B hingegen repräsentirt einen homogenen Revolutionskörper, etwa ein Schwungrad, welches im Innern von A frei beweglich ist um seine mit A fest verbundene Axe. Ferner sei $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment beider Körper A, B zusammengenommen in Bezug auf die gegebene Pendelaxe, ferner $\mathfrak{m}$ das Trägheitsmoment des Schwungrades B in Bezug auf seine geo-

metrische Axe, endlich k der Winkel dieser beiden Axen gegeneinander.

Denkt man sich nun zwei Apparate der genannten Art, beide von genau derselben Beschaffenheit, nur mit dem Unterschiede, dass bei dem ersten das Schwungrad B arretirt, bei dem zweiten hingegen (durch irgend welchen anfänglichen Stoss) in Rotation versetzt ist, so wird zufolge der (allerdings nicht näher mitgetheilten) Rechnung des Verf. das Gesetz der Pendelschwingungen bei beiden Apparaten genau denselben Charakter besitzen, und nur einen Unterschied zeigen hinsichtlich der in ihm enthaltenen Constanten. Es verwandelt sich nämlich die dem ersten Apparat entsprechende Formel in diejenige, welche dem zweiten Apparat entspricht, solbald man

$$\mathfrak{M} \text{ mit } \mathfrak{M} - \mathfrak{m}\cos^2 k$$

vertauscht. Die Grösse der dem Schwungrade des zweiten Apparates mitgetheilten Rotationsgeschwindigkeit ist also ohne allen Einfluss.

Aehnliche Ergebnisse werden mitgetheilt für einen (nicht bifilar, sondern) multifilar aufgehängten Körper, sobald im Innern desselben sich wiederum irgend ein Schwungrad befindet.

Nn.

A. MANNHEIM. Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. J. de l'Ec. Pol. Cah. 43. 57-122. 1870.

Ueber die Verrückung eines frei beweglichen Körpers von unveränderlicher Gestalt hat Chasles in zwei Schriften (compt. rend. 1843 und compt. rend. 1861) sehr eingehende Untersuchungen angestellt und wichtige Theoreme entwickelt. In der vorliegenden Arbeit ist die Bewegung des festen Körpers nicht mehr eine freie, sondern sehr verschiedenen Bedingungen unterworfen; der Verf. bestimmt die geometrischen Elemente, welche eine klare Einsicht in den Bewegungsvorgang zu geben im Stande sind.

Nach einer durchsichtigen Entwickelung der Gesetze, welche bei unendlich kleiner Verrückung eines frei sich bewegenden Körpers statt haben, und nach ausführlicher Untersuchung über die conjugirten Geraden, welche, wie Chasles gezeigt hat, eine

bedeutsame Rolle in der Bewegungstheorie fester Körper spielen, zeigt der Verf., dass fünf Bedingungen nöthig sind, um die Verrückung eines Körpers zu bestimmen und führt jede der folgenden Bedingungen:

1. Eine Fläche der beweglichen Figur soll stets durch einen festen Punkt gehen,
2. Eine Curve der beweglichen Figur soll eine feste Fläche berühren oder die inverse Bedingung, eine Fläche der beweglichen Figur soll eine feste Curve berühren,
3. Eine Curve des bewegten Körpers soll durch eine feste Curve gehen,
4. Eine Fläche der beweglichen Figur soll eine feste Fläche berühren,

auf die eine zurück: Ein Punkt des beweglichen Körpers ist gezwungen auf einer festen Fläche zu gleiten. Indem Herr Mannheim also den Bewegungsvorgang eines Körpers studirt, der mit fünf Punkten auf fünf festen Flächen gleitet, umfasst seine Untersuchung Bewegungen, die an sehr mannigfache Bedingungen geknüpft sein können. Die Probleme, die sich bieten, sind folgende:

Wenn ein Körper von unveränderlicher Gestalt mit fünf Punkten auf fünf festen Flächen gleitet, so ist für irgend einen Bewegungsmoment zu construiren die Normalebene für die Trajectorie irgend eines Punktes; die Normale in irgend einem Punkte der Oberfläche, welche eine Curve des bewegten Körpers beschreibt; die Linie, längs welcher eine mit dem Körper in Verbindung gedachte Fläche ihre Enveloppe berührt, schliesslich sind anzugeben die Elemente, welche die schraubenförmige Bewegung des beweglichen Körpers (jeder Körper ist bekanntlich in die Nachbarlage durch schraubenförmige Bewegung überzuführen) in's Licht setzen.

Wenn ein fester Körper mit vier Punkten auf vier festen Flächen gleitet, so sind zu bestimmen die Normale der Fläche, welche irgend ein Punkt des Körpers beschreibt, die Punkte, in welchen irgend eine mit dem beweglichen Körper fest verbundene Fläche den Ort ihrer successiven Durchschnitte berührt.

Von den zahlreichen interessanten Theoremen, auf welche

der Verf. bei Lösung der gestellten Fragen geführt wird, mögen einige hervorgehoben werden:

Wenn die Bewegung eines festen Körpers vier von den oben angegebenen Bedingungen unterworfen ist, so kann man in irgend einem Moment die Punkte des Körpers auf unendlich viele Arten verrücken; die Trajectorien dieser Punkte gehören Oberflächen an, mit Ausnahme der Punkte von zwei besonderen Geraden, welche bei jeder möglichen Verrückung dieselben Linienelemente beschreiben.

Wenn ein fester Körper bei seiner Verrückung drei verschiedenen Bedingungen unterworfen ist, so kann man in irgend einem Moment irgend einem Punkte desselben eine willkürliche Bewegungsrichtung geben, ausgenommen sind aber alle Punkte auf einem gewissen Hyperboloide, deren Trajectorien auf Oberflächen liegen.

Mannigfache Anwendungen der allgemeinen Theoreme auf besondere Fälle, welche im zweiten Theil der umfangreichen Arbeit gegeben werden, schliessen das an interessanten Resultaten höchst reichhaltige Memoir. Schn.

A. Mannheim. Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique. C. R. LXX. 1025. 1870.

Wenn eine ebene Curve C durch eine unendlich kleine Drehung um einen Punkt ihrer Ebene in eine Nachbarlage versetzt wird, so sind die m^2 Schnittpunkte beider Curven die Fusspunkte der Normalen, welche sich von jenem Punkte an die Curve C ziehen lassen. Dieses Verfahren giebt zuerst Steiner an (Crelle's J. XLIX.), um die Zahl der Normalen, welche sich von einem Punkt aus an die Curve legen lassen, zu bestimmen, und Herr August verallgemeinert dasselbe, (Borchardt J. LXVIII.), um die Zahl der Normalen zu finden, welche sich von einem Punkt an eine Fläche ziehen lassen; er betrachtet zu diesem Zweck zwei unendlich kleine Verrückungen der Fläche, hervorgebracht durch Drehung um zwei Axen, welche von dem fraglichen Punkt auslaufen. Von etwas allgemeineren Gesichtspunkten geht Herr Mannheim in vorliegender Arbeit aus, um zur Lösung

derselben Frage zu gelangen, und einige andere Theoreme zu beweisen.

Wenn eine Fläche F vom Grade m durch zwei unendlich kleine Drehungen um zwei beliebige Axen im Raume in zwei Nachbarlagen versetzt wird, so schneiden die Normalen, welche sich auf F in den m^3 Schnittpunkten jener drei Flächen errichten lassen, die beiden Drehaxen, oder mit anderen Worten, es giebt m^3 Normalen der Fläche, welche zwei gegebene Gerade schneiden, oder endlich die Normalen, welche sich durch eine Gerade an die Fläche legen lassen, bilden eine Fläche vom Grade m^3

Um den Grad der Fläche zu bestimmen, welche die Normalen einer Fläche F bilden, die längs einer auf der Fläche verzeichneten algebraischen Curve errichtet sind, denke man F durch eine unendlich kleine Drehung um eine beliebige Axe in eine Nachbarlage versetzt. Hat eine Fläche vom Grade p jene Curve auf F ausgeschnitten, so schneidet die Fläche in der Nachbarlage jene Raumcurve in m^2p Punkten, die Normalen an F in diesen Punkten gehen durch die Drehaxe, die fragliche Normalenfläche hat also den Grad m^2p. Wenn $p = 1$ ist, so ist der Grad der Fläche m^2, und da die Ebene $(p = 1)$ dieselbe in der Leitcurve schneidet, so zerlegt sich der Durchschnitt mit dieser Ebene in die Leitcurve und in $m^2 - m$ Gerade. Wenn man daher eine Fläche vom Grade m durch eine Ebene schneidet, so enthält diese $m(m-1)$ Normalen in sich. Um nunmehr die Zahl der Normalen von F zu bestimmen, welche durch einen Punkt gehen, denke man durch denselben zwei Gerade. Normalen, welche beide Gerade schneiden, giebt es m^3, davon liegen $m(m-1)$ in der durch die Geraden bestimmten Ebene, die übrigen gehen also durch jenen Punkt; ihre Anzahl ist demnach

$$m^3 - m(m-1).$$

Da die Normalen einer Fläche F, welche eine Gerade durchschneiden, eine Fläche vom Grade m^3 bilden, so wird dieselbe durch eine Raumcurve vom Grade $q.r$ — es bedeuten q und r den Grad der Flächen, welche die Raumcurve erzeugen — in $m^3.q.r$ Punkten geschnitten, daher bilden die Normalen, welche jene Curve zur Leitcurve haben, eine Fläche vom Grade $m^3.q.r$. Wird diese Fläche durch eine Raumcurve vom Grade $s.t$ ge-

schnitten, wo s und t wieder den Grad der die Raumcurve erzeugenden Flächen bedeuten, so ist die Zahl der Durchschnitte $m^2.q.r.s.t.$ Daher der Satz:

„Die Normalen einer Fläche vom Grade m, welche zwei Curven C und D durchschneiden, von denen die erste durch zwei Flächen vom Grade q und r, die zweite durch zwei Flächen vom Grade s und t erzeugt wird, sind der Anzahl nach

$m^2.p.q.s.t.$“ Schn.

A. Mannheim. Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. C. R. LXX. 1074. 1870.

Von dem angekündigten Mémoire befindet sich C. R. LXX. 1074. ein Auszug, in welchem der Verf. die rein geometrische Methode, welche er bei dem Studium der Strahlenbündel verfolgt, in ihren wesentlichen Punkten kennzeichnet. Auf die Betrachtungen näher einzugehen, wird die Veröffentlichung des Mémoire's selbst später Gelegenheit bieten. Schn.

A. Mannheim. Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite, que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions. C. R. LXX. 1215-1218. 1870.

Wenn eine Gerade mit vier Punkten auf vier festen Flächen gleitet, so beschreibt jeder Punkt derselben eine Trajectorie; die Schwingungsebene und der Krümmungsradius irgend eines Punktes derselben werden bestimmt. Schn.

A. Mannheim. Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions. C. R. LXX. 1259-1263. 1870.

Herr Mannheim beschäftigt sich mit der Frage: Wenn vier Ebenen, welche parallel einer Geraden sind, eine geometrische Gestalt von unveränderlicher Form bilden, welches ist der Zusammenhang zwischen den Krümmungsaxen der abwickelbaren

Flächen, welche diese Ebenen während einer Verrückung des Systems umhüllen? Er gelangt dabei zur Lösung folgenden Problems: Wenn vier Ebenen, welche, parallel einer Geraden, ein System von unveränderlicher Form bilden, sich so verrücken, dass sie bezüglich vier gegebene Flächen berühren, so ist für irgend einen Moment die Krümmungsaxe der abwickelbaren Fläche zu construiren, welche eine mit jenem System fest verbundene der Geraden parallele Ebene umschreibt.

Schn.

Ch. Brisse. Mémoire sur le déplacement des figures. Liouville J. (2) XV. 281-313. 1870.

Die Arbeit enthält eine Entwickelung der interessanten Theoreme, welche Chasles über unendlich kleine Verrückungen von Figuren von unveränderlicher Gestalt (Bulletin de Férussac t. XIV, 1831 und Compt. rend. t. XVI, 1843) zuerst aufgestellt hat.

Schn.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 12. Messenger V. 58-59. 1869.

Wenn jedem Punkte des Raumes eine Ebene entspricht, d. h. eine Ebene, die durch den Punkt unter rechten Winkeln gegen die Bewegungsrichtungen gezogen ist, indem man die Punkte als einem festen Körper angehörig betrachtet, der in irgend einer Weise unendlich wenig verrückt ist, so wird die Ebene bestimmt, welche einem gegebenen Punkte entspricht, und das Resultat mit der Theorie der Dualität in Verbindung gebracht.

Glr. (O.)

H. Mylord. Lösning af opgave 149. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 39. 1870.

Mittelst der gewöhnlichen Methoden werden folgende Sätze bewiesen: Wenn eine Sehne auf einer Curve so gleitet, dass das entsprechende Segment einen constanten Inhalt hat, so ist der Krümmungsradius derjenigen Curve, die der Schwerpunkt des Segments durchläuft, dem Kubus der Sehnenlänge proportional. —

Die Tangente in irgend einem Punkte der Curve, die der Schwerpunkt beschreibt, ist immer parallel der entsprechenden Richtung der Sehne. — Hn. (Wn.)

H. Resal. Étude géométrique sur le mouvement d'une sphère glissant ou roulant sur un plan horizontal. C. R. LXVIII. 1158-1159. 1869.

Es werden einige Sätze ohne Beweis mitgetheilt, die der Verfasser auf geometrischem Wege gefunden hat, während sie bis dahin nur analytisch von Coriolis bewiesen waren.

O.

Marx. Beitrag zur Kenntniss der Kettenlinie. Pr. Clausthal 1869.

Die Schrift entwickelt mit äusserster Ausführlichkeit die Gleichgewichtsbedingungen am Seilpolygon und bekannte Eigenschaften der Kettenlinie und ihrer Evolvente. H.

L. Saalschütz. Zur Theorie der Evolventenverzahnung. Königsberg 1870.

Die Arbeit, mehr für den Techniker, wie für den Mathematiker bestimmt, giebt, nach einer Auseinandersetzung der geometrischen Principien der Evolventenverzahnung, eine Entwickelung der allgemeinen Formeln für die einzelnen Theile von Zahnrädern mit Kreisevolventen und entwickelt dann theoretisch die Grundsätze, nach denen bei der Construction solcher Zahnräder zu verfahren sei. O.

Preusse. Eine Gerade, auf welcher ein schwerer materieller Punkt gleiten kann. Pr. Aschersleben 1870.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

K. von Ott. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Pr. Prag. 1870.

Nach einer einleitenden Darlegung der Elemente des graphischen Rechnens wendet sich die vorliegende Schrift zur Darstellung der Elemente der graphischen Statik und giebt dieselbe in anschaulicher Weise, welche sie als Vorbereitung für das Studium grösserer Werke empfehlenswerth macht. Neues will die Schrift nicht geben. Sie ist vorzugsweise für die Schüler des Verfassers bestimmt, geht aber in der Benutzung des anderweit gegebenen Materials bis in die neueste Zeit hinein.

O.

G. Battaglini. Nota sulla composizione delle forze. Rend. di Napoli. 1869.

Gegenstand der Note ist die Untersuchung der Formeln zur Zusammensetzung von Kräften, indem die Geraden, nach denen sie wirken, in Beziehung auf ein fundamentales Tetraeder mittelst Plücker'scher Coordinaten bestimmt werden. — Die Resultante von drei Kräften, die in einem Punkte zusammentreffen und nicht in einer Ebene liegen, oder auch von drei Kräften, die in einer Ebene liegen und nicht in einem Punkte zusammentreffen, wird durch Construction eines geometrischen Netzes von geraden Linien bestimmt. — Ein beliebiges System von Kräften wird auf Kräfte zurückgeführt, die nach den Kanten des fundamentalen Tetraeders wirken.

Bi. (O.)

W. H. Preece. The parallelogram of forces. Phil. Mag. (4) XXXVIII. 428-430. 1869.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte wird bewiesen, indem einige der Fundamentaleigenschaften der Kräftepaare als Axiome hingestellt werden.

He.

K. Culmann. Ueber das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kräfte. Wolf J. XV. 1-24. 1870.

Um zu zeigen, dass die analytische Statik der reinen analytischen Geometrie ebenso entspricht, wie die graphische Statik der Geometrie der Lage, und dass daher auch die analytische Statik als Theil der Geometrie zu betrachten ist, wie es von der graphischen Statik bereits angenommen ist, giebt der Verfasser einen analytischen und einen geometrischen Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. Im Weiteren werden die Summenformeln für die Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbündel und in der Ebene behandelt. Den Schluss bilden Anwendungen.

'O.

C. Neumann. Ueber den Satz von der virtuellen Verrückung. Leipz. Ber. XXI. 257-281. 1869.

Es handelt sich um die Frage, ob der genannte Satz, in seiner Anwendung auf gegebene Bedingungsgleichungen aufzufassen ist als eine Consequenz derjenigen fundamentalen Principien, welche gelten für die Wirkung und Zusammensetzung gegebener Kräfte, — oder aber aufzufassen ist als ein völlig neues Princip.

Der Verf. weist nach, dass die erstere Auffassungsweise im Allgemeinen völlig unhaltbar ist, dass sie indessen eine gewisse Berechtigung gewinnt, sobald es gestattet ist, die gegebenen Bedingungsgleichungen anzusehen als ein Symbol für gewisse nicht näher bekannte Kräfte, von denen vorausgesetzt werden darf, dass sie ein Potential besitzen. Nn.

J. Petersen. De virtuelle Hastigheders Princip anvendt paa et System, hvor der ir Gnidning. Tychsen Tidsskr. (2) V. 113, 157. 1869.

Im ersten Theil der Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit einem System von Punkten, die alle in derselben Ebene liegen, auf die irgend welche Kräfte wirken, und die sich nur auf gegebenen Curven bewegen können, von denen einige eine Reibung ausüben. Er sucht die Gleichgewichtsbedingungen mit Hülfe des

Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. Man erhält die Lösung des Problems mit Hülfe des folgenden Satzes: Man kann das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf ein System mit Reibung ebenso anwenden wie auf ein System ohne Reibung; nur muss man im Falle der Reibung den virtuellen Verrückungen der Punkte eine Richtung geben, die mit der Tangente der Curve einen gewissen Winkel einschliesst; die Tangente dieses Winkels ist gleich dem Reibungscoefficienten. — Bei der Anwendung des Theorems muss man aber auf den Umstand Rücksicht nehmen, dass die Punkte in Folge dieser virtuellen Verrückungen sich nicht mehr auf den vorgeschriebenen Curven bewegen. — Im zweiten Theil wird die Bedingung dahin geändert, dass sich die Punkte auf gegebenen Oberflächen bewegen, die eine Reibung ausüben. Hn. (Wn.)

W. Firth. A demonstration of the principle of virtual velocity. Messenger V. 171-175.

Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für einen Punkt und einen starren Körper. Glr. (O.).

J. Somof. Note relative à une démonstration donnée par Cauchy des équations générales de l'équilibre. Bull. de St. Pétersbourg XIV. 381-392. 1870.

Der Satz, den Cauchy im Jahre 1827 über das Gleichgewicht ohne Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bewiesen hatte (Exerc. math. II. p. 1 u. f., reproducirt von Moigno, Leçons de mécanique analytique T. I. p. 271 u. f. 1868) lautet: „Damit zwischen den Kräften, die ein System materieller Punkte angreifen, und den Widerständen, die aus den Verbindungen hervorgehen, denen die Punkte unterworfen sind, in dem Fall, wo in Folge der Verbindungen nur eine Function der Coordinaten für alle virtuellen Verrückungen null sein muss, Gleichgewicht stattfinde, ist nöthig: 1) dass die Projectionen der Kräfte auf die rechtwinkligen Coordinatenaxen proportional seien den partiellen Derivirten dieser Function nach den respectiven Coordinaten, 2) dass das Verhältniss jeder Projection zu der respectiven Derivirten für alle Kräfte dasselbe sei.“ Den Beweis

des zweiten dieser Sätze reproducirt der Verf. in der vorliegenden Arbeit nach Cauchy und zeigt, dass derselbe ungenügend sei, da die Gleichung, aus welcher Cauchy die Gleichheit der Verhältnisse folgert, für manche Fälle (er führt deren 2 aus) illusorisch sei, indem sie auf eine Identität von der Form

$$\lambda.0 = \lambda'.0$$

führt.

Nach kurzer Charakteristik der Beweise von Lagrange (Théorie analytique des fonctions, Cap. V.) und Poinsot fügt H. Somof einen neuen Beweis hinzu, indem er statt des Hebels mit gleichen Armen von Cauchy ein aus zwei starren Linien gebildetes Gelenk substituirt. O.

E. J. Routh. Equilibrium of one heavy rough body on another. Quart. J. XI. 102-109. 1870.

Es werden die Bedingungen aufgestellt, damit ein rauher, schwerer Körper, der auf einem anderen ruht, sich in stabilem oder unstabilem Gleichgewicht befindet. Die Resultate sind theilweise bereits in des Verfassers Rigid Dynamics enthalten.

O.

F. Piani. Sul centro di gravità. Disquisizione storico-crtiche. Mem. di Bologna. X. 1870.

Die Arbeit enthält die Rectification einiger Punkte der Geschichte der Mathematik bezüglich der Theorie des Schwerpunkts, woraus sich die Priorität der wirklichen Urheber gewisser Theoreme ergiebt, die jetzt auch eine gewisse geometrische Wichtigkeit haben, obwohl sie zu den Elementen gehören. Der Herr Verfasser behandelt speciell einige Anwendungen, welche von verschiedenen italienischen Geometern mit der Theorie der Barycentren auf Probleme der geometrischen Optik gemacht sind, und zeigt wie die Lösungen nicht immer exact sind, da sie auf Hypothesen beruhen, die der physikalischen Wirklichkeit nicht allgemein entsprechen. Jg. (O.)

J. N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Recherches sur les centres de gravité. J. de l'Ec. Pol. Cah. XLIII. 123-155. 1870.

Im ersten Theil werden zur Bestimmung des Schwerpunkts von Curven und Flächen der Bogen und der Contingenzwinkel als Variable benutzt. Ist $s = f(\omega)$ die Gleichung der Curve in diesen Coordinaten, so ergiebt sich für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes (xy) derselben:

$$x = \int_0^\omega f'(\varphi).\cos\varphi\, d\varphi, \qquad y = \int_0^\omega f'(\varphi).\sin\varphi\, d\varphi.$$

Zunächst wird die Aufgabe für homogene Bogen gelöst. Man erhält alsdann für die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$X = x - \frac{1}{f(\omega)}\int_0^\omega f(\varphi) f'(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$Y = y - \frac{1}{f(\omega)}\int_0^\omega f(\varphi) f'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Um die Einfachheit zu zeigen, welche durch die Einführung dieser Variabeln für die Lösung der Aufgabe erreicht wird, ist sie an der Epicycloide durchgeführt. Die Gleichung derselben lautet in diesen Coordinaten:

$$s = 4r(r+1)\sin\frac{\omega}{r+1},$$

wo r das Verhältniss der Radien des festen und des erzeugenden Kreises bezeichnet. Die Aufgabe reducirt sich dann auf die Auswerthung von Integralen der Form:

$$\int_0^\omega \sin m\varphi.\cos\varphi\, d\varphi, \quad \int_0^\omega \sin m\varphi.\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^\omega \cos m\varphi.\cos\varphi\, d\varphi, \quad \int_0^\omega \cos m\varphi.\sin\varphi\, d\varphi.$$

Aus der Anwendung auf specielle Fälle in Beziehung auf r werden eine Anzahl von Sätzen gefolgert, z. B.: „Wenn der Durchmesser des beweglichen Kreises gleich einem ungraden Vielfachen des Radius des festen Kreises ist, so liegt der Schwerpunkt eines Zweiges der Epicycloide im Mittelpunkt des festen Kreises (ausgenommen ist der Fall der äussern Epicycloide mit zwei Zweigen)."

Auch wenn sich die Dichtigkeit einer Curve mit ihrer Krümmung ändert, lassen sich diese Variabeln mit Erfolg benutzen. Die Coordinaten des Schwerpunktes werden alsdann

$$X = x - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f'(\varphi)\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$Y = y - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f'(\varphi)\,\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Auch hier wird die Methode an der Epicycloide durchgeführt. Die Aufgabe führt hier zu Integralen von der Form:

$$\int_0^\omega \varphi\cos m\varphi\cos\varphi\,d\varphi, \qquad \int_0^\omega \varphi\cos m\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Die Endresultate sind noch einfacher als bei homogenen Bogen.

Bei Rotationsflächen wird der Abstand des Schwerpunktes von einer Basis der Zone bestimmt. Mit Hülfe des Guldin'schen Satzes erhält man:

$$H = \frac{as\,Y + \int_\alpha^\omega xy\,ds}{s(a+X)},$$

wo a den Radius der Basis, X, Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Meridians, α den Winkel desselben mit der Axe bezeichnet. Der Ausdruck $\int_\alpha^\omega xy\,ds$ wird zur Auswerthung in

$$\int_\alpha^\omega f(\varphi)f'(\varphi)\,d\varphi\int_\alpha^\varphi f'(\psi)\sin(\varphi+\psi)\,d\psi$$

transformirt und in dieser Form auf den Torus angewandt.

Der zweite Theil der Arbeit beschäftigt sich mit der umgekehrten Aufgabe. Es werden Curven bestimmt, deren Schwerpunkt gegebenen Bedingungen unterworfen ist, eine Aufgabe, die auf die Bestimmung einer Function unter dem Integralzeichen für gegebene Bedingungen hinaus läuft. Bei homogenen Bogen werden der Bogen und die Ordinaten als Variable benutzt. Die Gleichung, welche zur Bestimmung der unbekannten Function dient, ist dann:

$$sY = \int_0^s y\,ds.$$

Ist Y als Function von s gegeben, so folgt hieraus unmittelbar:

$$y = Y + s\frac{dY}{ds}.$$

Speciell wird der Fall

$$Y = A.s^p$$

behandelt. Die Curve wird dann:

$$y = (p+1)A.s^p.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine ganze Anzahl von Curven, denen wegen ihrer Bedeutung für die folgenden Untersuchungen der Name „courbes barocentriques" beigelegt wird. Ist Y eine Function von y, z. B. $= B.y$, so findet sich eine barocentrische Curve von der Ordnung $\frac{B}{1-B}$. Die Transformation in rechtwinklige Coordinaten wird besprochen.

Aendert sich die Dichtigkeit Δ des Bogens nach einem gegebenen Gesetz, so hat man als Gleichung

$$(8.)\quad Y\int_{s_0}^{s} \Delta ds = \int_{s_0}^{s} y\Delta ds.$$

Je nachdem Y und Δ Functionen von s oder von y sind, werden die Gleichungen der Curven

$$y = Y + \frac{\frac{dY}{ds}}{\Delta}\int_{s_0}^{s} \Delta ds$$

oder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades, welche durch Quadratur auf die Form:

$$(9.)\quad \frac{ds}{dy} = \frac{C\frac{dY}{dy}}{\Delta(y-Y)^2}\cdot e^{\int\frac{dy}{y-Y}}$$

zurückgeführt wird. Speciell werden die Fälle behandelt, wo Y das arithmetische oder geometrische Mittel der Endordinaten und Δ einer Potenz der Ordinate proportional ist. In beiden Fällen finden sich barocentrische Curven.

Dieselbe Formel (9.) erlaubt unmittelbar den Uebergang zu ebenen Flächen. Ersetzt man in Gleichung (8.) Δds durch xdy, so erhält man:

$$Y\int_{y_0}^{y} x dy = \int_{y_0}^{y} xy dy.$$

Es ergiebt sich daraus für die Gleichung der Curve:

$$x = \frac{C\frac{dY}{dy}}{(y-Y)^2} \cdot e^{\int \frac{dy}{y-Y}}.$$

Speciell wird der Fall $Y = A.y^p$ behandelt. Bei Rotationsflächen wird die Aufgabe auf die bereits gelöste zurückgeführt, wenn die Dichtigkeit des Bogens proportional der Ordinate ist. Den Schluss der Arbeit bildet die Bestimmung einer Oberfläche, die so beschaffen ist, dass die horizontalen Coordinaten vom Schwerpunkt des Volumens, welches von einer horizontalen und zwei Paaren paralleler vertikaler Ebenen eingeschlossen ist, gleich gegebenen Functionen der Coordinaten der variabelen Wand des Prismas sind. O.

A. Grunert. Ueber den Schwerpunkt des Trapeziums, insbesondere über die graphische Bestimmung desselben. Grunert Arch. L. 212-219. 1869.

Die Arbeit enthält einen analytischen Beweis der von Culmann in seinem Werke: „Die graphische Statik", Zürich 1866 p. 151 gegebenen graphischen Bestimmung für den Schwerpunkt eines Trapezes: „Trägt man von den diagonalen Eckpunkten B und D oder A und C aus die gegenüberliegenden Parallelseiten CD und AB in den Verlängerungen der Parallelseiten in BB' und DD' oder in AA' und CC' auf, so schneidet die Gerade $B'D'$ oder $A'C'$ den Schwerpunkt S auf der Linie MN ab, welche die Mittelpunkte M und N der parallelen Seiten mit einander verbindet". Der Beweis selbst bietet kein Interesse dar. Das Trapez wird zwei Mal in Dreiecke zerlegt, und aus den Gleichungen der Verbindungslinien ihrer Schwerpunkte die Coordinaten für den Schwerpunkt des Trapezes abgeleitet. Einen weit einfacheren Beweis hat 1866 Herr Walker im Quart. J. veröffentlicht (siehe Fortschr. d. M. I. p. 311). Da diese Construction viel Raum erfordert, so wird im zweiten Theile der Arbeit ein analytischer Beweis für eine andere Construction gegeben, die nicht an diesem Mangel leidet und in folgendem besteht: „In dem Trapez $ABCD$ mache man $AG = BH = CD$, schneide von A und B aus die Strecken AA'', BB'' (resp. gleich $\frac{1}{3}AH$, $\frac{1}{3}BG$)

ab und mache CC'' (auf der Verlängerung von CD) $= AA''$, $DD'' = BB''$. Der Schnittpunkt der Geraden $A''C''$ und $B''D''$ ist dann der verlangte Schwerpunkt.“ O.

H. Emsmann. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks, und sich aus denselben ergebende Constructionen dieses Punktes im Vergleich mit dem Schwerpunkt des Trapezes. Grunert Arch. LI. 241-246. 1870.

Im Anschluss an die obige Arbeit des Herrn Grunert werden auf dieselbe Weise, wie dort die Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunktes bei einem beliebigen Viereck gegeben. Aus verschiedenen Formen für dieselben werden dann Constructionen hergeleitet, die jede auch speciell auf das Trapez angewandt werden. O.

C. A. Bretschneider. Bemerkungen über einen im Archiv besprochenen Lehrsatz. Grunert Arch. L. 103-106. 1869.

Der Herr Verfasser weist nach, dass der im vorigen Jahrgange erwähnte Lehrsatz der Herren Fassbender und Hackel (s. Fortschr. d. M. I. 264) nur ein specieller Fall des folgenden allgemeineren Lehrsatzes sei:

„Die Winkel, welche drei aus den Spitzen eines Dreiecks nach den Gegenseiten gezogene Transversalen mit letzteren, nach einerlei Richtung hin genommen, bilden, haben stets die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Cotangenten gleich Null ist, wenn die in den Scheiteln dieser Winkel auf die Seiten errichteten Lothe sich in einem Punkte schneiden“. Der Beweis ist trigonometrisch. O.

Fassbender. Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives. Grunert Arch. LI. 46-48. 1870.

2 andere Beweise des schon im 1. Bande des Jahrbuches p. 264 erwähnten Satzes.

O.

R. Most. Ueber den Schwerpunkt der Umgrenzung bei den einfachsten Figuren und Körpern. Grunert Arch. LI. 15-19. 1870.

Der bekannte Lehrsatz über den Schwerpunkt des Dreiecks wird zur Construction der Schwerpunkte des Vierecks, Tetraeders und der vierseitigen Pyramide benutzt. O.

P. A. Hansen. Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen sphärischen Dreiecks. Leipz. Ber. XXII. 71-94. 1870.

Man nehme auf der Kugeloberfläche, deren Radius $=1$ gesetzt werden möge, einen beliebigen Punkt A als Anfangspunkt der Coordinaten an, betrachte die in ihm an die Kugel gelegte Tangentialebene als Ebene der xy und zähle die z-Coordinaten in der Richtung nach dem Inneren der Kugel zu positiv. Der Winkel, den die Ebene irgend eines vom Punkte A aus gezogenen grössten Kreises σ mit der Ebene der xz einschliesst, sei φ.

Das allgemeine schiefwinklige sphärische Dreieck, dessen Schwerpunkts-Coordinaten hier in ihrer einfachsten Gestalt

$$\begin{aligned} x'\omega &= \tfrac{1}{2}b\sin\varphi' + \tfrac{1}{2}c\sin\varphi - \tfrac{1}{2}a\cos k, \\ y'\omega &= \tfrac{1}{2}b\cos\varphi' - \tfrac{1}{2}c\cos\varphi, \\ z'\omega &= \omega - \tfrac{1}{2}a\sin k, \\ \omega &= A+B+C-\pi \end{aligned}$$

gegeben werden, setzt sich folgendermaassen aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammen:

Zunächst denke man sich ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen einer Endpunkt A und dessen Hypotenuse σ ist, während mit h und k die Katheten dieses Dreiecks bezeichnet werden sollen, und zwar wird k, vom Punkte A ausgehend, in der Ebene der xz liegend angenommen.

Ferner ziehe man von A aus, ausserhalb des eben besprochenen Dreiecks, einen Bogen grössten Kreises bis an die, am Endpunkte der Kathete k verlängerte andere Kathete h, so wird dadurch ein zweites rechtwinkliges sphärisches Dreieck gebildet, dessen Hypotenuse der erklärte Bogen grössten Kreises, und dessen eine Kathete wieder k ist. Die zweite Kathete, die die Verlängerung von h bildet, soll h' genannt werden.

In den obigen Formeln war die gewöhnliche Bezeichnung der Winkel des sphärischen Dreiecks mit A, B, C und die der gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c beibehalten, sowie den im zweiten rechtwinkligen Dreiecke auftretenden Grössen φ', σ' dieselbe Bedeutung beigelegt wurde, wie φ und σ im ersten.

Es ist somit

$$A = \varphi + \varphi', \quad a = h + h', \quad c = \sigma, \quad b = \sigma'.$$

In den Artikeln (10)-(18) incl. wird sodann die Construction des Schwerpunktes gelehrt, und die Behandlung specieller Fälle vorgeführt.

Unter der Voraussetzung, dass die Dreiecksseiten kleine Grössen erster Ordnung seien, werden in (19) bis (23) (Schluss-Artikel) die strengen Ausdrücke in Reihen entwickelt, und diese Entwickelungen bis auf Grössen siebenter Ordnung fortgesetzt.

Der Herr Verfasser nimmt häufig Gelegenheit, z. B. bei der Construction des Schwerpunktes mit Hülfe der erhaltenen Reihen-Ausdrücke, auf seine Schrift, die als Supplement zu der „Geodätische Untersuchungen u. s. w." benannten Abhandlung erschien, zu verweisen.

Bemerkt sei noch, dass das Verfahren des Herrn Hansen eben so gut sich zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunktes eines sphärischen Vielecks eignet. Wtn.

Th. Reye. Trägheits- und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen. Borchardt J. LXXII. 293-326. 1870.

Der Verfasser hatte früher bewiesen, dass jeder Körper hinsichtlich seiner Trägheitsmomente auf unendlich viele Arten durch vier Massenpunkte ersetzt werden kann. Der erste dieser Punkte kann ganz beliebig angenommen werden. Dadurch ist seine Masse und die Ebene der drei anderen bestimmt. Nimmt man in dieser Ebene den zweiten Punkt willkürlich an, so erhält man seine Masse und die Verbindungslinie der beiden anderen, auf welcher dann noch der dritte Punkt willkürlich gewählt werden kann. Die vier Massenpunkte haben dieselbe Gesammtmasse und denselben Schwerpunkt, wie der gegebene Körper. Vier solche Massenpunkte bilden die Poltetraeder eines durch die

Massenvertheilung im Körper völlig bestimmten imaginären Ellipsoids, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Legt man durch irgend einen Punkt P drei zu jenem Ellipsoid confocale Flächen zweiter Ordnung, so fallen deren Normalen in P mit den drei Hauptträgheitsaxen dieses Punktes zusammen. Für alle Berührungsebenen dieses Ellipsoids sind, wie Herr Hesse gezeigt hat, die Trägheitsmomente des Körpers Null. Herr Reye verallgemeinert in der vorliegenden Arbeit diese Untersuchung, indem er die Frage stellt, ob auch in Bezug auf die n^{ten} Momente ein Massensystem durch eine beschränkte Anzahl von Massenpunkten ersetzt werden kann. Unter dem n^{ten} Momente eines Massensystems wird das über das ganze Massensystem sich erstreckende Integral $\int r^n dm$, wo r der Abstand des Elementes dm von einer gegebenen Ebene ist, verstanden. Bezeichnen α, β, γ die Cosinus der Neigungswinkel, welche das vom Coordinatenanfangspunkt auf die Ebene E gefällte Loth von der Länge p mit den Coordinatenaxen bildet, so nimmt dies die Form an:

$$\int r^n dm = \int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n dm.$$

Dies lässt sich durch Entwickelung der Potenz in eine Summe von

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

Gliedern zerlegen. Die Coefficienten der Potenzen von α, β, γ lassen sich eindeutig bestimmen, wenn für sie

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

lineare, unabhängige Gleichungen existiren. Es ergiebt sich daraus der Satz: „Das n^{te} Moment eines Massensystems kann für jede Ebene des Raumes berechnet werden, sobald es für

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

von einander unabhängige Ebenen bekannt ist.“ Da die Coordinaten aller Ebenen, für welche das n^{te} Moment einen gegebenen Werth M hat, der homogenen Gleichung

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n dm = M(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{n}{2}}$$

genügen müssen, so folgt, dass „alle Ebenen des Raumes, für welche das n^{te} Moment eines Massensystems einen gegebenen Werth M hat, im Allgemeinen eine Fläche n^{ter} oder $2n^{ter}$ Classe umhüllen, je nachdem n grade oder ungrade ist.“ Jede Ebene gehört ferner einer einzigen solchen Fläche constanten n^{ten} Momentes an; alle derartigen Flächen bilden eine Flächenschaar. Unter diesen Flächen constanten n^{ten} Momentes ist die von hervorragender Bedeutung, für deren sämmtliche Berührungsebenen das n^{te} Moment Null ist. Der Verfasser nennt sie die „n^{te} Nullfläche“ des Massensystems. Sie ist immer von der n^{ten} Classe. Der Verfasser wendet sich sodann zur Vergleichung der n^{ten} Momente mehrerer Massensysteme. Er nennt zwei Massensysteme „äquivalent“, hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente, wenn für jede Ebene des Raumes ihre n^{ten} Momente gleiche Werthe haben. „Indifferent“ heisst ein System hinsichtlich seiner n^{ten} Momente, wenn in Bezug auf jede Ebene des Raumes sein n^{tes} und folglich auch jedes niedrigere Moment Null ist. Zwei Massensysteme sind äquivalent, wenn sie sich um ein indifferentes System unterscheiden. Dadurch gelangt der Verfasser zu Sätzen, die zur Berechnung der n^{ten} und niedrigeren Momente eines Massensystemes mit Hülfe der n^{ten} Nullfläche benutzt werden. In § 4. wird der Begriff des Momentes erweitert, indem das über das Massensystem ausgedehnte Integral

$$\int r^{i} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}\, dm$$

als das n^{te} Moment in Bezug auf die Ebenengruppe

$$E, \quad E_1, \quad E_2, \quad \dots \quad E_k$$

definirt wird, wo

$$r, \quad r_1, \quad r_2, \quad \dots \quad r_k$$

die Abstände des Elements von den $k+1$ willkürlich gewählten Ebenen E sind, vorausgesetzt, dass

$$i, \quad i_1, \quad i_2, \quad \dots \quad i_k$$

positive ganze Zahlen sind, deren Summe gleich n ist. Das n^{te} Moment in Bezug auf eine Ebenengruppe geht in das n^{te} Moment hinsichtlich einer Ebene über, wenn man die Ebenen zusammenfallen lässt. Es ergiebt sich daraus unmittelbar folgender Satz: „Zwei Massensysteme, welche hinsichtlich ihrer n^{ten}

Momente äquivalent sind, haben auch in Bezug auf jede Ebenengruppe gleiche n^{te} und niedrigere Momente.“ Es würde zu weit führen die Untersuchungen weiter im Speciellen zu verfolgen. Im weiteren Verlaufe giebt der Verfasser die Anwendung der gewonnenen Resultate auf Trägheitsmomente (die 2ten Momente) und wendet sich dann speciell zu Massensystemen, deren n^{te} Nullfläche sich auf eine ebene Curve oder auf n Punkte einer Geraden reduciren. Nachdem dann bewiesen, dass ein Massensystem in Bezug auf seine dritten Momente auf unendlich viele Arten durch 10 Massenpunkte ersetzt werden kann, wird dieser Satz auf die n^{ten} Momente erweitert. Es lässt sich danach ein Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente stets durch

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}$$

Massenpunkte ersetzen, welche Zahl sich unter gewissen Umständen auf $\frac{n(n+1)}{1.2}$ und n reducirt. Algebraische Sätze und Sätze über Flächen n^{ter} Classe, namentlich in Bezug auf die Polartheorie derselben, ergeben sich mehrfach aus diesen Untersuchungen. O.

G. Battaglini. Nota sulla serie di sistemi di forze. Rend. di Napoli 1869.

Gegeben ist ein System von Kräften, so beschaffen, dass bei der Drehung um die Angriffspunkte die eine Kraft frei oder nur auf einer Ebene zu bleiben genöthigt ist, während die anderen Endpunkte der Stücke, welche die Kräfte repräsentiren, collinear verwandte Figuren beschreiben. Für diese variabeln Systeme von Kräften werden die Complexe der Axen der Nullmomente bestimmt und die Lagen des Systems untersucht, in denen sich eine Resultante oder ein Gleichgewicht findet, wie auch die Bedingungen aufgestellt, dass das System sich auf eine Resultante, die durch einen festen Punkt geht, reduciren lasse.

Bi. (O.)

G. Battaglini. Nota sulla teoria dei momenti. Rend. di Napoli 1869.

Es wird eine Formel abgeleitet, welche das Moment eines

Systems von Kräften in Bezug auf eine Axe mit Hülfe der Momente in Bezug auf die Kanten des fundamentalen Tetraeders ausdrückt. Darauf gründet sich der Beweis des Satzes von Möbius über die Axen, in Bezug auf welche die Momente des Systems untereinander eine lineare Relation haben, wie auch die Lösung des Problems, die Geraden zu finden, welche Wirkungslinien von Kräften, die Gleichgewicht hervorbringen, sein können. — Aus der Discussion eines Complexes von Geraden des ersten Grades wird die Eigenschaft der Axen der Null-Momente und der verschiedenen Paare von Resultanten hergeleitet, welche allgemein aus der Wirkung irgend eines Systemes von Kräften zusammengesetzt werden können. Zum Schluss werden die Eigenschaften bezüglich der centralen Axen von Momenten und der Axen der grössten Momente, welche verschiedenen Punkten des Raumes entsprechen, bewiesen.

Bi. (O.).

R. Townsend. On the moment of inertia of a ring with respect to its axis of revolution. Quart. J. X. 203-204. 1869.

Wenn eine ebene geschlossene Figur oder der Ring zwischen zwei sich nicht schneidenden, ebenen und geschlossenen Figuren eine Symmetrieaxe hat, und um eine zu dieser parallelen Axe, die in der Ebene der Figur liegt, ohne diese zu schneiden, rotirt, so ist das Trägheitsmoment des so gebildeten Umdrehungskörpers für die Umdrehungsaxe $= m(h^2+3k^2)$; wo m die Masse des Körpers, h den Abstand der Umdrehungsaxe von der Symmetrieaxe und k den Trägheitsradius für die Fläche der gegebenen Figur in Bezug auf ihre Symmetrieaxe bezeichnet.

He.

E. J. Routh. Moment of inertia of a quadrilateral. Quart. J. XI. 109-111. 1870.

Beweis, dass das Trägheitsmoment eines Vierecks in Bezug auf eine Gerade in seiner Ebene gleich

$$\frac{M}{6}\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta-\varepsilon(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\}$$

ist, wo M der Flächeninhalt, α, β, γ, δ, ε die Ordinaten der Ecken und des Durchschnittspunktes der Diagonalen sind.

O.

J. M. Hepps. On a general investigation of the bending moments and deflections of continuous beams. Phil. Mag. (4) XL. 446-460. 1870.

Csy.

F. Jenkin. On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains of framework. Trans. of Edinb. XXV. (II.) 1868-69. 441-447. 1869.

Die Theorie der reciproken Figuren in ihrer Anwendung auf Darstellung von Kräften wurde zuerst vollständig aufgestellt von Professor Maxwell in einer Abhandlung des Pilosophical Magazine (April 1864), worin folgende Definition und Anwendung auf Statik gegeben ist:

„Zwei ebene Figuren sind reciprok, wenn sie aus einer gleichen Anzahl von Linien bestehen, so dass entsprechende Linien in beiden Figuren parallel sind, und entsprechende Linien, welche in der einen Figur gegen einen Punkt convergiren, in der anderen Figur ein geschlossenes Polygon bilden.“

„Wenn die der Grösse nach durch 2 Linien einer Figur dargestellten Kräfte gerichtet sind nach den Endpunkten der entsprechenden Linien der reciproken Figur, so sind die Punkte der reciproken Figur alle in Gleichgewicht und werden durch diese Kräfte zusammengehalten.“

Der Verf. bemerkt, dass wenige Ingenieure sehen, dass ihnen in den beiden angeführten Paragraphen eine merkwürdig einfache und genaue Methode geboten ist, die Spannungen eines Rahmwerkes zu berechnen: seine Aufmerksamkeit wurde durch den Umstand auf die Methode gelenkt, dass sie ein praktischer Zeichner, H. Taylor, selbständig erfunden hat. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun zu zeigen, wie die oben angeführten Principien sich anwenden lassen auf die Berechnung der Spannungen in den gebräuchlichen Dach- und Brücken-Constructionen.

Cly. (M).

J. C. Maxwell. On reciprocal figures, frams, and diagrams of forces. Trans. of Edinb. XXVI. (I) 1869-70. 1-40. 1870.

Die Arbeit bezieht sich auf die früheren Untersuchungen des Verf.'s und auf die obige Arbeit von Jenkin. Der Verf. giebt zunächst den Weg an, die Theorie der Figuren von Rahmwerken und Kräften ganz elementar zu behandeln und praktisch die Fragen nach den Spannungen in solchen Rahmwerken ohne lange Rechnung zu lösen. Der zweite Theil behandelt die Frage vom theoretischen Gesichtspunkte aus und giebt eine Methode, die reciproken Figuren analytisch zu definiren, die auch auf Figuren zweier und dreier Dimensionen anwendbar ist. Endlich wendet der Verf. seine Methode auf die Untersuchung der Spannungen in continuirlichen Körpern an, und untersucht die Natur der Spannungsfunction, die zuerst von H. Airy (Phil. Trans. 1863) für Spannungen nach zwei Dimensionen entdeckt ist, und dehnt dieselbe auf Spannungen nach 3 Dimensionen aus. Cly. (M).

J. Carvallo. Étude sur la stabilité des tours balises. C. R. LXIX. 1064-1068. 1869.

Es soll die Form von Thürmen bestimmt werden, die am meisten geeignet ist, dem Anprall der Wellen zu widerstehen. Es wird daher das bestimmte Integral des Widerstandes der Cohäsion für eine Winkelverrückung aufgestellt. Ferner werden die Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes für die durch den Stoss der Welle entstehenden Oscillationen aufgestellt und untersucht, und die Zeit für die Phase derselben bestimmt. Den Haupteinfluss auf die Festigkeit des Thurmes übt das Integral der Cohäsion. Aus dem Maximum desselben für ein gegebenes Volumen wird die beste Form (die elliptische) gefolgert. Den Schluss bilden Bemerkungen technischer Natur. O.

J. M. Heppel. On the theory of continuous beams. Proc. of London XIX. 56-68. 1870.

Der Verf. zeigt, dass die Hypothesen der Theorie continuirlicher Balken, wie sie in den Werken von Navier, Clapeyron, Bresse, Belanger, Moseley u. A. auseinandergesetzt ist, im All-

gemeinen falsch sind, besonders aber darin, dass das Trägheitsmoment eines Schnittes constant ist durch jede Spannung. Er giebt eine allgemeine Erörterung der Spannungsmomente und der Abweichungen continuirlicher Balken. Cly. (M).

W. J. M. Rankine. Remarks on Mr. Heppels theory of continuous beams. Trans. of London XIX. 68-71. 1870.

Eine gedrängte Uebersicht über die Theorie und Erörterung eines besonderen Falles. Cly. (M).

M. Lévy. Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. C. R. LXVIII. 1456-1458. 1869.

de Saint-Venant. Rapport sur le mémoire de M. Maurice Lévy. C. R. LXX. 217-228. 1870. Liouville J. (2) XV. 237-249. 1870.

de Saint-Venant. Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque. C. R. LXX. 229-235, 281-286, 894-896. 1870. Liouville J. (2) XV. 250-263. 1870.

J. Boussinesq. Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion. C. R. LXX. 751-754. 1870. Liouville J. (2) XV. 267-270. 1870.

de Saint-Venant. Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée, contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur. C. R. LXX. 717-724. 1870. Liouville J. (2) XV. 271-280. 1870.

Die vorstehenden Arbeiten beziehen sich auf das Gleichge-

wicht frisch aufgeschütteter Erdmassen ohne Cohärenz, und auf den Druck, den diese Massen auf die sie stützenden Mauern ausüben. Um das Problem zu präcisiren, wird der (auch für die Praxis allein wichtige) Fall betrachtet, wo der Druck der auf einander lagernden Massen eben gross genug ist, das Gleichgewicht zu stören, und die einzelnen Theilchen im Begriff sind, sich zu trennen. Als Grundlage für die Behandlung dieses Problems nahm man bisher folgende von Coulomb aufgestellte Hypothese an: Die Gleitflächen, d. h. die Flächen, längs deren die Erdmasse sich trennt, sind eben; und die Neigung dieser Trennungsebenen ist durch die Bedingung bestimmt, dass das abgerissene Stück auf die stützenden Mauern ein Maximum des Druckes ausübt. Diese Hypothesen können nur in einigen besonderen Fällen richtig sein, sind aber im Allgemeinen mit der Erfahrung unvereinbar. Herr Lévy greift daher die Frage von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus an, indem er, ähnlich wie es in der Electricitätstheorie von Cauchy zuerst gemacht ist, die auf irgend eine Fläche im Innern ausgeübten Druckkräfte in ihre normale und tangentiale Componente zerlegt und die Bedingungen sucht, welche diese Componenten erfüllen müssen, damit ein Elementar-Parallelepipedon im Gleichgewicht sei. Für den allein betrachteten Fall, dass die Erdmasse von prismatischer Form mit horizontaler Längsaxe z ist, und dass der Druck von z unabhängig ist, ergiebt dies folgende Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx}+\dfrac{dT}{dy} = -\Pi.\sin\theta, \\ \dfrac{dT}{dx}+\dfrac{dN_2}{dy} = \Pi.\cos\theta. \end{cases}$$

Darin sind N_1 und N_2 die normalen Componenten des Drucks auf die Flächeneinheit, und zwar N_1 für eine Fläche, die parallel zu y ist, N_2 für eine Fläche parallel x; T ist die tangentiale Componente des Drucks auf beide Flächen, senkrecht zu z gerichtet. T muss für beide Flächen gleichen Werth haben, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Π ist das Gewicht der Volumeneinheit, θ der Winkel, den die Axe der y mit der Vertikalen macht. — Da diese Gleichungen nicht genügen, die drei Componenten des inneren Drucks zu bestimmen, so wird eine dritte Gleichung (und

diese ist wesentlich neu) dazu abgeleitet:

$$(2.)\quad T^2+(N_2-N_1)^2-(N_2+N_1)^2\sin^2\varphi = 0.$$

Hier ist $\operatorname{tg}\varphi$ der sogenannte Reibungscoefficient von Erde gegen Erde, d. h. der grösste Werth, den das Verhältniss der tangentialen Druckcomponente zur normalen annehmen kann, wenn noch Gleichgewicht stattfinden soll. φ ist also der grösste Winkel, den die Oberfläche der Erdmasse überhaupt mit dem Horizont bilden kann. Die Gleichung (2) drückt aus, dass es unter allen durch den betrachteten Punkt gelegten Flächenelementen eins oder zwei giebt, für welche der Gesammtausdruck das Maximum seiner Neigung gegen die Normale erreicht, dass also in dem betreffenden Theile der Erdmasse das Gleichgewicht eben an seine Grenze gelangt ist.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) leitet Herr L. unmittelbar einige Eigenschaften der Gleitcurven ab, längs deren sich die Erdmasse beim Aufhören des Gleichgewichts fortbewegt. Um aber die Gleichungen zu integriren, drückt er N_1, N_2, T durch eine Hülfsvariable aus, derart dass die Gleichungen (1.) erfüllt werden. Für die Hülfsvariable ergiebt sich dann eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades, die zunächst für den Fall integrirt wird, wo die Erdmasse, die auf einer horizontalen Ebene ruht, nur oben begrenzt wird durch eine unbegrenzte Ebene, die einen beliebigen Winkel ω mit dem Horizont bildet, und auf die kein Druck ausgeübt wird. Die Gleitlinien sind hier parallele gerade Linien. Es folgt dann die Behandlung des Falls, wo die Erdmasse auch seitlich begrenzt ist durch eine stützende Mauer, deren eine Fläche eine gegebene Neigung ε_1 gegen den Horizont hat. Die Bedingung, die an dieser Fläche zu erfüllen ist, ist die, dass der Gesammtdruck der Erdmasse mit der Normale der Fläche einen Winkel φ' bildet, dessen Tangente gleich dem Reibungscoefficienten der Erdmasse gegen die Mauer ist.

Herr Lévy findet, dass die Gleitflächen eben sind, dass also die Coulomb'sche Theorie richtige Formeln liefert nur für den Fall, dass ε_1 folgende Gleichung erfüllt:

$$\cos(2\varepsilon_1+\varphi-\omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Für diesen Fall allein wird die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades, welche die oben erwähnte Hülfsvariable erfüllen muss, integrabel. — Herr Saint-Venant leitet in seinen Arbeiten die obigen Formeln in eleganter Weise ab, indem er namentlich die Grenzbedingungen scharf hervorhebt. Für den Fall, dass s_1 die obige Gleichung nicht erfüllt, ist die partielle Differentialgleichung nicht integrabel. Herr S.-V. zeigt jedoch, dass auch in diesem Falle die Lösung des Herrn Lévy als eine erste Näherung zu betrachten ist und discutirt den Grad der Näherung.

Eine weitere Näherung giebt Herr Boussinesq, indem er den Formeln von Lévy neue Glieder hinzufügt, deren Quadrate vernachlässigt werden; auch diese Arbeit ist von Herrn Saint-Venant weiter ausgeführt. — Endlich bespricht Herr Saint-Venant noch die Arbeiten von Rankine und Scheffler über denselben Gegenstand. Er findet den Hauptunterschied zwischen der alten Theorie und der neueren darin, dass jene ihre Formeln als exacte aufstellt, während sie nach dieser nur für einen Specialfall exact sind, in allen andern Fällen aber reine Näherungsformeln.

Wn.

B. Hydrostatik.

J. Moutier. Sur les principes fondamentaux de l'hydrostatique. Nouv. Ann. (2) VIII. 241-253. 1869.

Eine elementare Darstellung der einfachsten Sätze der Hydrostatik, die nichts Bemerkenswerthes enthält. Wn.

A. Galbroith and Haughton. Manual of hydrostatics. London, Cassel 1869.

G. Kirchhoff. Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. Borchardt J. LXXI. 263-273. Berliner Monatsber. 1869. 881-887. 1870.

In einer incompressiblen, unbegrenzten Flüssigkeit, auf die

keine äusseren Kräfte wirken, und deren Theile sich nur so bewegen, dass ein Geschwindigkeitspotential existirt (in der also keine Rotation der einzelnen Theilchen stattfindet), befinden sich zwei Ringe, deren Mittellinien beliebige geschlossene Curven sind, während die auf diesen Mittellinien senkrechten Querschnitte congruente ebene Flächen von unendlich kleinen Dimensionen sind. [Für die mathematische Entwickelung wird der Einfachheit wegen angenommen, alle Querschnitte seien Kreise von unendlich kleinem constanten Radius]. — Durch die Anwesenheit des zweiten Ringes werden die Druckkräfte, welche die Flüssigkeit auf den ersten Ring ausübt, geändert. Der zweite Ring hat also scheinbar auf den ersten Kräfte ausgeübt, deren Resultante gleich der Aenderung des Drucks ist. Herr K. beweist nun den Satz: Die scheinbaren Kräfte, welche die Ringe auf einander ausüben, sind gleich den Kräften, mit denen sie auf einander wirken würden, wenn in ihren Mittellinien constante elektrische Ströme fliessen würden. [Dieser Satz bedarf, wie Herr Boltzmann später nachgewiesen hat, noch einer gewissen Einschränkung; siehe darüber den nächsten Jahresbericht.] Der Gang des Beweises ist folgender: Der Druck in irgend einem Punkt der Flüssigkeit hängt in bekannter Weise von dem Geschwindigkeitspotential φ ab. Dieses ist jedoch, da der Raum, den die Flüssigkeit einnimmt, ein dreifach zusammenhängender ist, nicht einwerthig. Man hat durch zwei Flächen (Querschnitte) den Raum in einen einfach zusammenhängenden zu verwandeln; dann ändert sich φ an diesen Querschnitten um constante Werthe. φ ist nun bestimmt 1) durch die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

2) durch die Grenzbedingungen: *a*) dass an den Querschnitten φ sich um gegebene constante Werthe ändert, *b*) dass für die Oberfläche eines Ringes $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gleich der Componente der Geschwindigkeit des anliegenden Theiles des Ringes nach n ist (n die Normale), *c*) dass für unendlich ferne Punkte

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

sind. Durch diese Bedingungen ist φ bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn die Lage und Geschwindigkeit der beiden Ringe, sowie die constanten Aenderungen von den Querschnitten k_1 und k_2 gegeben sind. Herr K. beweist nun, dass diesen Bedingungen genügt wird, wenn φ gleich der Summe der Potentiale zweier elektrischer Ströme ist, die die beiden Mittellinien durchfliessen mit den Intensitäten $\frac{k_1}{4\pi}$ und $\frac{k_2}{4\pi}$, plus einem Glied V, das aber überall in der Flüssigkeit unendlich klein ist, während seine Differentialquotienten in endlicher Entfernung von den Ringen überall unendlich klein sind. Herr K. bildet nun die lebendige Kraft der ganzen Flüssigkeit, die sich durch ein Integral über die Oberfläche beider Ringe ausdrücken lässt. Aus dem Ausdruck der lebendigen Kraft folgt unmittelbar das Moment der Druckkräfte, die die Flüssigkeit auf die Ringe ausübt, und dies Moment ist gleich dem Moment, mit dem die vorher besprochenen elektrischen Ströme auf einander wirken.

Wn.

W. Eberhardt. Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes einer um zwei oder mehrere vertikale Axen rotirenden Flüssigkeit. Pr. Rostock 1870.

Ein cylindrisches Gefäss, das mit einer tropfbaren Flüssigkeit angefüllt ist, steht auf einer horizontalen Drehscheibe, deren Axe mit der Axe des Gefässes zusammenfällt; diese Drehscheibe steht auf einer zweiten, diese auf einer dritten und so fort. Rotiren nun alle Drehscheiben unabhängig von einander, so rotirt die Flüssigkeit gleichzeitig um mehrere vertikale Axen mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es werden nun die Geschwindigkeiten, die einem Theilchen durch die verschiedenen Rotationen ertheilt werden, zusammengesetzt, daraus die Centrifugalkraft berechnet, und da ausser derselben nur die Schwere wirkt, so lässt sich die Differentialgleichung der Niveauflächen unmittelbar integriren. Die Resultate sind: Die Niveaufläche ist wie bei der Rotation um eine Axe ein Rotationsparaboloid. Die

Axe desselben ist jedoch nicht constant, sondern bewegt sich um die erste Rotationsaxe und zwar beschreibt sie bei zwei Rotationen einen geraden Kreiscylinder, bei mehr Rotationen einen Cylinder mit einer hypo- oder epicykloidischen Leitcurve. Der Scheitel der Paraboloide steigt und fällt dabei periodisch; nur bei einer und bei zwei Axen behält er stets denselben Abstand von der Bodenfläche. Die erste und letzte Rotation ist überhaupt auf das Steigen und Fallen des Scheitels ohne Einfluss.

Wn.

J. Todhunter. On Jacobi's theorem respecting the relative equilibrium of a revolving ellipsoid of fluid and on Ivory's discussion of the theorem. Proc. of London 1869-70. XIX. 42-56 1870.

Eine Uebersicht über die Behandlung des Jacobi'schen Satzes über die Gleichgewichtsfigur, die Ivory in den Philos. Trans. 1838-39 giebt.

Cly, (M.)

Kostka. Ueber die Auffindung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen, um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse, wenn deren Dichtigkeit und Umlaufszeit bekannt sind. Berl. Monatsber. 1870. 116-125.

Ist D die Dichtigkeit, T die Umlaufszeit einer um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse, f der Proportionalitätsfactor des Newton'schen Gravitationsgesetzes, so giebt es für jeden Werth von $V = \frac{2\pi}{D.f.T^2}$ zwischen 0 und 0,18711 zwei Rotationsellipsoide und ein dreiaxiges Ellipsoid, zwischen 0, 18711 und 0,2246 nur zwei Rotationsellipsoide als Gleichgewichtsfiguren. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage, wie zu jedem gegebenen Werthe von V die zugehörigen Gleichgewichtsfiguren ermittelt werden können, für ein sehr kleines V behandelt. Sind A, B und C die drei Axen (C Drehaxe), so ist für das eine Rotationsellipsoid $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}$ nahe 1, für das andere $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}$ nahe 0, für das dreiaxige Ellipsoid $\frac{C}{A}$ nahe 0, $\frac{C}{B}$ nahe 1. Setzt

man für den ersten Fall $\frac{C}{A} = \frac{C}{B} = \cos\alpha$, so wird V bestimmt durch die Gleichung:

$$V = \frac{\alpha(3+\operatorname{tg}^2\alpha) - 3\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^3\alpha}.$$

Um nun den Werth von α nahe 0 zu finden, wird dieser Ausdruck nach Potenzen von $\operatorname{tg}\alpha$ entwickelt und dadurch für ein kleines V als erster Näherungswerth gefunden:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\frac{15}{4}V}{1-\frac{6}{7}\cdot\frac{15}{4}V}.$$

Die Benutzung desselben ergiebt noch für $V = 0{,}09$ einen Werth für $\operatorname{tg}^2\alpha$, der bis zur siebenten Decimale richtig ist. Um den Werth von α nahe $\frac{\pi}{2}$ zu finden, wird nach Potenzen von $\operatorname{cotg}\alpha$ entwickelt. Der gefundene erste Näherungswerth ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pi}{2V} - \frac{8}{\pi} - 3{,}485\cdot\frac{2V}{\pi},$$

dessen weitere Benutzung für $V = 0{,}01$ einen bis zur vierten Decimale richtigen Werth ergiebt. Für das dreiaxige Ellipsoid wird $\frac{C}{A} = \cos\alpha$, $\frac{C}{B} = \cos\beta$ gesetzt. Das Ellipsoid wird dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$V = \cos^2\alpha.\cos^2\beta\int_0^\infty \frac{z(1+z)}{\sqrt{(1+z)(1+z\cos^2\alpha)(1+z\cos^2\beta)^3}}dz.$$

$$V = \sin^2\alpha.\sin^2\beta\int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{(1+z)(1+z\cos^2\alpha)(1+z\cos^2\beta)^3}}dz.$$

Diese Formeln werden mit Hülfe der θ-Functionen entwickelt.

Aus den auf diese Weise gewonnenen Formeln wird das Axenverhältniss bestimmt, und dieselben auf den der Erde zukommenden Werth $V = 0{,}0022997$ angewandt. Die Resultate sind wesentlich verschieden von denen, die Meyer in Crelle's J. XXIV. angegeben; der Verfasser aber, ebenso wie Herr Richelot, auf dessen Veranlassung die Rechnung angestellt ist, glauben dieselben für richtig ansehen zu können, da der Verfasser dieselben auch auf anderem Wege bestätigt gefunden hat.

O.

G. L. MATTHIESSEN. De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem. Brioschi Ann. (2) III. 84-112. 1869.

Die Abhandlung enthält den Versuch zu einer Theorie der Bewegung homogener Flüssigkeitsringe, welche frei rotiren und sich im Gleichgewicht befinden. Der Verfasser betrachtet, um auch ohne die Kenntniss der strengen Gleichgewichtsfigur sich der Lösung seiner Aufgabe zu nähern, nur solche Ringe, deren Querschnitt im Vergleich zum Ringdurchmesser sehr klein ist, und mit genügender Genauigkeit als kreisförmig oder elliptisch angesehen werden kann. Die so erhaltenen Relationen zwischen den Dimensionen des Ringes, seiner Winkelgeschwindigkeit und seiner Dichtigkeit sind dann wenigstens innerhalb bestimmter Grenzen genau genug, um Schlüsse auf die Stabilität solcher Massensysteme zu gestatten. B.

W. WALTON. On the solid of least resistance. Quart. J. X. 344-346. 1869.

In der von Newton aufgestellten, von Fatio, L'Hôpital, Bouguet, Hermann u. A. bewiesenen Gleichung der Fläche, deren Bewegung durch eine Flüssigkeit in bestimmter Richtung den mindesten Widerstand erleidet, nämlich

$$\frac{yp^3}{(1+p^2)^2} = c \qquad \left(p = \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

findet der Verfasser ein Paradoxon und erklärt es. H.

A. HANDL. Theorie der Waagebarometer. Wien. Ber. LIX. 7-17. 1869. Carl. Repert. VI. 104-112. 1870.

Die luftleere Röhre, die das Steigen oder Fallen des Barometers anzeigt, und das Gefäss, in welches dieselbe gesteckt ist, werden getrennt betrachtet, und daraus theoretisch genaue Formeln für den Gebrauch des Instrumentes hergeleitet. Die Formeln werden speciell für den Fall, wo Rohr und Gefäss cylindrisch und von gleichem Material sind, durchgeführt. Die Arbeit bietet mehr Interesse für den Physiker, wie für den Mathematiker. O.

R. Radau. Bemerkungen über das Waagebarometer. Carl Repert. VI. 165-168. 1870.

Die Arbeit enthält eine kurzgefasste Theorie des Waagebarometers, die wesentliches mathematisches Interesse nicht bietet.

O.

W. Walton. On a theorem on the resistance of fluids. Quart. J. X. 122-124. 1869.

Enthält einen geometrischen und einen analytischen Beweis eines Satzes, der sich auf den Widerstand bezieht, welchen die convexe Oberfläche eines Rotationskörpers dem in Richtung der Axe fliessenden Wasser darbietet. Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines von Newton (Princ. Math. tome II. Sect. 7 Prop. 34 Theor. 28) gegebenen. He.

A. M. Bustelli. Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante. Battaglini G. VII. 152-159. 213-220. 1869.

Die analytische Bestimmung beruht auf der Theorie der Momente. Neues will die Arbeit nicht geben; sie ist zur Ausfüllung einer Lücke in den Lehrbüchern für die Studirenden der Universität Neapel bestimmt. O.

J. Petersen. Svómmende Legemer. Forh. Christiania 1869. 188.

Im ersten Theile dieser Abhandlung werden die allgemeinen Bedingungen dafür entwickelt, dass ein schwimmender Körper im Gleichgewicht ist. Der Verf. bemerkt, dass die meisten seiner Resultate, ohne dass er davon Kenntniss gehabt, schon früher von Ch. Dupin abgeleitet seien (l'application de géométrie et de mécanique). Der zweite Theil handelt von der Stabilität des Gleichgewichts, und die Entwickelung stützt sich auf folgende Definition: Das Gleichgewicht ist stabil bei einer gegebenen Verrückung, wenn man, um dem Körper diese Verrückung zu ertheilen, eine positive Arbeit leisten muss. Hn. (Wn.)

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

E. Schering. Die Schwerkraft im Gaussischen Raum. Gött. Nachr. 1870. 311-321.

Unter Gaussischem Raum, im Gegensatz zum Euklidischen ist ein Raum zu verstehen, in dem unter Beibehaltung der übrigen Euklidischen Grundgesetze die Summe der Winkel, unter denen sich zwei von einer dritten Geraden geschnittene Gerade treffen, nicht ein gestreckter Winkel ist, sondern um eine Grösse kleiner als ein gestreckter, die in einem unveränderlichen, von der Beschaffenheit des Raumes allein abhängigen Verhältniss zu dem Flächeninhalt des gebildeten Dreiecks steht. Nach Anführung einiger Lehrsätze, die vom Herrn Verfasser früher für die Geometrie des Gaussischen Raumes aufgestellt sind, wendet sich die Arbeit zu der Lehre von den Bewegungen. Das Gaussische Princip des kleinsten Zwanges gilt auch hier für Geschwindigkeiten, welche sich stetig ändern. Kann man die Summe der virtuellen Momente von Kräften als Summe der totalen Variation einer Function und der totalen Derivirten nach der Zeit eines linearen Ausdrucks von Variationen ansehen, so gilt, wie der Herr Verfasser schon früher gezeigt, eine Integralgleichung, die als Verallgemeinerung des Princips von der lebendigen Kraft erscheint. Bestehen die Kräfte nur in Wechselwirkungen zwischen den bewegten Theilchen, für welche Wirkung und Gegenwirkung gleich sind und in der Verbindungslinie liegen, giebt es ferner keine äussern Beschränkungen der Bewegung, so findet man Sätze analog den Principien von der Erhaltung des Schwerpunktes und der Flächen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden noch einige Sätze mitgetheilt, welche sich auf Eigenschaften der Potentialfunction im Gaussischen Raum beziehen und die in Verbindung stehen mit den vom Verfasser angestellten Untersuchungen über Wechselwirkung elektrischer Theilchen (siehe Fortschr. d. Physik XIV. 483). O.

A. Mousson. Der jetzige Standpunkt unserer Kenntniss über die Schwere. Wolf J. XIV. 167-211. 1869.

Nachdem auf den nothwendig zu machenden Unterschied zwischen Pendelschwere und Fallschwere aufmerksam gemacht ist, werden die Formeln für Richtung und Stärke der Pendelschwere aufgestellt und eine Vergleichung der von den bekanntesten Beobachtern dafür berechneten Werthe angeknüpft. Den Hauptinhalt der Arbeit bilden Betrachtungen über die Bestimmung der Fallschwere, in der man weit weniger vorgeschritten ist. Aus den theoretischen Betrachtungen und Rechnungen, nach bekannten Autoren, werden die Umstände entwickelt, welche diese verhältnissmässig geringere Genauigkeit in der Bestimmung der Fallschwere gegen die der Pendelschwere bedingen. Die Abweichungen vom Lothe und der Einfluss des Luftwiderstandes sowie der Anziehung von Sonne und Mond beim Fall der Körper werden mathematisch erörtert, und die Resultate an einem Zahlenbeispiel erläutert. Die Arbeit will nur das jetzt Bekannte zusammenfassen. O.

R. B. Hayward. A proof of Lagrange's equations of motion referred to generalised coordinates. Rep. Brit. Ass. 1869/70. Quart. J. X. 369-375. 1869.

Vorausgesetzt wird ein materielles System, für welches zur Bestimmung der Lage und Configuration n absolut unabhängige Variable oder Coordinaten nothwendig und hinreichend sind. Es sei z eine dieser Coordinaten. Sie werde aus z in $z+dz$ verändert. Dann erhält ein Theilchen (Masse m) des Systems eine Verrückung, die mit kdz bezeichnet werden mag. k möge die Coefficientvariation (variation coefficient) des Theilchens m in Beziehung auf die Variable genannt werden und als eine Grösse betrachtet werden, die in Grösse und Richtung bestimmt ist. k ist dann im Allgemeinen eine Function aller n Coordinaten. Wenn v die Geschwindigkeit von m in einem möglichen Bewegungszustand des Systems bezeichnet, T (oder $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$) die lebendige Kraft des Systems, $z' \frac{dz}{dt}$, so beweist der Verfasser, dass, T in Ausdrücken der n Coordinaten, z' und der Zeit aus-

gedrückt, $\frac{dT}{dz'} = \Sigma(mkv\cos\varphi)$, wo φ der Winkel zwischen der Richtung von k und v ist. Indem er $mkv\cos\varphi$ das Partial-Moment des Systems nennt, zeigt er, dass jede der bekannten Bewegungsgleichungen in der Lagrange'schen Form

$$\frac{d\frac{dT}{dz'}}{dt} - \frac{dT}{dz} = \frac{dU}{dt}$$

die Relation ausdrückt zwischen dem Theil der Veränderung eines der Partial-Momente mit der Zeit und den Kräften, die auf das System wirken.

Die Interpretation bringt im Einzelnen einen directen Beweis der Lagrange'schen Gleichungen in Beziehung auf ein System fester rechtwinkliger Coordinaten oder anderer speciellen Coordinatensysteme, wie in den bisher bekannten Beweisen.

Csy. (O.)

GRÜNWALD. Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differentialgleichungen mit variablen Coefficienten. Prag. Ber. 1869. 63-69.

Ist die Bewegung eines Punktes durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

und die Anfangswerthe $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha', \quad \frac{dy}{dt} = \beta', \quad \frac{dz}{dt} = \gamma'$$

für $t = \tau$ bestimmt, und kennt man ihre Integrale, mittelst welcher x, y, z, x', y', z' durch t und die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ausgedrückt werden, so ergeben sich daraus leicht die Integralgleichungen für die Bewegung eines Punktes ξ, η, ζ welche durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\xi + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\eta + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\zeta,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\xi + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\eta + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\zeta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\xi + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\eta + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\zeta,$$

und die Anfangswerthe ξ_0, η_0, ζ_0, ξ'_0, η'_0, ζ'_0 für $t=\tau$ fixirt ist, wenn X, Y, Z als Functionen von t gegeben sind, in folgender Gestalt:

$$\xi = u_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + u_2 \frac{\partial x}{\partial \beta} + u_3 \frac{\partial x}{\partial \gamma} + u_4 \frac{\partial x}{\partial \alpha'} + u_5 \frac{\partial x}{\partial \beta'} + u_6 \frac{\partial x}{\partial \gamma'}.$$

Die Ausdrücke für

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}$$

folgen daraus, indem man x resp. durch y, z, x', y', ζ' ersetzt. Die u sind bestimmt durch:

$$u_1 = \xi_0 + \int_{t=\tau}^{t} \left(X \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + Y \frac{\partial \alpha}{\partial y'} + Z \frac{\partial \alpha}{\partial z'} \right),$$

woraus sich die u mit den höheren Indices ergeben, wenn man α der Reihe nach mit $\beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ und gleichzeitig ξ_0 mit η_0, ζ_0, ξ'_0, η'_0, ζ'_0 vertauscht. Hr.

A. Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. Clebsch Ann. II. 13-40. 1869.

In Beziehung auf Integrale, die mehreren mechanischen Problemen gemeinsam sind, hat zuerst Herr Bertrand eine allgemeine Frage behandelt, indem er eine Methode zur Behandlung von Problemen gab, in denen die bewegenden Kräfte nur von den Coordinaten des beweglichen Punktes abhängen. Anwendungen dieser Methode auf die Bewegung eines einzigen Punktes sind dann von Bertrand und Rouché gegeben worden. In der vorliegenden Arbeit werden die Gleichungen der Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche für den Fall betrachtet, dass die den beweglichen Punkt angreifenden Kräfte Functionen der Coordinaten und der Componenten der Geschwindigkeit sind. Da, wenn nur ein Integral mehreren Problemen gemeinsam ist, seine Form willkürlich ist, so beschränkt sich die Arbeit auf den Fall, wo die Probleme zwei gemeinsame Integrale zulassen. Die Frage reducirt sich dann auf die Untersuchung allgemeiner Ausdrücke zweier Functionen X und Y von 4 Variabeln

$$x, \quad y, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt},$$

so dass die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

gemeinsame Integrale haben können mit den Gleichungen derselben Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X_1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y_1.$$

Die Methode der Lösung stützt sich auf folgenden Satz: „Es seien $q_1, q_2, \dots q_n$ die unabhängigen Variabeln, V ihre Function,

$$p_1 = \frac{\partial V}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{dq_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial V}{dq_n}$$

ihre partiellen Derivirten der ersten Ordnung, $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\mu$ Functionen von

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \dots \quad p_n,$$

linear und homogen in Beziehung auf $p_1, p_2, \dots p_n$. Kann man dann aus den Gleichungen

$$(1.) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots \quad \varphi_\mu = 0$$

durch Elimination von $p_1, p_2, \dots p_n$ keine Relation von der Form

$$\Pi(q_1, q_2, \dots q_n) = 0$$

herleiten, und ist keine der Gleichungen eine Folge der andern, so wird dem Gleichungssystem (1.) (V unbekannt) genügt durch $n-\mu$ Functionen von

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_n,$$

die unabhängig untereinander sind, wenn die Bedingungen

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_2} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_2} \dots = 0$$

entweder identisch sind oder durch die Gleichungen (1.) erfüllt werden für alle Werthe i und j, enthalten in der Reihe

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots \quad n.\text{“}$$

Herr Korkine nennt die Gesammtheit der Gleichungen (1.) im ersten Fall, d. h. wenn sie identisch sind, système normal, im zweiten système fermé. Es seien nun ξ, η, ζ die rechtwinkligen Coordinaten des beweglichen Punktes von der Masse 1, ξ', η', ζ' die Derivirten $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$

die Gleichung der Oberfläche und H, K, L die Componenten der auf den beweglichen Punkt wirkenden Kraft, letztere als Functionen von $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ vorausgesetzt. Indem ξ, η, ζ als Functionen von zwei Variabeln x und y betrachtet werden, werden dann die Bewegungsgleichungen unter Anwendung von symmetrischen Coordinaten in der Form

$$(4.)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)-\frac{\partial T}{\partial x} = M, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right)-\frac{\partial T}{\partial y} = N$$

aufgestellt, wo M und N Functionen von

$$x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$$

ist. Sie nehmen durch Entwickelung nach $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

an und haben dieselben Integrale wie das Gleichungssystem:

$$\frac{dx}{dt} = x',\ \frac{dy}{dt} = y',\ \frac{dx'}{dt} = X,\ \frac{dy'}{dt} = Y$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x'\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y} + X\frac{\partial V}{\partial x'} + Y\frac{\partial V}{\partial y'} = 0.$$

Diese letztere Gleichung dient zur Definition der Integrale des Problems (X, Y). Ist nun V ein gemeinsames Integral der Probleme

$$(X, Y) \quad \text{und} \quad (X_1, Y_1),$$

so muss es 2 Gleichungen gleichzeitig genügen und hängt wenigstens von einer der Geschwindigkeiten x', y' ab. Jedes Problem hat 4 Integrale, von denen 3 Functionen von x, y, x', y' sind und das vierte die Form

$$-t + F(x, y, x', y')$$

hat. Die beiden Probleme können nur 2 gemeinsame Integrale haben, da sie bei 3 identisch sein würden. Der Verfasser behandelt nun zunächst den Fall, wo in den beiden Integralen die eine der Geschwindigkeiten x', y' nicht auftritt, und dann den allgemeinen, wo keine der Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x'}, \frac{\partial V}{\partial y'}$ Null wird. Es werden hierbei die Fälle, wo die gemeinsamen Integrale von der

Zeit unabhängig sind, oder wo eine derselben die Zeit enthält, unterschieden. Im Weiteren wird die gegenseitige Abhängigkeit der beiden gemeinsamen Integrale untersucht. Diese Untersuchung reducirt sich auf das von der Zeit unabhängige Integral. Anwendung finden die allgemeinen Formeln auf die Bewegung eines Punktes auf einer Ebene und auf einer Fläche unter dem Einfluss von Kräften, die nur von den Coordinaten des Punktes abhängen. Ein näheres Eingehen auf den reichen Inhalt der Arbeit würde indessen die Grenzen des hier gebotenen Raumes überschreiten, weshalb wir auf die Arbeit selbst verweisen.

O.

H. Th. Noth. Ueber gewisse Fälle der Centralbewegung. Diss. Jena 1869.

Der Verf. untersucht die mit Hilfe der Jacobi'schen Function zu behandelnden Fälle der Centralbewegung, wenn die nach dem Centrum gerichtete Beschleunigung einer beliebigen Potenz der Entfernung proportional ist, also $= m^2 r^n$. Nachdem das „Princip der Erhaltung der Flächen" und das „Princip der lebendigen Kraft" entwickelt ist, und die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt sind, werden die auf elliptische Functionen führenden Fälle

$$n = 0,\ 3,\ 5,\ -4,\ -5,\ -7,\ -\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{5}{2},\ -\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{5}{3},\ -\tfrac{7}{3}$$

einzeln behandelt.

M.

H. Müller. Die Keppler'schen Gesetze. Eine neue elementare Ableitung derselben aus dem Newton'schen Anziehungsgesetze. Braunschweig, Vieweg 1870.

Die beiden ersten Abschnitte geben die zum Verständniss des Folgenden nöthigen Einleitungen aus der analytischen Geometrie und Mechanik. Der dritte Theil enthält eine elementare Ableitung aus dem Newton'schen Gesetze, die von dem Princip der Flächen ausgeht.

O.

W. A. Whitworth. Law of force in elliptic orbit about any whatever. Messenger V. 160-161. 1870.

Der Verfasser leitet das Gesetz der Kraft in elliptischer

Bahn durch orthogonale Projection aus dem in kreisförmiger Bahn ab. Glr. (O.)

C. ZEIDLER. Einige Probleme aus der Dynamik des Punktes. Pr. Königsberg i. d. N. 1870.

Da das vorliegende Programm nur den ersten Theil der Arbeit des H. Verf. enthält, der zweite aber für 1871 in Aussicht gestellt ist, verschieben wir das Referat bis nach dessen Erscheinen. O.

B. TH. HÜLSEN. Ueber die Bewegung eines von zwei festen Punkten angezogenen Punktes. Rostock 1869.

Der angezogene Punkt H und die anziehenden Punkte A und B liegen in einer geraden Linie, und die Anziehungskraft wirkt umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung. Die Gerade sei die Abscissenaxe; der Anfangspunkt der Coordinaten habe von A und B die gleiche Entfernung a, und die Geschwindigkeit des beweglichen Massenpunktes im Anfangspunkt der Coordinaten sei $\frac{c}{a}$; dann ist

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{a^4c^2+2a^2x^2(3-c^2)+x^4(c^2-2)}}{a(a^2-x^2)}.$$

Der Verf. untersucht die Fälle

$$c^2=\frac{a}{4},\quad c^2=2,\quad c^2=0,\quad 0<c^2<2 \text{ und } c^2<0.$$

In den beiden letzteren Fällen werden die elliptischen Integrale, durch welche t ausgedrückt wird, für gegebene Constanten numerisch berechnet. M.

G. HOLZMÜLLER. Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber. Schlömilch Z. XV. 69-91. 1870.

Bei den mechanischen Problemen, in welchen die Kräftefunction U ausser den Coordinaten und der Zeit noch die Geschwindigkeiten enthält, lassen sich aus der Gleichung, die das

Princip der kleinsten Wirkung liefert:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = 0,$$

wo T die halbe lebendige Kraft bezeichnet, im Allgemeinen nicht die Gleichungen der Bewegung ableiten. In diesen Fällen handelt es sich darum, für U eine andere Function aufzufinden, die, in obige Gleichung substituirt, für die Ableitung der Bewegungsgleichungen das erwähnte Princip ersetzen kann. Hierher gehört das Problem der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetz von Weber, welches den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet.

Der Verfasser beschränkt sich auf den Fall eines freien von einem festen Centrum angezogenen Punktes. Der Ausdruck der Kraft ist hier:

$$R = -\frac{m}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}r'^2+\frac{2r}{c^2}r''\right)$$

und somit die Kräftefunction

$$U_1 = \frac{m}{r}\left(1-\frac{r'^2}{c^2}\right)$$

(wobei allerdings r' als Function von r zu betrachten ist). Führt man nun nach Neumann (Princip der Elektrodynamik) statt U_1 die Function

$$U = \frac{m}{r}\left(1+\frac{r'^2}{c^2}\right)$$

ein, so hat die Gleichung:

$$\delta \int (T+U)\,dt = 0$$

die Differentialgleichungen der Bewegung zur Folge, welche in Polarcoordinaten ausgedrückt, folgende Gestalt haben:

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial r'}\right) = 0,\quad \frac{\partial(T+U)}{\partial \vartheta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial \vartheta'}\right) = 0.$$

Um nun darauf die Hamilton'sche Methode anzuwenden, werden zwei neue Variablen:

$$p_1 = \frac{\partial(T+U)}{\partial r'},\qquad p_2 = \frac{\partial(T+U)}{\partial \vartheta'}$$

eingeführt, und die Differentialgleichungen nehmen folgende Form

an, welche freilich nicht die canonische ist:

$$\frac{\partial[T+U]}{\partial r} = -\frac{dp_1}{dt} - \frac{2m}{r^2}, \quad \frac{\partial[T+U]}{\partial p_1} = \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{\partial[T+U]}{\partial \vartheta} = -\frac{dp_2}{dt} = 0, \quad \frac{\partial[T+U]}{\partial p_2} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Die eckigen Klammern deuten an, dass in $T+U$ die Differentialquotienten durch Einführung von p_1 und p_2 entfernt sind. Die Variation nun von

$$V = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt$$

ergiebt leicht:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = p_2,$$

und die Ableitung nach t giebt die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = [T+U] - \frac{2m}{r},$$

welche, wenn in $[T+U]$ p_1 und p_2 resp. durch $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$ ersetzt werden, in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für V mit den drei Independenten r, ϑ, t übergeht. — Wir bemerken hierzu, dass durch Einführung von

$$p_1 = \frac{\partial(T-U_1)}{\partial r}, \quad p_2 = \frac{\partial(T-U_1)}{\partial \vartheta}$$

sowohl die partielle Differentialgleichung für V als auch die obigen Differentialgleichungen genau die Hamilton'sche Form, wie sie für das gewöhnliche Anziehungsproblem gilt, angenommen haben würden. Der Unterschied zeigt sich demnach allein darin, dass die vollständige Lösung für V statt, wie im gewöhnlichen Falle durch $\int_{t_0}^{t}(T+U_1)\,dt$, durch $\int(T+U)\,dt$ gegeben wird. —

Nachdem die partielle Differentialgleichung für V vollständig integrirt ist, ergeben in bekannter Weise

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2$$

die Integralgleichungen des Problems, und zwar werden schliesslich sowohl die Zeit t als der Winkel ϑ in der Form elliptischer Integrale als Functionen von r dargestellt. Eine Diskussion derselben ergiebt zunächst die Gültigkeit des Princips der lebendigen

Kraft, sowie des Flächenprincips, wie vorauszusehen war. Die möglichen Lagen des angezogenen Punktes sind auf einen Ring zwischen zwei concentrischen Kreisen beschränkt, indem sich für r ein Minimal- und Maximalwerth r_1 und r_2 ergiebt. Die Bahnen des Punktes zwischen den beiden Abständen (Perihelium und Aphelium) folgen so aufeinander, dass je zwei benachbarte Arme symmetrisch zu einander in Bezug auf eine durch das Centrum gehende Axe liegen.

Dasselbe Problem wird zum Schluss noch kurz für drei Coordinaten durchgeführt. Anhangsweise wird noch ein einfacherer Weg zur Herstellung der partiellen Differentialgleichung angegeben, der durch den Umstand ermöglicht wird, dass t nicht explicite vorkommt, und ausserdem das Princip der lebendigen Kraft gilt. Hr.

C. F. E. Björling. Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationnelle et entière de la distance d'un centre fixe. Grunert Arch. L. 55-68. 1869.

Nachdem die Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int_i^x f(x)dx + V^2 = F(x) - F(i) + V^2$$

aufgestellt ist, werden die Curven $z = f(x)$ (Kräftecurve), $\eta = F(x) - F(i) + V^2$ (Hülfscurve) und $y^2 = F(x) - F(i) + V^2$ (Geschwindigkeitscurve) construirt. Die Gestalt dieser Curven wird discutirt, und aus derselben werden Schlüsse auf die Bewegung des Moleculs gemacht. Die dynamische Frage ist so auf die Discussion der Wurzeln der Gleichung $\eta = 0$ zurückgeführt, für welche, wie früher vom Verfasser gezeigt ist (siehe Fortschr. d. M. I. p. 29), es genügt, die reellen Wurzeln der derivirten Gleichung zu kennen. O.

C. Lampe. Zur Bewegung des Systems zweier Punkte, deren einer sich auf vorgeschriebener Bahn bewegt. Pr. Ohlau 1870.

Auf einer horizontalen Ebene wird der Endpunkt einer

starren Linie auf gegebene Art fortgezogen. Die Bahn des anderen Endpunktes soll bestimmt werden. Als Bewegungsgleichung ergiebt sich für ein rechtwinkliges Coordinatensystem:

$$\left(X_1 - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x - \left(\mu m' g \frac{d\xi}{d\sigma} + m'\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\delta\xi$$
$$+ \left(Y_1 - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y - \left(\mu m' g \frac{d\eta}{d\sigma} + m'\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta\eta = 0,$$

wo m, m' die Massen der beiden Punkte, μ der Reibungscoefficient, x, y die Coordinaten des einen, ξ, η die des andern Punktes sind. Als Bedingungsgleichungen treten für den gegebenen Fall hinzu:

$$y = f(x), \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = a^2$$

(a die Entfernung der beiden Punkte). Nach Variation dieser Gleichungen kann man aus ihnen und der ersten zwei der Variationen eliminiren und gelangt dadurch zu einer Gleichung, die nur noch $\delta\xi$, $\delta\eta$ enthält. Da diese willkürlich sind, so müssen ihre Coefficienten null sein, und man erhält zwei neue Gleichungen, aus denen schliesslich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades zur Lösung des Problems resultirt. Die Auflösung derselben ist für die Fälle $\mu = \infty$ und $\mu = 0$ durchführbar. Der Verfasser führt dieselbe aus und behandelt speciell den Fall, wo der eine Punkt auf gerader Linie fortgeführt wird. Die Gleichung der Curve, die sich für den anderen Punkt ergiebt, wird entwickelt und ihre Gestalt untersucht. O.

R. Radau. Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. Liouville J. (2) XIV. 167-230. 1869.

Wenn bei einem mechanischen Problem die Kräfte und Verbindungen innerhalb des Massensystems durch eine Drehung desselben um eine feste Gerade (Polaraxe) keine Veränderung erleiden, so existirt stets ein Flächensatz, d. h. die Summe der Flächengeschwindigkeiten um die Polaraxe ist constant. Dieses Integral erlaubt eine Variable aus den Bewegungsgleichungen zu eliminiren. Gilt aber gleichzeitig noch der Satz von der lebendigen Kraft, so kann man durch einen Flächensatz zwei,

durch alle drei Flächensätze dagegen vier Variable fortschaffen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit der näheren Erläuterung dieses Satzes und mit der Anwendung desselben bei der Aufstellung kanonischer Bewegungsgleichungen für das Vielkörperproblem.

Gilt zunächst nur ein Flächensatz, so nehme man die Polaraxe zur z-Axe und lege durch dieselbe einen mit dem System beweglichen Meridian, der mit einem gegebenen Anfangsmeridian den Winkel Ω bildet. Die Componenten der Geschwindigkeit in Bezug auf dieses Axensystem sind dann resp.

$$x'-y\Omega', \quad y'+x\Omega', \quad z',$$

wo $x'=\frac{dx}{dt}$, etc. Für die lebendige Kraft erhält man hiernach die Gleichung

$$2T = \Sigma m\{(x'-y\Omega')^2+(y'+x\Omega')^2+z'^2\}.$$

Die Lage des beweglichen Meridians wird durch eine Gleichung $f=0$ zwischen den x, y, z bestimmt. Eliminirt man mit Hülfe der Gleichungen

$$f=0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'\right) = 0$$

aus $2T$ eine Coordinate und eine Geschwindigkeit, so erhält man für $T-U=H$ und für

$$\frac{\partial T}{\partial x'}=p, \quad \frac{\partial T}{\partial y'}=q, \quad \frac{\partial T}{\partial z'}=r, \quad \cdots \quad \frac{\partial T}{\partial \Omega'}=K,$$

das kanonische System

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \cdots \quad \frac{d\Omega}{dt}=\frac{\partial H}{\partial K}, \quad \frac{dK}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \Omega}.$$

Da in H den gemachten Voraussetzungen zufolge Ω nicht eingeht, so wird $K=$ const.; die vorletzte Gleichung sondert sich ebenfalls ab und hat nur noch die Bedeutung einer blossen Quadratur. Das zu integrirende System enthält jetzt zwei Variable weniger als vorher.

Wenn drei Flächenintegrale existiren, so denke man sich die Massen auf ein bewegliches Axensystem bezogen. Sind $x^0 y^0 z^0$ die Componenten der Rotation dieses Axensystems, so wird

$$2T = \Sigma m\{(x'+y^0z-z^0y)^2+(y'+z^0x-x^0z)^2+(z'+x^0y-y^0x)^2\}.$$

Die Axen sind diesmal durch drei Gleichungen zwischen den xyz bestimmt. Dieselben gestatten drei Coordinaten und drei Geschwindigkeiten zu eliminiren. Andererseits repräsentiren die Grössen

$$\frac{\partial T}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial T}{\partial y^0}, \quad \frac{\partial T}{\partial z^0}$$

die Summen der Flächengeschwindigkeiten um die drei beweglichen Axen. Man kann mit Hülfe derselben die Rotationen eliminiren, wenn man zwei neue Variable c und φ, nämlich den sinus der Breite und die Länge des Pols der invariablen Ebene in Bezug auf das bewegliche Axensystem einführt. Die Bewegungsgleichungen werden dann

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \ldots \quad \frac{K d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c},$$
$$\frac{K dc}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

wo K die Flächenconstante bedeutet. Die Anzahl der Variablen ist um vier vermindert, und die vollständige Bestimmung der Lage des Axensystems erfordert am Schlusse noch eine blosse Quadratur. Die vorzunehmenden Eliminationen lassen sich durch folgendes Verfahren erleichtern.

Wenn $f_1 = 0$ etc. die gegebenen Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten sind, so füge man zu $2T$ den Ausdruck

$$\Sigma \alpha \frac{df}{dt}$$

hinzu, wo die α noch zu bestimmende Multiplicatoren bedeuten, und setze die partiellen Ableitungen dieses Aggregats nach $x'y'z'\ldots$ resp. gleich $pqr\ldots$ Die Multiplicatoren ergeben sich dann vermittelst der Flächensätze und der sonstigen Bedingungen als lineare Functionen der $pqr\ldots$, und man hat in dem transformirten Ausdruck für $2T$ nur nöthig, diejenigen $pqr\ldots = 0$ zu setzen, deren Elimination beabsichtigt ist.

Die hier angedeuteten allgemeinen Methoden werden in der zweiten Hälfte der Abhandlung dazu benutzt, um verschiedene kanonische Systeme von Differentialgleichungen für das Dreikörperproblem aufzustellen. Neu unter diesen möchte vielleicht

das System sein, in welchem die gegenseitigen Abstände der drei Körper, ferner der Winkel zwischen einer Hauptträgheitsaxe und der Knotenlinie der Ebene der drei Körper in der invariablen Ebene und ausserdem noch die conjugirten Veränderlichen auftreten. In allen diesen Fällen bleibt schliesslich ein System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren übrig, sobald man das Integral der lebendigen Kraft benutzt und die Zeit fortschafft. Dasselbe gilt, wie der Verfasser zeigt, wenn man die Bahnen zweier Körper um den dritten betrachtet. In diesem Falle hat man zunächst neun Bestimmungsstücke, nämlich die zwei Radii-vectores, die zwei Geschwindigkeiten, die vier Winkel, welche diese Linien mit dem Durchschnitt der augenblicklichen Bahnebenen bilden und endlich die gegenseitige Neigung dieser beiden Ebenen. Auch hier bleibt nur ein System sechster Ordnung übrig, indem man entweder die vorhandenen Integrale benutzt, oder aber die Längeneinheit eliminirt, d. h. nur Winkel und Quotienten von Lineargrössen einführt. Zum Schluss wird dann noch eine etwas directere Herleitung für die Reduction der Differentialgleichungen auf ihre kleinste Anzahl für den Fall dreier Massen mitgetheilt. B.

R. Radau. Betrachtungen über die Flächensätze. Astr. Nachr. LXXIII. 337-344. 1869.

R. Radau. Weitere Bemerkungen über das Problem der drei Körper. Astr. Nachr. LXXIV. 145-152. 1869.

R. Radau. Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. C. R. LXVIII. 145-149. 1869.

Kurze Mittheilung einzelner Abschnitte aus der grösseren in Liouville J. erschienenen Abhandlung. (Siehe das vorstehende Referat.) B.

R. Radau. Sur une transformation des coordonnées de trois corps dans laquelle figurent les moments d'inertie. C. R. LXVIII. 1465-1469. 1869.

R. Radau. Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik. Clebsch Ann. II. 167-181. 1869.

Siehe das Referat über die Arbeit des Herrn Verfassers in Liouville J., die im Wesentlichen denselben Inhalt hat.

O.

A. Weiler. 1) Ueber die Elimination des Knotens in dem Problem der drei Körper. 2) Ueber die Flächenintegrale in dem Problem der drei Körper. 3) Eine Transformation der Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper. Astr. Nachr. LXXIV. 81-96. 1869.

A. Weiler. 4) Ueber die Elimination des Knotens in dem Problem der drei Körper. 5) Ueber die lineare Transformation in dem Problem der drei Körper. 6) Ueber eine Transformation in dem Problem der drei Körper. 7) Ueber die Integration der Störungsglieder in dem Problem der drei Körper. Astr. Nachr. LXXV. 113-128. 1870.

A. Weiler. Notes sur le problème des trois corps. Liouville J. (2) XIV. 305-320. 1869.

Die lineare Substitution, durch welche man die Differentialgleichungen des Problems der drei Körper auf sechs Gleichungen zweiter Ordnung reducirt, wird gewöhnlich so gewählt, dass dieses System von sechs Gleichungen die canonische Form besitzt. Die Flächensätze gestatten dann eine weitere Reduction auf ein System der siebenten Ordnung und eine Quadratur, während die Flächensätze selbst eine sehr einfache Gestalt annehmen. Herr Weiler weist nun zunächst nach, dass bei Einführung von Polarcoordinaten alle diese Eigenschaften auch noch bei solchen Transformationen bewahrt bleiben, bei denen die kanonische Form verloren geht. Allerdings besitzt letztere den Vorzug einer weitaus grösseren Einfachheit (1-2). In 3. zeigt der Verfasser, wie man von dem Jacobi'schen Systeme von Differentialgleichungen, welches zur Bestimmung der Polarcoor-

dinaten dient, ausgehend zu einem kanonischen System von Veränderlichen gelangen kann, bei welchen die Kräftefunction nur zwei derselben unter den Wurzelzeichen enthält. Dieses System ist auch von Herrn Radau, wenngleich auf anderem Wege gefunden worden. (4. 6). In 5. werden die einzelnen linearen Transformationen näher besprochen, bei denen die kanonische Form der Gleichungen bewahrt bleibt.

Um die Störungsgleichungen zu integriren, entwickelte man bisher die Störungsfunction nach Potenzen des Verhältnisses der Radiivectores und integrirte die einzelnen Glieder durch unendliche Reihen. Herr Weiler zeigt nun (7.), dass die Glieder

$$\int r^n \cos mv\, dt, \quad \int r^n \sin mv\, dt \quad (n > m),$$

wo r der Radiusvector und v die wahre Anomalie bedeutet, sich in geschlossener Form integriren lassen. Das Integral wird eine rationale Function von r, deren Coefficienten sich aus sinus und cosinus der Vielfachen von v zusammensetzen.

Die französische Arbeit ist nur eine Uebersetzung der Aufsätze 1-3. aus den Astr. Nachr. B.

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 13. Messenger V. 60-63. 1869.

Die Arbeit enthält eine Auseinandersetzung über die Art, wie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen angewendet werden. Zur Erläuterung dienen die Gleichungen dreier Theilchen, die so miteinander verbunden sind, dass sie ein gleichseitiges Dreieck (von variabler Grösse) bilden, das sich unter der Wirkung irgend welcher Kräfte in einer Ebene bewegt.

Glr. (O.)

A. Enneper. Bemerkungen über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. Gött. Nachr. 1869. 62-68.

Sind x, y, z die orthogonalen Coordinaten eines Punktes, X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kräfte in der Richtung der Coordinatenaxen, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H.\cos a + X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = H.\cos b + Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = H.\cos c + Z,$$

wo H der normale Widerstand der Fläche und a, b, c die Winkel der Normalen im Punkte x, y, z mit den Coordinatenaxen sind. Denkt man sich nun auf der Fläche zwei Systeme von sich orthogonal schneidenden Curven, die von den Variabeln u und v abhängig sind, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\cos a_1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \cos b_1 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \cos c_1 \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$
$$= \left(X \cdot \frac{dx}{du} + Y \cdot \frac{dy}{du} + Z \cdot \frac{dz}{du}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{E}},$$

$$\cos a_2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \cos b_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \cos c_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$
$$= \left(X \cdot \frac{dx}{dv} + Y \cdot \frac{dy}{dv} + Z \cdot \frac{dz}{dv}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{G}},$$

wo

$$E = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \quad G = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$

und a_1, b_1, c_1 resp. a_2, b_2, c_2 die Winkel sind, welche die Tangenten in (x, y, z) zu den Curven mit den Coordinatenaxen bilden, für welche u und v allein variiren. Bezeichnet ds das Bogenelement der Curve, welche der Punkt auf der Fläche beschreibt, und betrachtet man u und v als Functionen von s, so erhält man:

$$(3.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2} = \left(X \cdot \dfrac{dx}{du} + Y \cdot \dfrac{dy}{du} + Z \cdot \dfrac{dz}{du}\right) \dfrac{du}{ds} + \left(X \dfrac{dx}{dv} + Y \dfrac{dy}{dv} + Z \dfrac{dz}{dv}\right) \dfrac{dv}{ds} \\ \qquad = X \dfrac{dx}{ds} + Y \dfrac{dy}{ds} + Z \dfrac{dz}{ds}, \end{cases}$$

$$(4.) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \left[\dfrac{d}{ds} \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \dfrac{dv}{du} + \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{d\sqrt{G}}{du} \dfrac{dv}{ds} - \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{d\sqrt{E}}{dv} \dfrac{du}{ds}\right] \\ \qquad = \left(X \dfrac{dx}{dv} + Y \dfrac{dy}{dv} + Z \dfrac{dz}{dv}\right) \cdot \sqrt{\dfrac{E}{G}} \cdot \dfrac{du}{ds} \\ \qquad - \left(X \dfrac{dx}{du} + Y \dfrac{dy}{du} + Z \dfrac{dz}{du}\right) \sqrt{\dfrac{G}{E}} \cdot \dfrac{dv}{ds} \\ \qquad = X \cos a_0 + Y \cos b_0 + Z \cos c_0, \end{cases}$$

wo a_0 b_0 c_0 die Winkel sind, welche eine Gerade mit den Coordinatenaxen bildet, die in der berührenden Ebene des Punktes (xyz) liegt und zur Trajectorie des mobilen Punktes senkrecht ist. Ist ferner R der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts,

welcher durch die Tangente im Punkte (xyz) der Trajectorie des mobilen Punktes geht, so erhält man:

$$\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = H + X\cos a + Y\cos b + Z\cos c.$$

Findet das Princip der lebendigen Kraft statt, so dass

$$X = \frac{dP}{dx}, \quad Y = \frac{dP}{dy}, \quad Z = \frac{dP}{dz},$$

so geht (3.) über in:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2(P+h), \; (h \text{ constant}).$$

Man erhält daher statt (4.)

$$2(P+h)\cdot\left[\frac{d}{ds}\operatorname{arc.tang}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{du} + \frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{d\sqrt{G}}{du}\frac{dv}{ds} - \frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{d\sqrt{E}}{dv}\frac{du}{ds}\right]$$
$$= \frac{dP}{dv}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{du}{ds} - \frac{dP}{du}\sqrt{\frac{G}{E}}\cdot\frac{dv}{ds}.$$

Schliesst man den Fall $P =$ constant aus, so ergiebt sich zur Bestimmung von P, wenn der Punkt eine kürzeste Linie beschreiben soll:

$$\frac{d}{du}\left\{\frac{\frac{dP}{dv}\sqrt{EG}}{\sqrt{E\left(\frac{dP}{dv}\right)^2 + G\left(\frac{dP}{du}\right)^2}}\right\} = \frac{d}{dv}\left\{\frac{\frac{dP}{du}\sqrt{EG}}{\sqrt{E\left(\frac{dP}{dv}\right)^2 + G\left(\frac{dP}{du}\right)^2}}\right\}.$$

O.

J. D'Arcais. Del moto sopra un ellissoide di un punto sollecitato da forze che hanno una certa funzione potenziale. Tesi. Ann. d. Sc. Norm. Pisa 1868/69.

Als Anwendung der hyperelliptischen Integrale untersucht der Herr Verfasser das Problem der Bewegung eines Punktes auf einem Ellipsoide, wenn die auf den Punkt wirkenden Kräfte als Potentialfunction einen homogenen Ausdruck zweiten Grades der Coordinaten haben, zwischen dessen Coefficienten der Herr Verfasser eine Relation annimmt, die nothwendig ist, um die Bestimmung der Lagen des Punktes von Quadraturen abhängig zu machen. Er bestimmt zunächst den Ausdruck der Coordinaten des Punktes als Function einer Hülfsvariabeln, die er vermittelst einer Methode, die der von Liouville für die geodätischen Linien

gebrauchten analog ist, einführt und beweist einige Eigenschaften der Trajectorien, die eine gewisse Analogie mit der geodätischen Linie haben. Dann betrachtet der Herr Verfasser die Bewegung eines Punktes auf einem Rotationsellipsoid und bestimmt die Wirkung desselben für den Fall des Newton'schen Gesetzes. In diesem Falle können die Unbekannten des Problems mittelst elliptischer Functionen ausgedrückt werden.

Jg. (O.)

R. S. Ball. A problem in mechanics. Quart. J. X. 220-228. 1869.

Poisson hat in seiner Mechanik (seconde édition II. p. 439 u. f.) das Problem kleiner Oscillationen eines Punktes auf einer Oberfläche für den speciellen Fall behandelt, wo die Oberfläche ein dreiaxiges Ellipsoid ist. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem allgemein behandelt. Indem die Gleichgewichtslage des Punktes als Anfangspunkt des Coordinatensystems gewählt wird, werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Die Coordinaten ξ und η des Punktes werden gleich $\lambda\Omega$, $\mu\Omega$ gesetzt, und die Gleichungen dadurch auf die Form

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2}+\Omega\theta = 0$$

gebracht, wo θ eine Grösse ist, die sich aus einer Gleichung zweiten Grades bestimmen lässt. Man erhält dadurch für ξ und η Lösungen von der Form

$$\xi = \lambda_1 P\cos\sqrt{(\theta_1)}t+\lambda_1 Q\sin\sqrt{(\theta_1)}t+\lambda_2 P'\cos\sqrt{(\theta_2)}t +\lambda_2 Q'\sin\sqrt{(\theta_2)}t;$$

analog für η, während ζ sich aus der Gleichung

$$2\zeta-\frac{1}{R_1}\xi^2-\frac{1}{R_2}\eta^2 = 0$$

bestimmt, in der R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien im Punkte $\xi\eta\zeta$ sind. Die Bewegung des Punktes ist aus zwei einfachen Vibrationen

$$E\sin\{\sqrt{(\theta_1)}t+\varepsilon\}, \qquad E'\sin\{\sqrt{(\theta_2)}t+\varepsilon'\}$$

in der Tangentialebene und einer dagegen unendlich kleinen Bewegung längs der Z-Axe zusammengesetzt. Die Vibrationen sind, falls die Kräfte ein Potential haben, gegen einander rechtwinklig. Im Weiteren werden dann die Bedingungen aufgestellt,

unter denen kleine Oscillationen möglich sind, und dies auf das Problem angewandt, dass eine centrale Kraft einen Punkt, der gezwungen ist auf einer Oberfläche zu bleiben, nach irgend einem Gesetz der Entfernung anzieht. O.

R. S. Ball. On the small oscillation of a rigid body about a fixed point under the action of any force, and more particularly, when gravity is the only force acting. Trans. of Dublin XXIV. 593-627. 1869.

Ein starrer Körper, der um einen festen Punkt rotirt, werde durch Rotation um eine Axe, genannt Verrückungsaxe (axis of displacement), aus einer Lage in eine andere bewegt, und zwar um einen Winkel, der als Verrückungswinkel (angle of displacement) bezeichnet wird.

Normalaxe ist dann eine durch den festen Punkt gehende Richtung, um die der Punkt wie um eine feste Axe oscillirt, wenn die anfängliche Verrückungsaxe und die augenblickliche Axe mit ihr zusammenfällt. Für den Fall, dass die Kräfte ein Potential haben, wird eine geometrische Construction der Axen gegeben. Auf jedem durch den festen Punkt gehenden Radius wird eine Länge gemessen, proportional der kleinen Rotation, welche eine gegebene kleine Quantität von Kraft um diese Axe hervorbringen kann. Der Ort der Endpunkte ist das Ellipsoid von gleicher Energie. Die Normalaxen sind die drei gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser des Momentanellipsoids mit dem Ellipsoid von gleicher Energie. Die Länge des einfachen Pendels, isochron mit der Vibration um jede Axe, ist proportional dem Quadrate des Verhältnisses der entsprechenden Durchmesser in dem Momentanellipsoid und dem von gleicher Energie. Es wird ein Ellipsoid construirt, dessen Axen in derselben Richtung wie beim Momentanellipsoid und proportional den Quadraten derselben sind. Die Normalaxen sind die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser der Ellipsen, in welchen dies Ellipsoid und das Momentanellipsoid von der conjugirten Ebene geschnitten werden.

Wirkt die Schwerkraft allein, so wird eine Ebene, die der

Verticalebene durch den festen Punkt in dem Momentanellipsoid conjugirt ist, conjugirte Ebene genannt. Wie auch die kleinen Oscillationen der Körper aus einfachen Vibrationen um die Normalaxen zusammengesetzt sein mögen, die augenblickliche Axe liegt immer in der conjugirten Ebene, wenn der Körper nur kleine Oscillationen vollführt. Verticalebenen durch die Normalaxen sind rechtwinklig. Die Bewegung des Schwerpunktes ist aus einfachen harmonischen Vibrationen unter rechten Winkeln zusammengesetzt. Die Bewegung des zusammengesetzten Pendels ist damit also geometrisch dargestellt. Csy. (O.)

E. PADOVA. Applicazione del metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie. Battaglini VIII. 90-96. 1870.

Anwendung der Hamilton'schen Methode auf die Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer gegebenen Oberfläche zu bleiben. O.

H. MOSELEY. On the descent of a solid body on an inclined plane when subjected to alternation of temperature. Phil. Mag. (4) XXXVIII. 99-118. 1869.

Csy.

W. H. BESANT. Mathematical notes. Quart. J. XI. 38-42. 1870.

Die erste Note behandelt ein dynamisches Problem von der Bewegung eines Punktes in einer Curve unter dem Einflusse einer centralen Kraft. Mz.

W. KRUMME. Aufgaben über die schiefe Ebene. Schlömilch Z. XIV. 437-440. 1869.

Es werden eine Anzahl von Aufgaben über die schiefe Ebene mitgetheilt, die der Herr Verfasser in seinem „Lehrbuche der Physik für höhere Schulen" aus Mangel an Raum nicht hat abdrucken lassen. Dieselben sind Whewell, „An elementary treatise on mechanics" entnommen. Wir führen beispielsweise an: „Es wird die Ebene gesucht, längs welcher ein Körper aus

der Ruhe herabfallen muss, um in kürzester Zeit von einem gegebenen Kreise nach einem ausserhalb gelegenen Punkte zu gelangen.“ Die Lösungen sind kurz angedeutet.

O.

R. Hoppe. Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand. Schlömilch Z. XIV. 382-387. 1869.

Die Gleichung der Curve, auf der sich ein Punkt unter dem Einfluss gegebener Kräfte ohne Anfangsgeschwindigkeit in constanter Zeit $\frac{1}{2}T$ bewegt, ist, wofern ein Potential $(-\nu)$ existirt,

$$\nu = \frac{\pi^2}{T^2} \cdot s^2$$

(s ist der vom Endpunkt an gerechnete Bogen). Diese Curve der constanten Fallzeit entspricht auch einer constanten Steigzeit und Oscillationsdauer bei beliebigem Anfang der Oscillation. Sie ist für die beiden ersten Fälle bestimmt, während im dritten ein Zweig der Curve willkürlich ist und den anderen bedingt.

Existirt kein Potential, so genügt nicht mehr dieselbe Curve in allen Fällen. Sie verändert sich, je nach der Begrenzung der Bewegung. Speciell wird der Fall betrachtet, wo ausser einer Kraft mit einem Potential $-\nu$ ein dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand wirkt. Unverändert bleibt dabei, dass bei einseitiger Bewegung in einem Endpunkte die Kraft zur Bahn normal ist, dass die dadurch bestimmten Gleichungen constanter Fall- und Steigzeit sich in geschlossener Form darstellen lassen, dass endlich zu der Relation zwischen ν und s keine weitere alterirende Gleichung hinzutritt. Betrachtet man ausser den Curven constanter Fall- und Steigzeit auch die Curven, für welche die Oscillationsdauer entweder durch die Umkehrpunkte oder durch den Indifferenzpunkt der äussern Kraft begrenzt wird, so ist in allen vier Fällen, wenn μ der Widerstandscoefficient ist:

$$2\nu = \frac{\pi^2}{T^2} s^2 [1 + a_1 \mu s + a_2 (\mu s)^2 + \cdots].$$

Die Coefficienten sind für jeden Fall andere numerische Werthe, die in den drei ersten Fällen rational, im letzten mit

steigenden Potenzen von $\frac{1}{\pi}$ behaftet sind; in den beiden letzten Fällen sind ausserdem die ungradstelligen Null. Durch die Bedingung des Tautochronismus der Oscillation wird die Curve völlig bestimmt, während bei einseitiger Begrenzung die Hälfte der Coefficienten unbestimmt bleibt. Für die Curven der constanten Steig- und Fallzeit heisst die Gleichung

$$v = \pi^2 \frac{e^{\mp\mu s} - 1 \pm \mu s}{T^2 \mu^2}.$$

Ist die Bewegung durch die Punkte der Nullgeschwindigkeit begrenzt, so ergiebt sich:

$$2v = \frac{\pi^2}{T^2} s^2 \left(1 + \frac{2}{9}\mu^2 s^2 - \frac{52}{405}\mu^4 s^4 + \cdots\right),$$

für die vom Durchgang durch den Indifferenzpunkt begrenzte Oscillation dagegen:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\pi^2}{T^2} s \left\{1 + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)\mu^2 s^2 - \frac{4}{135}\left(13 - \frac{176}{\pi} + \frac{19088}{54\pi^2}\right)\mu^4 s^4 + \cdots\right\}.$$

O.

H. Gretschel. Elementare Ableitung der Formel für die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels. Grunert Arch. LI. 1-7. 1870.

Die einzelnen Lagen des Punktes während der Bewegung werden auf die verticale Ruhelage projicirt und an Stelle des Pendelpunktes selbst die Bewegung des Schnittpunktes der Projicirenden mit dem Kreise, welcher über der Strecke $2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (l Länge des Pendels, α Ausschlagswinkel) als Durchmesser vom Endpunkte der Vertikalen gezeichnet ist, betrachtet. Benutzt wird die Formel:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cos^{2\mu} k \frac{\pi}{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots2\mu} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

O.

W. KRUMME. Das Parallelogramm der Bewegung in der Wellenlehre. Schlömilch Z. XV. 289-293. 1870.

Durchläuft ein Punkt gleichförmig die Peripherie eines Kreises, so macht seine Projection auf einem Durchmesser des Kreises eine einfache Schwingung. Diese Darstellung der einfachen Schwingung empfiehlt der Herr Verfasser als Grundlage für die Pendel- und Wellenbewegung. Es ergiebt sich daraus namentlich eine anschauliche Definition des Begriffs „Phase“. Dieselbe wird mit den Definitionen von Airy, Thomson und Tait und Beer verglichen. Das Hauptgewicht legt der Herr Verfasser auf die Bewegung des Hülfspunktes. Die Wellenbewegung wird erst in zweiter Linie betrachtet. Diese Darstellung lässt sich auch zur Erklärung der Interferenzerscheinungen benutzen. Zum Schluss wird beispielshalber bewiesen, dass die Anzahl der Stösse zweier Töne in einer gewissen Zeit gleich der Differenz der Schwingungszahlen für diese Zeit ist.

O.

C. NEUMANN. Notiz über das cykloidische Pendel. Clebsch Ann. I. 507-508. 1869.

Bei einem gewöhnlichen cykloidischen Pendel sei α der willkürlich gewählte Ausgangspunkt des Mobils, ferner β der tiefste Punkt, und γ der mit α gleich hohe Punkt auf der anderen Seite des Bogens. Ausserdem denke man sich in der vertikalen Ebene $\alpha\beta\gamma$ eine Kreislinie construirt, deren Durchmesser dargestellt ist durch das vom Punkte β auf die Linie $\alpha\gamma$ gefällte Perpendikel. Endlich bezeichne man das Mobil selber mit m, und die horizontale Projection von m auf jene Kreislinie mit m'. Alsdann gilt folgender Satz:

Während m, getrieben von der Schwerkraft, hinabgleitet von α nach β, wird gleichzeitig der Projectionspunkt m' die eine Hälfte der Kreislinie mit constanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Nn.

H. RESAL. Note sur le pendule à oscillations elliptiques. C. R. LXVIII. 639-640. 1869.

A. Tissot. Sur le pendule conique. C. R. LXVIII. 715-716. 1869.

Herr Resal hat bewiesen, dass beim conischen Pendel die horizontale Projection der Bahn eine Ellipse ist, die sich um die horizontale Projection des Aufhängepunktes mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, die von der Länge des Pendels und vom Maximum- und Minimum-Ausschlag abhängig ist, Der Beweis selbst ist nicht mitgetheilt. Nach Herrn Tissot findet sich dies Resultat schon in Liouville's J. (1) XVII. von ihm bewiesen.

O.

E. Combescure. Note sur le pendule conique. Nouv. Ann. (2) VIII. 388-394. 1869.

Durch die obige Note des Herrn Resal veranlasst, publicirt der Herr Verfasser eine Lösung desselben Problems, die er bereits 1853 gefunden, bisher aber nur privatim einigen Gelehrten mitgetheilt hatte. Die Bewegungsgleichung, die der Verfasser aufstellt, hat die Form:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+4\mu^2u=3u^2.$$

Als erste Annäherung derselben ergiebt sich

$$u_1=A\cos 2\mu\tau+B\sin 2\mu\tau.$$

Indem $u=u_1+u'$ gesetzt wird, wird sodann zur zweiten Annäherung übergegangen. Es wird sodann $\zeta=\frac{z}{a}$ (a Länge des Pendels, z vertikale Coordinate) bestimmt. Es findet sich $\zeta=\eta\cos^2\mu\tau+\eta_1\sin^2\mu\tau+\frac{(\eta-\eta_1)^2}{4}\sin^2\mu\tau\cos^2\mu\tau$, wo η und η_1 Werthe sind, die den äussersten Werthen von τ, d. h. $\tau=0$ und $\mu\tau=\frac{\pi}{2}\left(\tau=t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$ entsprechen. Sodann werden die äussersten Werthe des Radiusvectors der horizontalen Projection ϱ und ϱ_1 bestimmt, welche für die erste Annäherung einander gleich sind. Es ergiebt sich mit Hülfe des Flächensatzes $d\omega=\sqrt{\eta\eta_1}\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{2-\zeta}\right)d\tau$, aus welcher Gleichung sich

$$\operatorname{tg}\mu\tau = \frac{1}{p}\operatorname{tg}\Omega$$

ergiebt, wo $\Omega = \omega - \frac{3\varrho\varrho_1}{8}\tau$, $p = \sqrt{\frac{\eta_1\left(1-\frac{\eta}{4}\right)}{\eta\left(1-\frac{\eta_1}{4}\right)}}$ ist. Das schliessliche Endresultat ist, dass, in Beziehung auf die Polaxe die ausgestattet ist mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\frac{3\varrho\varrho_1\tau}{8}$, die horizontale Bahn eine unveränderliche Ellipse mit den Axen ϱ, ϱ_1 ist. Zum Schluss wird die Dauer der Bewegung des Pendels von Scheitel zu Scheitel der beweglichen Ellipse und die einer ganzen Umdrehung der grossen Axe bestimmt. Es findet sich $T = \frac{\pi}{\mu}\sqrt{\frac{a}{g}}$, $\frac{T}{T} = \frac{4\mu}{3}\,\frac{4a^2}{AB}$, wo A und B die Halbaxen der Ellipse sind.

O.

DE SAINT VENANT. Rapport sur cinq mémoires de M. F. Lucas intitulés: Recherches concernant la mécanique des atomes. C. R. LXX. 311-321. 1870.

F. LUCAS. Étude sur la mécanique des atomes. Liouville J. (2) XV. 137-192. 1870. C. R. LXVIII. 1313-1316. 1869. C. R. LXX. 509-511. 1870.

Siehe Abschn. XI. Cap. 1.

H. BERTRAM. Probleme der Mechanik in Bezug auf die Variationen der Schwere und die Rotation der Erde. Pr. Berlin 1869.

Zunächst wird das Potential der Erdanziehung auf dem von Hansen (Theorie der Pendelbewegung, Danzig 1853) angegebenen Wege bestimmt. Die Erde wird als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen, welches durch ähnliche und ähnlich liegende ellipsoidische Flächen in homogene Schichten getheilt werden kann. Der Verfasser denkt sich dann ein System von ineinander geschachtelten homogenen Ellipsoiden, deren Begren-

zungsflächen jene Schnittflächen sind, und deren Dichtigkeiten so bestimmt sind, dass die Summe der Dichtigkeiten aller Ellipsoide, welche sich in einer gewissen Schicht durchdringen, gleich der wirklichen Dichtigkeit jener Schicht ist. Die Abplattung jedes dieser Ellipsoide wird als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet. Dadurch ergiebt sich für die Summe der Potentiale allèr Ellipsoide ein Ausdruck von der Form:

$$V = \frac{\mathfrak{A}}{r} + \frac{\mathfrak{B}}{r^3} - \frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{z}^2}{r^5},$$

dessen Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus der Bedingung abgeleitet werden, dass an der Oberfläche der Erde

$$g = 9{,}78019^m + 0{,}050754^m \sin^2\varphi$$

sein soll, wo φ die Polhöhe des Orts, g die Resultante aus der Anziehung und der aus der Rotation der Erde entspringenden Centrifugalkraft ist. Man erhält daraus zur Bestimmung der Constanten die beiden Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} - \mathfrak{a}\omega^2 = 9{,}78019,$$

$$\frac{2\mathfrak{A}\alpha}{\mathfrak{a}^2} - \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} + \mathfrak{a}\omega^2 = 0{,}050754,$$

wo $\mathfrak{a}$ die grosse Halbaxe des Ellipsoids. Dazu tritt dann noch die Bedingung, dass die Richtung der Schwere in den Punkten der Oberfläche des Ellipsoids normal auf derselben steht. Es wird dann auch der Werth des Potentials der Erdanziehung für einen in einem Punkte festgehaltenen Körper bestimmt. Im folgenden Abschnitt (Die fictiven Kräfte bei den Bewegungen auf der rotirenden Erde) werden die verschiedenen Elemente besprochen, aus denen sich die auf einen Punkt der rotirenden Erde wirkenden Kräfte zusammensetzen. Die Componente parallel der Xaxe nimmt für einen beweglichen Punkt von der Masse m folgende Form an:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - mu_0 + zm\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt}\right) + m\left(y\frac{d\gamma}{dt} - z\frac{d\beta}{dt}\right) +$$
$$+ mxw^2 - m\alpha\;(x\alpha + y\beta + z\gamma).$$

Der Verfasser nennt die auf X folgenden Glieder der rechten Seite fictive Kräfte und untersucht die Bedeutung der einzelnen Glieder. Es werden dann die Componenten der veränderlichen

Schwere aufgestellt und folgende Anwendungen gemacht. 1) 2 Quecksilbergefässe sind in einer Vertikalen in verschiedenen Höhen angebracht. Ein Fernrohr wird von der Spitze des Thurmes so gerichtet, dass das Fadenkreuz sich mit seinem Spiegelbild im untern Queksilber deckt, dann so, dass es sich mit dem Spiegelbild im obern deckt, so also dass die Axe des Fernrohrs die Richtung der Schwere in beiden Standpunkten annimmt. Der Winkel δ, den beide Richtungen miteinander einschliessen, ist gleich dem Winkel, den die Richtung der Schwere im oberen mit der Zaxe macht, und wird bestimmt. 2) Die Gleichgewichtslage eines homogenen, biegsamen Fadens, der in einem Punkte O aufgehängt ist. Der Faden bildet nahezu einen Parabelbogen. Der Parameter der Curve ist abhängig von der geographischen Breite, aber unabhängig von der Länge des Fadens, ein Resultat, welches mit dem von Puiseux gegebenen übereinstimmt.

Im dritten Abschnitt werden die Differentialgleichungen für relative Bewegung auf die Lagrange'sche Form der dynamischen Gleichungen gebracht und so auf die Betrachtung der Gleichgewichtslagen eines schweren, um einen festen Punkt der Erde drehbaren Körpers und die Oscillationen desselben um eine feste Axe angewandt. Speciell werden dabei die Gleichgewichtslagen eines im Schwerpunkt unterstützten Körpers und die Gleichgewichtslage und Oscillation eines Körpers untersucht, dessen Schwerpunkt vom Aufhängepunkt eine endliche Entfernung hat. Das Resultat der ersten Untersuchung ist eine Verallgemeinerung eines von Puiseux gegebenen Satzes: „Ein im Schwerpunkt aufgehängter Stab sucht sich in die Ebene des Meridians so zu stellen, dass er mit der Vertikalen einen kleinen Winkel einschliesst.“ Die von Bähr aufgestellte Behauptung, der Körper könne nur im Gleichgewicht sein, wenn eine seiner Hauptaxen der Erdaxe parallel sei, wird als irrig, in Folge der Vernachlässigung der Variationen der Erdanziehung, nachgewiesen. Die zweite Aufgabe war bereits von Lottner behandelt. Dieser hatte aber die Variationen der Schwere nicht berücksichtigt; der Verfasser gelangt dabei zu einem abweichenden Resultate, aus dem die von Lottner gegebene Formel durch Vernachlässigung einer

Anzahl von Gliedern hervorgeht. Den Schluss bildet die Untersuchung der Bewegung eines frei fallenden Körpers auf der rotirenden Erde.

O.

A. DUPRÉ. Mémoire sur le choc. C. R. LXVIII. 53-55. 1869.

Aus dem vorliegenden Auszug ist über den mathematischen Theil der Arbeit nichts zu ersehen.

O.

P. GAUTIER. Essai sur le mouvement d'un projectile dans l'air. C. R. LXIX. 1061-1064. 1869.

Siehe Fortschr. d. M. I. 335-337.

O.

W. WALTON. On a problem in the calculus of variation. Quart. J. X. 72-78. 1869.

Der Verfasser citirt folgenden Satz aus Thomtson & Tait's Natural Philosophy.

Werden Geschosse von einem Punkte O aus mit derselben Geschwindigkeit nach allen Richtungen in einer verticalen Ebene geworfen, so werden ihre Flugbahnen von einer Parabel umhüllt. Die Bahn jedes Geschosses von O nach einem Punkte P ist die Bahn der kleinsten Arbeitsleistung, wenn P vor der einhüllenden Parabel erreicht wird; sie ist aber nicht die Bahn kleinster Arbeitsleistung, sobald die einhüllende Parabel vor dem Punkte erreicht wird.

Der Verfasser bemerkt nun, dass auch dann eine Bahn kleinster Arbeitsleistung bestehen muss, wenn der Punkt P ausserhalb der einhüllenden Parabel liegt, wenn man den Massenpunkt sich in einem passend gekrümmten Rahmen bewegen lässt, und findet, dass diese Bahn aus Geraden zusammengesetzt ist. Das Geschoss muss erst vertical steigen, bis es seine Geschwindigkeit verloren hat. Dann bewegt es sich horizontal bis es vertical zum gegebenen Punkt herabfallen kann.

He.

M. DE BRETTES. Détermination de l'épaisseur du blindage en fer que peut traverser un projectile dont on connaît le poids, le calibre et la vitesse d'arrivée. C. R. LXX. 1400-1402. 1870.

Der Verfasser hat eine Formel aufgestellt für die Durchdringung von Panzerplatten durch Geschosse von bekannter Grösse. In derselben kommen vor das Gewicht und der Radius des Projectils, seine Ankunftsgeschwindigkeit, die Dicke der Platte, ausserdem g, π und eine andere Constante. Mit derselben kann man die Ankunftsgeschwindigkeit eines gegebenen Geschosses bestimmen, die nöthig ist, um eine Platte von gegebener Dicke zu durchschlagen, ebenso wie man die Dimensionen und das Gewicht des Geschosses bestimmen kann, das bei gegebener Ankunftsgeschwindigkeit eine Platte von gegebener Dicke durchschlagen soll. O.

M. DE BRETTES. Relation entre les diamètres, les poids, les vitesses initiales des projectiles de l'artillerie, et la tension de leurs trajectoires. C. R. LXVIII. 1336-1338. 1869.

M. DE BRETTES. Influence de la vitesse initiale, du diamètre ou des poids d'un projectile de l'artillerie sur les tensions de ses trajectoires d'égales portées. C. R. LXIX. 394-397. 1869.

M. DE BRETTES. Détermination d'une ou plusieurs des quantités suivantes: le diamètre d'un projectile oblong, son poids, sa vitesse initiale, la flèche de sa trajectoire et le poids du canon, lorsque les autres sont données. C. R. LXIX. 1239-1242. 1869.

In der ersten Arbeit hat der Verfasser ein Gesetz aufgestellt, welches in Worten sich folgendermassen ausspricht: „Die Culminationspunkte der Bahnen zweier ähnlichen Projectile von gleicher Schussweite sind proportional den Durchmessern und umgekehrt proportional den Producten der Quadratwurzeln ihrer Gewichte in die Quadrate ihrer Anfangsgeschwindigkeiten".

Analytisch heisst der Satz: $\frac{F}{F_1} = \frac{R V^2 \sqrt{P_0}}{R_1 V_1^2 \sqrt{P}}$. Diese Formel wird im Folgenden für specielle Fälle, d. h. für Fälle, wo einzelne der Grössen einander gleich sind, untersucht und Anwendungen derselben auf Aufgaben der Artillerie gemacht.

O.

C. W. MERRIFIELD. Resistance as the cube of the velocity. Messenger V. 5-12. 1869.

Neuere Untersuchungen haben dargethan, dass die Verzögerung, welche die Projectile der gezogenen Geschütze durch die Luft erleiden, annähernd als nach der dritten Potenz der Geschwindigkeit erfolgend angenommen werden kann. Die allgemeine Formel für den Fall, dass sich der Widerstand wie die n^{te} Potenz der Geschwindigkeit ändert, findet sich in mehreren Büchern, es giebt aber für den Fall $n = 3$ einige sehr bemerkenswerthe Reductionen. Da dies nun wahrscheinlich ein Hauptfall ist, so giebt der Verfasser eine Sammlung der dahin gehörigen Formeln. Da die Bewegungsgleichungen in zwei Dimensionen nicht vollständig lösbar sind, so werden folgende Voraussetzungen gemacht, von denen aus man die Trajectorie möglichst nahe erhalten kann: 1) Bei gegebener Elevation ist die Flugzeit dieselbe, wie im leeren Raum; 2) Die Verzögerung afficirt nur die horizontale Componente der Geschwindigkeit.

Glr. (O.)

A. CAYLEY. A „Smith's Prize" paper 1869. Question 3. Messenger V. 43-44. 1869.

Zwei Kanonen (die frei vom Rückprall) unterscheiden sich nur durch ihr Gewicht und das Gewicht ihrer Geschosse. Nimmt man an, dass in einem Moment während der Explosion die Explosivkraft nur von dem Raum abhängt, den der Dampf des Pulvers einnimmt, so sollen die entstehenden Geschwindigkeiten der Kugeln verglichen werden, ferner sollen die Geschwindigkeiten von Kugeln desselben Geschützes bestimmt werden, wenn es vom Rückprall frei und absolut fest ist.

Betrachtet man ein einzelnes Geschütz von der Masse M, dessen Geschoss die Masse m hat, so ist, wenn S und s die Räume sind, die vom Geschütz rückwärts und vom Geschoss vorwärts zur Zeit t der Explosion beschrieben werden:

$$v\sqrt{m} = \frac{C}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}},$$

wo v die Geschwindigkeit der Kugel beim Verlassen des Rohrs ist, C eine Constante, die von den Gewichten der Kugel und der Kanone unabhängig ist. Sind v, v_1 die Geschwindigkeiten derselben Kugel, so wird für die Kanone mit der Masse M, wenn sie vom Rückprall frei und absolut fest ist,

$$v_1 = v\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

gefunden. Glr. (O.)

A. Cayley. A „Smith's Prize" paper. 1869. Question 6. Messenger V. 48-49. 1869.

„Eine Masse M ist an dem einen Ende A einer Kette AC befestigt, welche der Art in einer horizontalen Ebene liegt, dass der Theil AB der Kette eine gerade Linie bildet, während der übrige Theil BC in B aufgehäuft ist. Die Masse M ist dann in der Richtung BA mit gegebener Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt. Sie bewegt sich, die Kette mitziehend, in gerader Linie. Die Bewegung soll bestimmt werden und die Eigenthümlichkeit des sich ergebenden dynamischen Problems erklärt werden." Die Bewegung kann man durch die Betrachtung, dass das Moment während der Bewegung constant ist, leicht erhalten, aber die gegebene Untersuchung bringt die Eigenthümlichkeit des Problems noch klarer an's Licht, nämlich, dass es ein Problem von continuirlichen Impulsen ist; in jedem Element der Zeit dt hat ein infinitesimales Element der Masse seine Geschwindigkeit plötzlich verändert, obgleich die Veränderung der Geschwindigkeit der ganzen continuirlichen Masse continuirlich ist.

Glr. (O.)

Yvon Villarceau. Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer. Liouville J. (2) XV. 315-372. 1870.

Die vorliegende Abhandlung verdankt ihre Entstehung, wie der Verfasser angiebt, der Belagerung von Paris, und behandelt ein interessantes der Technik entnommenes Beispiel zur Theorie der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt. Wenn nämlich bei einer Kornmühle die Massen des oberen rotirenden Mühlsteines in der Weise abgeglichen werden, dass die untere Fläche desselben im Ruhezustande genau horizontal liegt, so wird ein Gleiches während der Rotation nur dann stattfinden, wenn die Rotationsaxe dauernd mit einer der durch den Aufhängungspunkt gehenden Hauptträgheitsaxen zusammenfällt. Letzteres ist nun wegen der Unregelmässigkeiten in der Form und Dichtigkeit des Steines nur annähernd der Fall; infolge dessen nimmt die untere Fläche des Steines während der Rotation eine mehr oder minder geneigte Lage gegen den Horizont an. Diesem Uebelstande sucht man in der Praxis dadurch zu entgehen, dass man mit dem Mühlsteine zwei oder auch vier „regulirende Massen" verbindet, welche in zwei senkrecht zu einander stehenden Meridianebenen möglichst nahe an der Peripherie des Steines angebracht sind und die sich in verticalem Sinne verstellen lassen.

Der Verfasser entwickelt zunächst in ebenso eleganter als eingehender Weise die Theorie der Drehung eines solchen Massensystems. Die Integration der Bewegungsgleichungen lässt sich mit Hülfe der trigonometrischen Functionen vollständig durchführen, sobald man die Neigung der unteren Fläche des Steines und die Fehler, welche man durch Annahme der vollkommenen Cylinderform und Homogenität des Steines begeht, als kleine Grössen erster Ordnung ansieht, deren Produkte und Potenzen zu vernachlässigen sind. Die gefundenen Integrale lassen sich in einfacher Weise geometrisch interpretiren. Es bewege sich nämlich ein Punkt auf der Peripherie einer Ellipse so, dass er um den Mittelpunkt derselben in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume bestreicht, ferner drehe sich diese Ellipse mit gleichför-

miger Geschwindigkeit um ihren Mittelpunkt, dann beschreibt jener Punkt die Curve, welche durch die Bewegung des Durchschnitts der durch den Aufhängungspunkt gehenden Verticalen mit der unteren Fläche des Steines in dieser Ebene erzeugt wird. Zu gleicher Zeit geben die Relationen zwischen den Constanten des rotirenden Massensystems und zwischen den Integrationsconstanten, welche die Form der Bewegung näher definiren, dem Verfasser die Mittel an die Hand, direkt aus der Beobachtung der Rotation des Steines die zur vollständigen Aequilibrirung desselben nothwendigen Verschiebungen der oben erwähnten regulirenden Massen zu berechnen. Der Verfasser setzt des Näheren zwei Methoden auseinander, welche praktisch durchführbar sind, und von denen namentlich die eine in Bezug auf Einfachheit allen Ansprüchen genügen dürfte.

B.

H. Moseley. On the mechanical impossibility of the descent of glaciers by their weight only. Phil. Mag. (4) XXXVII. 363-370. 1869.

Die Arbeit enthält eine mathematische Discussion der Bedingung des Herabsteigens von unbegrenzter Länge und von gleichförmigem rechtwinkligen Schnitt und Abdachung. Es wird bewiesen, dass das Mer de Glace durch seine Schwere allein nicht so herabsteigen kann, wie es thut.

Csy. (O.)

de Saint-Venant. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. C. R. LXX. 473-480. 1870.

Der Verfasser untersucht, welche Gleichungen an Stelle der hydrodynamischen zu treten haben, wenn es sich um die Bewegungen fliessend-fester Körper handelt. Er gelangt für den Fall, dass nur zwei Dimensionen zu berücksichtigen sind, zu den folgenden 5 (mit Lamé'schen Bezeichnungen):

$$\frac{dN_x}{dx}+\frac{dT}{dz}=\varrho\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-w\frac{du}{dz}\right)$$
$$\frac{dT}{dx}+\frac{dN_z}{dz}=\varrho\left(Z-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dx}-w\frac{dw}{dz}\right)$$
$$\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}=0$$
$$T^2+\left(\frac{N_z-N_x}{2}\right)^2=K^2$$
$$\frac{N_z-N_x}{2T}=\frac{\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}}{\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}}.$$

O.

M. Lévy. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. C. R. LXX. 1323-1325. 1870.

Der Verfasser hat für den allgemeineren Fall (siehe das vorstehende Referat), wo 3 Dimensionen zu berücksichtigen sind, die 9 Gleichungen aufgestellt. Speciell wird sodann der Fall berücksichtigt, wo Alles um die Zaxe symmetrisch ist; es ist das der Fall, der in den Experimenten des Hrn. Tresca eine Rolle spielt. O.

H. Tresca. Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux. C, R. LXX. 1197-1201. 1869.

Rapport sur le mémoire de M. Tresca. C. R. LXX. 288-305. 1870.

Der vorliegende Auszug und der Bericht über die Arbeit des Hrn. Tresca gestatten keinen Einblick in den eigentlich mathematischen Theil derselben. Wir verschieben daher das Referat, bis die Arbeit selbst vorliegt.

O.

de Saint-Venant. Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile contenu dans un vase à parois verticales, pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur. C. R. LXVIII 221-237. 290-301. 1869.

Herr de St.-Venant hat das bereits im Jahre 1868 (Fortschr. d. M. I. 347-348) besprochene Problem noch einmal aufgenommen. Er substituirt an Stelle der früheren Hypothese, wonach die Componenten der Geschwindigkeiten u, v, w Derivirte derselben Function φ waren, die neue, dass

$$u = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{d\varphi}{dx},\ v = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{d\varphi}{dy},\ w = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d\varphi}{dz},$$

wo a, b, c constant. Nachdem die Schwierigkeiten, die aus der Annahme anderer Hypothesen für die Theorie sich ergeben würden, discutirt sind, wird diese als Näherungshypothese begründet und die Resultate seiner darauf gestützten Untersuchungen für drei specielle Fälle gegeben. O.

R. Radau. Sur la rotation des corps solides. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 233-250. 1869.

R. Radau. Note sur la rotation des corps solides. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 87-98. 1870.

Die erste Abhandlung enthält eine Kritik der von Sylvester (On the motion of a rigid body; Trans. of London 1866) gegebenen Untersuchung, in der sich zugleich eine Recapitulation der von Jacobi, Richelot und Anderen erhaltenen Resultate findet. In der Note bemerkt Herr Radau, dass seine Kritik auf einer irrthümlichen Auslegung einer Stelle in der Arbeit Sylvester's beruhe, dieselbe daher gegenstandslos sei. O.

N. M. Ferrers. Note on Prof. Sylvester's representation of the motion of a free rigid body by means of a material ellipsoid whose centre is fixed and which rolls on a rough plane. Trans. of London. CLX. 1-8. 1870.

Die Note bezieht sich auf Prof. Sylvester's Abhandlung: „On

the motion of a rigid body acted on by no external forces" (Trans. of London CLVI. 1866). Die Resultate sind auf eine etwas verschiedene Weise hergeleitet und einige neue Theoreme gewonnen. Cly. (M.)

P. G. Tait. On the rotation of a rigid body round a fixed point. Trans. of Edinburgh. XXV. (2). 1868-69. 261-303. 1869.

Um die bekannten Resultate in fasslicherer Form und mit weniger analytischem Aufwand, als bisher nöthig schien darzustellen, wendet der Verf. die Methode der Quaternionen an, eine Methode, die nach des Verfassers Ansicht besonders geeignet ist, für die symmetrische Darstellung von Sätzen, die in der Regel mit Hülfe der cartesischen Methoden nur nach langen Rechnungen erhalten werden, — und die frei ist von der indirecten und auf den ersten Blick zwecklos scheinenden Angriffsweise, die viele Leser verwirrt. Aber die Anwendung der Methode der Quaternionen erfordert eine völlige Umgestaltung aller gewöhnlichen Bezeichnungen. So hat die folgende Quaternionen-Gleichung

$$\Sigma \cdot m V \varpi \ddot{\varpi} = \Psi,$$

die einzige in der Abhandlung auftretende dynamische Gleichung, eine ganz andere Form als Lagrange's allgemeine Bewegungs-Gleichung. Cly. (M.)

J. Zuleger. Grundzüge von Poinsot's Theorie der Drehung. Pr. Leitmeritz. 1870.

Nach einleitenden Abschnitten über Kräftepaare und über Bewegung eines Körpers im Raume leitet der Verfasser die Gleichung des Centralellipsoides und der Hauptaxen ab, um daraus auf klare und einfache Weise die bekannte Theorie der Drehung eines Körpers, der sich frei um seinen Schwerpunkt oder einen anderen festen Punkt dreht, zu entwickeln. Neues enthält die Arbeit nicht. O.

A. Brill. Sul problema della rotazione dei corpi. Brioschi Ann. (2) III. 33-40. 1869.

Der Verfasser zeigt, wie man bei der Herleitung der Glei-

chungen für die Rotation eines Körpers um einen festen Punkt, die Einführung der drei Euler'schen Winkel vermeiden kann, mit deren Hülfe Jacobi (Sur la rotation d'un corps. Crelle J. XXXIX.) die neun Cosinus ausgedrückt hat. M.

D. Chelini. Nuova dimostrazione delle proprietà fondamentali degli assi conjugati di rotazione e degli assi permanenti. Atti dei Nuovi Lincei. 1869.

Der Zweck der kurzen Note ist, die betreffende Eigenschaft abzuleiten allein aus den Principien der gleichförmigen Rotationsbewegung um eine feste Axe und der Bewegung eines zusammengesetzten Pendels. Bei Behandlung der letzten Frage giebt der Verfasser den Namen Oscillationscentrum dem Punkte, wo die gewöhnliche Axe der Oscillationscentren der centralen Axe der Bewegungsquantität (asse centrale delle quantità di moto) begegnet, und bemerkt, dass dieser Punkt nur in speciellen Fällen mit dem zusammenfällt, dem man gewöhnlich diesen Namen giebt. Es scheint nach dieser Bemerkung in der That, als ob der erste Punkt eine Andeutung seiner mechanischen Eigenschaft anstrebe, während der zweite nur eine specielle Bezeichnung ist. Jg. (O.)

Lorenz. Om Centrifugalkraften. Tychsen Tidsskr. (2) VI. 49. 1870.

Der Verf. bemerkt, dass man zwei verschiedene Arten von Centrifugalkräften unterscheiden müsse, die actuelle und virtuelle, deren eine bei der absoluten, die andere bei der relativen Bewegung in Betracht kommt. Lässt man einen an einen Faden gebundenen Stein in einer verticalen Ebene schnell rotiren, so übt der Stein auf den Faden einen Zug aus, die Reaction der Centripetalkraft; dieser Zug ist eine actuelle Centrifugalkraft.

Betrachtet man bei der Rotation eines Punktes um eine feste Axe nur die relative Bewegung in einer Ebene, die durch die Axe und den Punkt geht, so muss man, wenn der Punkt in dieser Ebene im Gleichgewicht ist, eine virtuelle Kraft hinzufügen, die auf den Punkt wirkt, und die der auf denselben Punkt wir-

kenden Centripetalkraft das Gleichgewicht hält. Die hinzugefügte Kraft ist eine virtuelle Centrifugalkraft.

Hn. (Wn.)

C. Tychsen. Om Bevagelsen af den gyroskopiske Top. Tychsen Tidsskr. (2) V. 15 1869.

Nach einer Methode von Belanger (Cours de mécanique appliquée à l'école polyt. 1859) giebt der Verfasser die Theorie des gyroskopischen Kreisels, indem er dabei ein Theorem von Coriolis (Traité de mécanique des corps solides 1844) anwendet.

Hn. (Wn.)

H. Mylord. Om Centralellipsoider og principale Axer. Tychsen Tidsskr. (2) V. 167. 1869.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

Der Ort der Punkte, deren Centralellipsoide eine feste Ebene berühren, ist eine Fläche sechsten Grades.

Der Ort der Punkte, für deren Centralellipsoide

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \text{Const. ist,}$$

(unter $2a$, $2b$, $2c$ die Axen der Ellipsoide verstanden), ist eine Kugel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ hat seinen kleinsten Werth für das Centralellipsoid des Schwerpunktes.

Der Ort der Punkte, für deren Centralellipsoide

$$\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2} = \text{Const.}$$

ist, ist eine Oberfläche vierter Ordnung. Die Constante hat ihren kleinsten Werth für das Centralellipsoid des Schwerpunkts.

Der Ort der Punkte, deren Ellipsoide ein constantes Volumen haben, ist eine Oberfläche vierter Ordnung. Das Centralellipsoid des Schwerpunkts hat das grösste Volumen.

Alle Hauptaxen, die in einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene liegen, sind, falls die Ebene keiner der Hauptebenen des Schwerpunkts parallel ist, Tangenten eines Kegelschnitts.

Hn. (Wn.)

G. R. Dahlander. Om några tillämpningar i dynamiken af de geometriska rörelselagarne. Öfvers. af Förh. Stockh. 1870. 49-56.

Der Aufsatz enthält nicht, wie der Titel sagt, Anwendungen, sondern lässt im Gegentheil diejenigen Anwendungen vermissen, welche das Motiv einer zur Verfügung gestellten Ausdrucksform der Bewegungsgleichungen eines starren Körpers erklären könnten. Es werden nämlich als Coordinatenaxen die momentane Rotationsaxe, deren momentane Rotationsaxe und das gemeinsame Loth beider, als bestimmende Grössen die auf beide Rotationsaxen bezüglichen Rotationswinkel und Gleitungen eingeführt. Aus den entwickelten Relationen, deren Gebrauch zur Lösung von Aufgaben mit keinem Worte erwähnt ist, ergiebt sich der Satz: Die Orthogonalgeschwindigkeit (womit der Verfasser die Richtung der letztern Gleitung meint) ist normal zur gemeinsamen Berührungsebene der zwei konischen Flächen, durch deren Aufeinanderrollen die Bewegung des Körpers erzeugt wird. H.

W. Walton. On the stress exerced by a rigid body on a fixed point rigidly connected with the body, which is revolving spontaneously about the point. Quart. J. XI. 68-76. 1870.

Mz.

W. Walton. On the relation between the angular velocity about and the angular velocity of the instantaneous axes of a body revolving spontaneously about a fixed point, and of the axes of greatest and least mobility. Quart. J. XI. 1-15. 1870.

Mz.

E. Rolland. Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse. J. de l'Éc. Pol. Cah. 43. 1-56. 1870.

Die Construction isochroner Regulatoren beruht darauf, dass in der Gleichung $\frac{P}{g}\omega^2\ (\varrho+L\sin\alpha)\ L\cos\alpha=(PL+Ql)\sin\alpha$

der Werth von ω unabhängig sei von der Variabeln α. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass man auch die Grössen P, Q, L, l und ϱ variabel macht. In der vorliegenden Arbeit werden nun die früheren Methoden, um dies zu erreichen, kurz besprochen, und dann eine neu vom Verfasser ersonnene auseinandergesetzt. Die Arbeit bietet mehr physikalisches, als mathematisches Interesse. O.

B. Hydrodynamik.

J. Cockle. On the motion of fluids. Quart. J. X. 150-161. 1869. X. 289-311. XI. 156-176. 1870.

Eine elastische Flüssigkeit ist in einem unendlich langen, kreisförmigen, geraden Cylinder mit kleinem unveränderlichen Durchmesser enthalten. Durch Condensation und Dilatation treten keine äusseren Kräfte oder Temperaturveränderungen hinzu. Es werden die Bewegungszustände im Innern der Flüssigkeit discutirt. Der zweite Theil enthält allgemeine Betrachtungen über partielle Differentialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung, die auf die hydrodynamischen Gleichungen angewandt werden. Der dritte Theil endlich enthält Anwendungen auf sphärische Wellen und auf Fälle, wo der Druck variirt mit einer Potenz der Dichtigkeit. O.

J. Warren. Note on a fundamental theorem in hydrodynamics. Quart. J. X. 127, 128. 1869.

He.

W. J. M. Rankine. On the mathematical theory of combined streams. Trans. of London. XIX. 90-94. 1870.

Cly.

H. Moseley. On the uniform motion of an imperfect fluid. Phil. Mag. (4) XXXVII. 370-373. 1869.

Csy.

W. Veltmann. Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel. Schlömilch Z. XV. 451-463. 1870.

Während Herr Bertrand in seiner Polemik gegen H. Helmholtz die Richtigkeit der Resultate angriff, die letzterer in seiner bekannten Arbeit „über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen" (Borchardt J. LV. 25) abgeleitet hat [cf. über diesen Streit den vorigen Jahresbericht pag. 343]: unterwirft Herr Veltmann von einem anderen Gesichtspunkte aus diese Arbeit einer Kritik. Er sucht zu zeigen, die Helmholtz'schen Resultate seien leicht abzuleiten und enthielten gar nichts Merkwürdiges. — Referent kann sich den zum Theil ziemlich heftigen Angriffen gegen Herrn Helmholtz nicht anschliessen. Sind die Resultate von H. zum Theil auch leicht abzuleiten, so verlieren sie darum doch nicht an Wichtigkeit; und es ist eine andere Sache, ein vorhandenes Resultat, wie Herr V., auf anderem Wege abzuleiten, als das Resultat zum ersten Male aufzustellen. Ist auch, wie Herr V. meint, die von Helmholtz gegebene Zerlegung der Bewegung eine rein analytische, so ist es doch durch diese Zerlegung möglich geworden, bisher unbekannte Bewegungsformen der Flüssigkeiten aus den Differentialgleichungen abzuleiten, neue Integrale jener Gleichungen aufzustellen. Wn.

G. Kirchhoff. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Borchardt. J. LXX. 289-298. 1869.

Im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift (p. 341) ist über eine Arbeit von Helmholtz berichtet, die eine Methode angiebt, die Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahles zu bestimmen, falls alle Bewegung einer festen Ebene parallel ist. Herr K. giebt folgende Methode, die von Helmholtz aufgestellten Bedingungen zu erfüllen. Ist φ das Geschwindigkeitspotential, ist $\psi =$ Const. die zu $\varphi =$ Const. orthogonale Curvenschaar, und ist:

$$x + iy = z., \quad \varphi + i\psi = \omega,$$

so setze man

$$\frac{dz}{d\omega} = f(\omega) + \sqrt{f(\omega)f(\omega) - 1}$$

und wähle die Function $f(\omega)$ so, dass sie für einen gewissen constanten Werth von ψ und für ein gewisses Intervall von φ reell ist, und zwischen -1 und $+1$ liegt, so ist für diesen Werth von ψ und dieses Intervall von φ

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = f(\omega), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = 1;$$

innerhalb des obigen Intervalls von φ kann die dem obigen Werthe von ψ entsprechende Strömungslinie dann eine freie Grenze der Flüssigkeit sein. Herr K. erläutert ferner, wie das Gebiet von ω, resp. z zu begrenzen ist, damit ω eine eindeutige Funktion von z ist, die sich vollkommen bestimmen lässt. Für folgende Fälle:

$$f(\omega) = k + e^{-\omega} \quad (k \text{ ein positiver echter Bruch})$$

$$f(\omega) = k + \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

$$f(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 - e^{-\omega}}}$$

leitet Herr K. die Gestalt der freien Flüssigkeitsstrahlen ab; der erste von diesen Fällen bildet eine Verallgemeinerung des von Helmholtz behandelten Falles. Wn.

G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Borchardt. J. LXXI. 237-262. 1870.

Herr K. entwickelt zunächst aus dem Hamilton'schen Princip die Differentialgleichungen für die Bewegung eines starren Körpers von beliebiger Gestalt und beliebig vertheilter Masse in einer incompressiblen homogenen Flüssigkeit. Die Bedingungen bei Aufstellung der Differentialgleichungen sind folgende: Die Flüssigkeit, in der keine Reibung stattfindet, wird durch eine im Unendlichen liegende, geschlossene, feste Fläche begrenzt; Wirbelbewegungen sind nicht vorhanden, (so dass nach Helmholtz ein Geschwindigkeitspotential existirt.) Die Geschwindigkeiten ändern sich überall stetig mit den Coordinaten. Auf den Körper wirken Kräfte, die ein Potential haben, auf die Flüssigkeit wirken keine Kräfte. Die Bewegung des ganzen Systems ist aus dem Ruhe-

zustande dadurch hervorgegangen, dass auf den Körper Kräfte wirkten. Die unter diesen Bedingungen aufgestellten Differentialgleichungen, ursprünglich 18 mit 12 Bedingungsgleichungen, werden nun durch die Annahme vereinfacht, dass die Kräfte, die auf den Körper wirken, verschwinden. Für die vereinfachten Differentialgleichungen ergeben sich dann 7 Integralgleichungen. Eine weitere Vereinfachung tritt ferner durch die Annahme ein, dass die Oberfläche des Körpers eine Rotationsfläche und die Vertheilung in ihm symmetrisch zur Rotationsaxe ist. (Letztere Vereinfachung tritt auch ein, wenn der Körper kein Rotationskörper, sondern wenn er nur in Bezug auf zwei oder mehr Paare auf einander senkrechter Ebenen, die durch die Axe gehen, symmetrisch ist.) Nach Einführung der letzten Bedingungen ist es nun möglich, die Gleichungen vollständig zu integriren. Es ergiebt sich die Zeit als elliptisches Integral erster Gattung, in dem die Integrationsvariable die Geschwindigkeit u (parallel der Rotationsaxe) des Anfangspunktes des im Körper festen Coordinatensystems ist. Man kann daher diese Geschwindigkeit als elliptische Function der Zeit darstellen; auch die übrigen Unbekannten des Problems kann man als elliptische Integrale durch u ausdrücken.

Für einige Specialfälle lassen sich sämmtliche Unbekannte des Problems leicht als elliptische Functionen der Zeit ausdrücken. Einer dieser Fälle, der hier genauer discutirt wird, ist bereits von Thomson und Tait [Th. u. T. Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim, Seite 297. (Seite 264 der englischen Ausgabe)] behandelt; für diesen Fall muss man noch die weiteren Annahmen machen, dass der Körper um seine Axe nicht rotirt und dieselbe in einer festen Ebene bleibt. — Erwähnt mag noch werden, dass sich schon ohne die vereinfachenden Voraussetzungen über die Gestalt des Körpers und die Vertheilung der Masse in ihm aus den Differentialgleichungen beweisen lässt, dass es für jeden Körper 3 und im Allgemeinen nur 3 auf einander senkrechte Richtungen giebt, in denen er, ohne sich zu drehen, in der Flüssigkeit fortschreiten kann.

Wn.

A. Clebsch. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Clebsch Ann. III. 238-262. 1870.

Das Problem der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit wurde zuerst von Dirichlet mit besonderer Anwendung auf die Kugel (Monatsber. der Berl. Acad. 1852), sodann ganz allgemein von dem Verfasser behandelt (Crelle's J. LII.), sowie für Rotationskörper von Hrn. Hoppe (Pogg. Ann. XCIII.). Unter einem neuen Gesichtspunkt erschien das Problem in dem Buche von Thomson und Tait, indem vorzugsweise auf die Integration der Bewegungsgleichungen des Körpers Gewicht gelegt wurde, wobei denn der Einfluss der Flüssigkeitsbewegung sich nur durch gewisse Constante zu erkennen gab. Diesen Bewegungsgleichungen des Körpers gab Hr. Kirchhoff (Borchardt J. LXXI. s. p. 731.) eine elegante Form, und integrirte dieselben für diejenigen Fälle, in welchen ein gewisses lineares Integral bestand. Der Verfasser vorliegenden Aufsatzes verwandelt zunächst das System der 6 Kirchhoff'schen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Zeit explicite nicht enthalten, durch eine einfache Substitution in ein solches, dessen Multiplicator ausserdem 1 ist, so dass neben drei von Kirchhoff allgemein aufgestellten Integralen nun immer noch eines zu finden bleibt, um die Integration ausführen zu können. Sodann behandelt der Verfasser insbesondere den Fall, in welchem ein Integral durch eine quadratische Function der Variabeln, einer willkürlichen Constanten gleich gesetzt, sich darstellt, ein Fall, welcher die Kirchhoff'schen einschliesst. Es zeigt sich, dass ausser den Kirchhoff'schen Fällen noch einige andere existiren, in welchen die Integration gelingt; dabei involviren die durch das Princip der letzten Multiplicatoren gefundenen Integrale höhere algebraische Irrationalitäten. Cl.

E. Padova. Sul moto di un ellissoide fluido ed omogeneo. Tesi. Ann. d. Sc. Norm. Pisa. 1868/69.

Nachdem die Bestimmung der Potentialfunction eines homogenen Ellipsoids, dessen Punkte nach dem Newton'schen Gesetze wirken, für den Fall vorausgeschickt ist, dass die Coordinaten-

Axen nicht mit den Axen des Ellipsoids zusammenfallen, leitet der Herr Verfasser nach dem Hamilton'schen Principe die Differentialgleichungen für die Unbekannten des Problems in den verschiedenen Formen von Dirichlet, Riemann und Brioschi ab. Die Integration derselben wird nicht ausgeführt. Diese Differentialgleichungen zusammen mit den Integralgleichungen, die sich aus dem Princip der lebendigen Kraft, der Erhaltung der Flächen und der Erhaltung der Rotation ergeben, reichen aus, um einige allgemeine Theoreme zu beweisen, die sich auf die Verbindung zwischen der Bewegung der flüssigen Theilchen und der Form des Ellipsoids beziehen. Damit die Bewegung der Theilchen gleichförmig sei, müssen die Axen des Ellipsoids von constanter Grösse sein, und umgekehrt. Bei der genauen Untersuchung der Bewegungen, welche dem Ellipsoide seine Form erhalten, gelangt er hiernach zur Untersuchung der Fälle, für welche das Ellipsoid stabil seine Form erhält, eine Untersuchung, die sehr vereinfacht ist durch die von Riemann angestellten Betrachtungen, dass sie zusammengehöre mit der Untersuchung der Gleichgewichtslagen eines Punktes, der auf einer gewissen Oberfläche dritter Ordnung gelegen ist. Wenn das Ellipsoid eine stabile Gleichgewichtslage hat, so sind die Variationen, denen die Axen in Folge der Einführung einer sehr kleinen Kraft unterworfen sind, aus zwei Variationen zusammengesetzt, die dem Gesetz der Pendeloscillationen folgen. Dies Theorem führt den Herrn Verfasser dazu, die Bewegungen zu betrachten, bei denen die Axen periodischen und endlichen Variationen unterworfen sind; er findet, dass diese periodische Formveränderung zu einer periodischen Variation mit der Rotation der flüssigen Theilchen verbunden ist.

Jg. (O).

E. Padova. Del moto di un ellissoide in un fluido incompressibile ed indefinito. Battaglini G. VIII. 325-332. 1870.

Um die Bewegung des Körpers zu bestimmen, bestimmt der Verfasser die Bewegung einer Flüssigkeit, in welche ein fester unbeweglicher Körper eingetaucht ist, wenn die Punkte der Flüssigkeit von beschleunigenden Kräften angegriffen werden, die in

Richtung und Intensität einander gleich sind, und zwar für den Fall, dass der Körper ein dreiaxiges Ellipsoid ist.

O.

Bjerknes. Om den samtidige Bewaegelse af kugelformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum. Forh. Christiania. 1869. 205.

Die Arbeit enthält sehr ausführliche Entwickelungen in Bezug auf die Bewegung eines Systems von Kugeln in einer incompressiblen Flüssigkeit. Siehe auch „Om en Omsoetning af oscillatoriske Bewaegelser i progressive" von demselben Verfasser (Forhandlinger i Videnskabsselskabet i Christiania Aaret 1866. — Christiania 1869). Hn. (Wn.)

de St. Venant. Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique; et remarques sur les propagations du son et de la lumière, sur les ressauts; ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents. C. R. LXXI. 186-195. 1870.

Wirkt eine constante Kraft auf eine unveränderliche Masse, so wird der letzteren bekanntlich eine gleichförmig beschleunigte Geschwindigkeit ertheilt. Wächst aber die Masse, auf welche die constante Kraft wirkt, der Zeit proportional, so wird dieser Masse eine constante Geschwindigkeit ertheilt; ein Fall, der bei den Wellenbewegungen eintritt. Kennt man nun bei einer Wellenbewegung, die sich in einem prismatischen Raume fortpflanzt, in Folge einer auf die eine Endfläche wirkenden constanten Kraft, die Verschiebung des ersten Querschnitts während der Zeiteinheit, so kennt man damit die constante Geschwindigkeit der während der Zeiteinheit bewegten Masse. Setzt man das Product aus dieser Geschwindigkeit und der in Bewegung gesetzten Masse gleich der constanten bewegenden Kraft, so hat man eine Gleichung zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Auf diese Weise beweist Herr St. V. zuerst die bekannte

Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in elastischen [festen oder gasförmigen] Medien:

$$k = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

wo E der Elasticitätscoefficient, ϱ die Dichtigkeit ist, ferner die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen

$$k = \sqrt{\frac{G}{\varrho}},$$

wo G die Kraft ist, welche tangential auf die Grundfläche eines Prismas wirkt und die einzelnen Querschnitte in ihrer Ebene so verschiebt, dass die longitudinalen Fasern geradlinig bleiben und nach der Verschiebung mit ihrer ursprünglichen Richtung einen Winkel = 1 bilden.

Ferner wird aus demselben Princip abgeleitet die Lagrange'sche Formel für die Geschwindigkeit von Wasserwellen in einem horizontalen Kanal von überall gleicher Tiefe h und überall gleichem Querschnitt,

$$k = \sqrt{g.h};$$

hier bedeutet h die Tiefe, g die Constante der Schwerkraft. Für einen beliebigen veränderlichen Querschnitt des Kanals leitet Herr St. V. für k die Formel ab:

$$k = \sqrt{g\left(\frac{w}{l} + \frac{3}{2}\varepsilon\right)},$$

wo w der Flächeninhalt des beliebigen Querschnitts, l die Linie, in welcher derselbe die Wasserfläche schneidet, ε die Höhe der Welle ist.

Hieran knüpft Herr St. V. Betrachtungen darüber, was eintreten muss, wenn das Wasser in einem Kanal, in dem sich eine Wellenbewegung mit der Geschwindigkeit $k = \sqrt{gh}$ fortpflanzt, vor der Wellenbewegung nicht in Ruhe war, sondern vorwärts fliesst, namentlich falls die eigene Geschwindigkeit des Wassers U und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit k der Wellen entgegengesetzt gerichtet sind. Hier wird die Wirkung der Welle eine ganz verschiedene sein, je nachdem $U^2 > gh$ oder $U^2 < gh$; in dem letzteren Falle kann ein Rücksprung des Wassers stattfinden.

Wn.

J. Boussinesq. Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques. C. R. LXVIII. 905-906. 1869.

de Saint-Venant. Rapport sur un mémoire de M. Boussinesq relatif à la théorie des ondes liquides périodiques. C. R. LXX. 360-367. 1870.

J. Boussinesq. Note complémentaire au mémoire sur les ondes liquides périodiques. — Établissement de relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps fluide ou solide et ses pressions ou forces élastiques. C. R. LXXI. 400-402. 1870.

In den citirten Abhandlungen sind nur die Resultate einer grösseren Arbeit zusammengestellt. Wir geben die hauptsächlichsten dieser Resultate kurz an, indem wir uns einen genaueren Bericht nach dem Erscheinen der eigentlichen Arbeit vorbehalten.

Herr B. stellt für die Bewegung der Flüssigkeiten neue Differentialgleichungen auf, in denen nicht die Geschwindigkeiten der einzelnen Theilchen figuriren, sondern die Verrückungen, die jene Molecüle erfahren. Die Differentialgleichungen werden abgeleitet durch die Betrachtung des Gleichgewichts eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Kanten sehr klein sind. Die allgemeinen Gleichungen, in denen die Verrückungen der Ecken jenes Parallelepipedons zunächst beliebige waren, werden dann durch die Annahme vereinfacht, dass die Verrückungen nur sehr klein seien, und die so erhaltenen Gleichungen werden auf das Problem der Fortpflanzung von Wellen in der Flüssigkeit angewandt. Wird die Flüssigkeit durch zwei horizontale Ebenen begrenzt, während sie an den Seiten ins Unendliche ausgedehnt ist, und vollführt ein sehr kleiner Raum periodische Schwingungen, so breiten sich dieselben nach folgenden Gesetzen in der Flüssigkeit aus. Jedes Molecül der Flüssigkeit beschreibt eine Ellipse, deren Ebene vertical ist und durch den Mittelpunkt der Erschütterung geht. Die grosse Axe der Ellipse ist horizontal; die Ellipse geht an der Oberfläche in einen Kreis

über, am Grunde in eine gerade Linie. Die Wellenflächen sind nahezu Kreiscylinder; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist verschieden von der einer isolirten Welle. Die Amplitude der Bewegung ändert sich in derselben Horizontalebene von einem von der Cylinderaxe ausgehenden Radiusvector zum andern, ist aber für denselben Radiusvector der Quadratwurzel aus der Entfernung von der Axe umgekehrt proportional.

In der dritten der oben citirten Arbeiten werden neue Ausdrücke für die elastischen Druckkräfte angegeben; diese werden dargestellt 1) durch die Verrückungen, die ein Molecül erfahren, 2) durch die innere Energie Ψ, die ihrerseits wieder von folgenden Grössen abhängt: In einem kleinen rechtwinkligen Parallelepipedon, dessen Kanten ursprünglich den Coordinatenaxen parallel sind, werden nach den Verrückungen die Kanten andere Längen, sowie andere Richtung haben. Die innere Energie ist nun eine Function der Dilatationen der Kanten, sowie ihrer Richtungsänderungen. Die aufgestellten Ausdrücke sollen gleichmässig für feste und flüssige Körper gültig sein.

Wn.

Beech. Sur la théorie des ondes liquides périodiques. C. R. LXVIII. 1099-1101. 1869.

Für die Wellenbewegung in einer unendlich tiefen Flüssigkeit werden für die periodische Bewegung der einzelnen Molecüle einige Formeln ohne Beweis mitgetheilt; für eine endliche Wassertiefe ist es dem Verfasser noch nicht gelungen, die entsprechenden Formeln zu finden. Nach den obigen Formeln könnten sich die einzelnen Molecüle nur in Kreisen bewegen, nicht in Ellipsen, wie andere Autoren annehmen; am Grunde würde keine Bewegung stattfinden. — Wn.

J. Boussinesq. Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi. C. R. LXX. 33-36, 177-181, 1279-1283. 1870.

Bei der Theorie des Ausflusses von Wasser aus einer kleinen Oeffnung in dünner Wand unter constanter Druckhöhe kann man, wenn die Dimensionen der Oeffnung sehr klein sind gegen die

Dimensionen der Flüssigkeit, annehmen, dass ein Geschwindigkeitspotential φ existirt. Man nehme die Ebene der Oeffnung zur xy Ebene, zur z Axe die Normale dieser Ebene nach dem Innern der Flüssigkeit; die Geschwindigkeitscomponente parallel z $[-\omega]$ sei $= f(xy)$ für $z = 0$, wo f überall $= 0$ ist ausser für die Punkte der Oeffnung, so ist das Geschwindigkeitspotential durch folgende Bedingungen bestimmt: 1) φ erfüllt die Gleichung des Potentials, 2) die drei ersten Differentialquotienten von φ (die Geschwindigkeitscomponenten) sind im Innern der Flüssigkeit in hinreichender Entfernung von der Mündung sehr klein; 3) für $z = 0$ ist $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -f(xy)$. Diesen Bedingungen genügt folgender Ausdruck:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

ein Ausdruck, der noch andere Formen annehmen kann, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten $\xi\eta$ Polarcoordinaten einführt.

Die Function f muss, wenn die obige Formel mit der Erfahrung übereinstimmen soll, an den Rändern und in der Mitte der Mündung $= 0$ sein [weil die Randmoleküle, die gar keine Bewegung parallel z besitzen, eher die Mitte treffen, als die über der Mitte lagernden Moleküle dahin gelangen]. Endlich muss, wenn h die constante Druckhöhe ist, am Rande (wo ja $\omega = 0$) $u^2 + v^2 = 2gh$ sein, falls auf die Flüssigkeit nur der atmosphärische Druck wirkt; darin ist $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Herr B. bestimmt aus den fünf angegebenen Bedingungen die Form der Function für zwei Fälle: 1) wenn die Ausflussöffnung ein Rechteck ist, dessen Seiten parallel x und y, unter der weitern Annahme, dass parallel der einen Rechtecksseite (x) keine Bewegung stattfindet; 2) wird der Fall behandelt, dass die Ausflussöffnung ein kleiner Kreis ist.

Für den ersten Fall wird

$$f = \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(c + c'\frac{y^2}{b^2} + c''\frac{y^4}{b^4} + \cdots\right),$$

wo b die Breite der Oeffnung ist. Bricht man die Reihe bei c ab, so ergiebt die Bedingung, dass $v^2 = 2gh$ für die Ränder der Mündung ist:

$$c = \frac{3\pi}{2}\sqrt{2gh}.$$

Die Ausflussmenge wird dann $\frac{\pi}{5} 2b\sqrt{2gh} = 0{,}6283.\ 2b\sqrt{2gh}$, wodurch die contractio venae für diesen Fall der Erfahrung gemäss dargestellt wird.

Für die kreisförmige Mündung vom Radius R ist, wenn $r^2 = x^2 + y^2$:

$$f = \frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left(c + c'\frac{r^2}{R^2} + c''\frac{r^4}{R^4} + \cdots\right).$$

Hier nimmt Herr B. an, dass $c = 0$ sei und bricht die Reihe bei c'' ab; dann ergiebt sich

$$c' = \frac{3^2.5^2.7\pi}{628}\sqrt{2gh}.$$

Die Ausflussmenge ist:

$$\frac{c'}{12}\pi R^2 = 0{,}6566\pi R^2\sqrt{2gh}.$$

Die Abweichung des Contractionscoefficienten von dem durch die Erfahrung ermittelten ist hier grösser als im vorigen Beispiel, was auf Kosten der grösseren Reibung zu setzen ist. Beim Ausfluss von Gasen, wo die Reibung geringer ist, ist in der That der beobachtete Contractionscoefficient 0,65.

Die erwähnten Formeln haben den Mangel, dass in der ersten für $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$, in der zweiten für $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ f ungefähr den Werth $1{,}17\sqrt{2gh}$ annimmt, wodurch der Druck der Flüssigkeit geringer als der der Atmosphäre wird. Es wird daher als weitere Annäherung gesetzt:

$$f(y) = c\frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\left[1 + m\left(1 - k\frac{y^2}{b^2} + k'\frac{y^2}{b^4}\right)\right]$$

$$f(r^2) = c'\frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left[\frac{r^2}{R^2} + m_1\left(1 - k_1\frac{r^2}{R^2} + k'_1\frac{r^4}{R^4}\right)\right].$$

Die Bedingung, dass für diese Werthe von f die Ausflussmenge dieselbe sei wie für den Fall $m = 0$ oder $m_1 = 0$, liefert

Gleichungen zur numerischen Bestimmung der Coefficienten k, k', k_1, k'_1, wobei m und m_1 nahe $= 1$ gesetzt werden.

Die Ansicht von Navier, wonach in allen Punkten der Ausflussöffnung dieselbe Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, aber in verschiedener Richtung stattfindet, verwirft der Verfasser. Wn.

D'Estocquois. Note sur le mouvement des liquides. C. R. LXVIII. 1207-1209. 1869.

Unter der Annahme, dass ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, welches nur von zwei Coordinaten y und z abhängt, ist eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen:

$$\varphi = A e^{\alpha y} \sin \alpha \cdot z;$$

und es ist ferner die Geschwindigkeit parallel $y = \frac{d\varphi}{dy}$, die parallel $z = -\frac{d\varphi}{dz}$, während parallel x keine Bewegung des Wassers stattfindet. Nimmt man nun die xy Ebene als horizontale obere Grenze der Flüssigkeit, z vertical, so kann man durch die obige Formel den Ausfluss des Wassers unter constanter Druckhöhe darstellen und erhält für eine rechteckige Oeffnung, deren Seiten parallel x und y, eine contractio venae an den Seiten, die parallel y sind. Der Winkel, den die Randstrahlen mit der Verticalen bilden, ist nach den obigen Formeln, wenn h die Druckhöhe ist, $h\alpha$; die gesammte Geschwindigkeit ist $\sqrt{2gh}$, aber nicht parallel z.

Es ist somit, falls parallel x keine Bewegung stattfindet, aus den hydrodynamischen Gleichungen die Möglichkeit der contractio venae abgeleitet.

Aehnlich erklärt schon Navier die contractio venae dadurch, dass alle Strahlen dieselbe Geschwindigkeit, aber verschiedene Richtung der Geschwindigkeit haben. Wn.

de Saint-Venant. Rapport sur un mémoire de Mr. Maurice Lévy relatif à l'hydrodynamique des liquides homogènes à leur écoulement rectiligne et permanent. C. R. LXVIII. 582-590. 1869.

Die Arbeit des Herrn Lévy, von der hier nur die Resultate

mitgetheilt werden, beschäftigt sich mit dem Einfluss der Reibung auf die regelmässige Bewegung der Flüssigkeiten. Navier nimmt bekanntlich an, dass bei der Bewegung des Wassers zwei Theilchen auf einander eine dynamische Wirkung ausüben, die eine Function des Abstands beider Theilchen ist, multiplicirt mit der Geschwindigkeit, mit der sich beide Theilchen nähern oder von einander entfernen. Daraus ergiebt sich für die Reibung zweier Wasserschichten auf einander ein Ausdruck von der Form

$$E\frac{dv}{dn},$$

wo v die Geschwindigkeit ist, n die Normale beider Schichten, E eine Constante. Dupuit nimmt statt dessen eine Reihe, die nach Potenzen von $\frac{dv}{dn}$ fortschreitet. Herr Lévy verwirft die letztere Annahme und nimmt dafür an, die Reibung sei nicht nur von dem ersten, sondern auch von den höheren Differentialquotienten der Geschwindigkeit abhängig. Er theilt die Reibung zwischen 2 Schichten in zwei Componenten, eine zur Trennungsfläche normale und eine tangentiale; für beide setzt er Reihen, die die sämmtlichen Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten enthalten. Die Bedingung, dass diese Ausdrücke bei einer Aenderung des Coordinatensystems ungeändert bleiben, giebt eine Vereinfachung; es fallen z. B. alle graden Differentialquotienten fort. Die Formeln werden angewandt auf die Reibung, die in einem gleichförmig fliessenden Strom auf einer horizontalen Fläche in der Tiefe z stattfindet, falls die Breite sehr gross gegen die Tiefe ist. Hier ist die Componente der Reibung parallel x [d. h. parallel der Richtung, in der das Wasser fortfliesst]

$$=\frac{d}{dz}\cdot\left(E_0 u+E_1\frac{d^2u}{dz^2}+\cdots\right),$$

wo u die Geschwindigkeit des Wassers parallel x, E_0 und E_1 Constante sind.

Der Herr Verfasser bricht die Reihe beim zweiten Gliede ab und setzt, um die Gleichförmigkeit der Bewegung auszudrücken, diese verzögernde Kraft, [auf die Flächeneinheit bezogen] gleich der beschleunigenden Kraft Πiz; wo i das Gefälle,

Π das Gewicht der Volumeneinheit bedeutet, und findet durch Integration der Gleichung für die Geschwindigkeit die Formel

$$u = \frac{\Pi i z.^2}{2 E_0} + A \cos z. \sqrt{\frac{E_0}{E}} + B. \sin z. \sqrt{\frac{E_0}{E}} + C,$$

worin A, B, C willkürliche Constante sind.

Diese Formel stimmt, wenn man $\frac{E_0}{E}$ sehr klein annimmt, mit den von Bazin aufgestellten empirischen Formeln gut überein. Herr St. Venant bemerkt zu der Arbeit, dass dieselbe als ein gelungener Versuch zu betrachten sei, die Theorie mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung zu bringen, wenn man die Annahme der Regelmässigkeit der Bewegungen macht, dass es aber höchst zweifelhaft sei, ob diese Annahme der Wirklichkeit entspricht. Wn.

de Saint-Venant. Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope lorsque l'on tient compte des dérivées d'ordre supérieur des déplacements très-petits que leurs points ont éprouvés. C. R. LXVIII. 569-571. 1869.

Herr de St.-Venant ist durch die Arbeit des Herrn Lévy (siehe p. 741.) veranlasst worden, die höheren Derivirten auch bei den Formeln für den Druck im Innern eines elastischen Körpers noch zu berücksichtigen. Die vorliegende Arbeit enthält die dadurch gewonnenen Formeln. O.

P. Boileau. Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides. Liouville J. (2) XIV. 361-378. 1869.

P. Boileau. Mémoire sur la détermination du travail latent dans les systèmes à mouvements uniformes ou uniformément périodiques. C. R. LXX. 838-840. 1870.

P. Boileau. Nouvelles études sur les eaux courants. C. R. LXIX. 862-864. 1869.

Für die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen

fehlt es bisher noch an einer genügenden Theorie. Der Verfasser sucht die Grundzüge einer solchen aufzustellen, indem er den Begriff der inneren latenten Arbeit der Wassertheilchen einführt, durch welche ein Theil der Arbeit der Schwerkraft absorbirt wird, so dass nicht die ganze Schwerkraft zur Fortbewegung des Wassers verwandt wird. Da sich der Verfasser aber über die Natur der inneren latenten Bewegungen keine Vorstellungen bildet, so hat man keinerlei Anhalt zur Berechnung ihres Einflusses a priori. Dasselbe gilt von dem Einfluss der Reibung der Flüssigkeitstheilchen gegen einander und an der festen Wand. Es sind daher die Formeln des Verfassers als rein empirische zu betrachten. Die Formeln beziehen sich auf das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehende Wasservolumen, wenn bekannt sind: das Gefälle, die Dichtigkeit der Flüssigkeit, die mittlere Geschwindigkeit, der Theil der Schwerkraft, der zu den inneren latenten Bewegungen verwandt wird, etc.

In der letzten Arbeit giebt der Verfasser eine empirische Formel für die Abhängigkeit der Wasser-Geschwindigkeit v von der Tiefe z:

$$v = A - Bz^2 + Cz,$$

während man bisher $v = A - Bz^2$ annahm. Wn.

F. Grashof. Humphreys' und Abbot's Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen. Z. dtsch. Ing. XIII. 289-299. 353-363. 481-489. 1869.

Eine ausführliche Besprechung des Werkes von Humphreys und Abbot, verbunden mit einer Kritik der Zusätze, die H. Grebenau seiner Uebersetzung hinzugefügt hat. Namentlich wird die „experimentelle Theorie", wie die Herren Humphreys und Abbot ihre Arbeit genannt, mit den Resultaten der Rechnung in Verbindung gebracht. O.

H. Resal. Sur la question du mouvement relatif de l'eau dans les aubes de la roue Poncelet. C. R. LXIX. 1184-1185. 1869.

Um die Bewegung des Wassers in unterschlächtigen Rädern zu bestimmen, wird folgendes Problem behandelt: Es soll die

relative Bewegung eines Punktes bestimmt werden, der auf einer in einer Verticalebene liegenden Curve fällt, während die Curve sich gleichförmig um einen Punkt dieser Ebene dreht. Es werden die Differentialgleichungen angegeben, falls die Curve eine gerade Linie, ein Kreis oder eine beliebige Curve ist. Für den ersten Fall existirt ein Integral in geschlossener Form, für den zweiten Fall lässt sich die Gleichung durch eine Reihe integriren, die nach Potenzen der Zeit fortschreitet, während für den dritten (allgemeinen) Fall die Gleichung nur unter bestimmten Annahmen integrabel zu sein scheint. — Wn.

J. Boussinesq. Théorie des expériences de Savart, sur la forme que prend une veine liquide après s'être choquée contre un plan circulaire. C. R. LXIX. 45-48. 128-132. 1869.

Lässt man einen Flüssigkeitsfaden vertical gegen den Mittelpunkt einer kleinen ebenen Kreisscheibe fallen, so breitet sich die Flüssigkeit zu einer Rotationsfläche aus, deren Axe vertical ist und durch den Mittelpunkt der Scheibe geht. Ein Stück unterhalb der Scheibe zerfällt die Fläche in einzelne Tropfen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit langsam genug, so nähert sich die Flüssigkeit der Rotationsaxe und schliesst sich, ehe sie in Tropfen zerfällt. Diese Beobachtung von Savart unterwirft Herr B. der Rechnung unter folgenden Annahmen: Die Bewegung des Wassers auf der ganzen Fläche sei stationär, die sehr geringe Dicke der Flüssigkeitsmasse sei überall constant, die Bewegung in allen Meridianebenen sei dieselbe; auf die Flüssigkeit endlich mögen ausser der Schwere nur Capillarkräfte wirken, deren Intensität k^2C [k eine Constante, C die mittlere Krümmung der Fläche in dem betreffenden Punkte], und deren Richtung die Normale der Fläche ist. Es werden die beiden Differentialgleichungen des Problems aufgestellt, deren Integration für die Geschwindigkeit dieselbe Gleichung liefert, wie ohne die Wirkung der Capillarkräfte. Ausserdem ergeben sich zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Coordinaten jedes Punktes der Meridiancurve und dem Bogen jener Curve. Durch Discussion dieser Gleichungen werden die hauptsächlichsten Erschei-

nungen der Bewegung abgeleitet. Ausserdem wird untersucht, unter welchen Bedingungen die Gestalt der Fläche stabil ist. Für einen Specialfall werden endlich noch die erwähnten Differentialgleichungen näherungsweise integrirt und das Resultat mit der Savart'schen Beobachtung verglichen. Wn.

M. Lévy. Sur un système très simple de vanne à débit constant sous pression variable. C. R. LXIX. 1128-1132. 1869.

Um durch eine Schleuse bei beliebigem Zufluss des Wassers stets dieselbe Wassermenge hindurchfliessen zu lassen, schlägt Herr L. folgende Construction vor. Das Schutzbrett der Schleuse soll um eine horizontale Axe drehbar sein; stromabwärts von diesem Brett fliesst das Wasser in einen gemauerten Kanal, dessen Längsprofil am Grunde durch eine Curve begrenzt wird, die von dem Schleusenbrett ab allmählich steigt. Wird der Zufluss des Wassers grösser, so wird sich das anfänglich verticale Schleusenbrett in Folge des vermehrten Druckes drehen. Wäre der Boden des Abflusskanals horizontal, so würde jetzt durch die vergrösserte Oeffnung mehr Wasser abfliessen. Wegen der gekrümmten Gestalt des Kanals wird aber durch die Drehung des Bretts die Ausflussöffnung verkleinert. Herr L. stellt sich die Aufgabe, welches muss die Form der Bodencurve sein, damit bei variirendem Zufluss stets gleich viel Wasser abfliesst. Mit Hülfe von empirischen Formeln werden für die Erfüllung der geforderten Bedingungen zwei Gleichungen aufgestellt, aus denen man die Gestalt der Curve ableiten könnte. Herr L. bestimmt die Curve nur graphisch durch Construction der Kreise, deren Einhüllende jene Curve ist. Wn.

Challis. A new discussion of the mathematical theory of oceanic currents. Phil. Mag. (4) XXXIX. 18-32. 266-275. 1870.

Die zweite Arbeit ist eine Vervollständigung der ersten, die zum Theil irrthümlich war. Die Methode der Lösung basirt auf der gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichung:

$$(\alpha)\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

Der Verfasser setzt voraus, dass der Mond sich in der Ebene des Aequators bewege, indem er durch Annahme gewisser Winkelgeschwindigkeiten die Erde als ruhend betrachtet. Dadurch kann er die Flutbewegung als oscillatorisch betrachten, so dass $udx+vdy+wdz$ als vollständiges Differential $(d\varphi)$ angesehen werden kann. Zu diesen Principien nimmt der Verfasser ein neues hinzu, das in Folgendem besteht: Es sei (α) durch die Substitutionen $x=r\cos\lambda\cos\theta$, $y=r\cos\lambda\sin\theta$, $z=r\sin\lambda$ in Polarcoordinaten transformirt. Dies ergiebt:

$$\frac{d^2r\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\lambda}\cdot\frac{d^2r\varphi}{d\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2r\varphi}{d\lambda^2}-\frac{\operatorname{tang}\lambda}{r^2}\cdot\frac{dr\varphi}{d\lambda}=0.$$

Bezeichnet man diese Gleichung mit $\Phi=0$, so ist das neue Princip:

$$\frac{d\Phi}{dr}=0,\quad \frac{d\Phi}{d\theta}=0,\quad \frac{d\Phi}{d\lambda}=0.$$

Csy. (O.)

T. K. Abbott. On some propositions in the theory of tides. Phil. Mag. (4) XXXIX. 49-52. 1870.

Die Arbeit enthält elementare Beweise für folgende Behauptungen: 1) Wenn es keine Reibung giebt, würde unter dem Monde niedrig Wasser sein. 2) Die Reibung beschleunigt die Zeiten von hoch und niedrig Wasser. 3) Es giebt neben der oscillatorischen Bewegung des Wassers einen constanten Strom, der durch die Wirkung des Mondes hervorgerufen wird. 4) Die Reibung hat die Wirkung, die Länge des Tages zu vergrössern.

Csy. (O.)

Capitel 5.

Potentialtheorie.

P. G. Tait. On Green's and other allied theorems. Trans. of Edinb. XXVI. I. 69-84. 1870.

Der Verfasser ward ursprünglich geführt auf das Studium der Quaternionen durch Hamilton's bedeutungsvolles Operationszeichen

$$V = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

in dem i, j, k die Hamilton'schen Quaternionen bedeuten. Der Erfinder derselben hatte auf ihre weitgehende Anwendbarkeit in der Physik mehrfach hingewiesen (Lectures on Quaternions § 620). Aber zu dem Zwecke war es wünschenswerth, eine bestimmte Integration zu haben, die auf Quatertionen-Symbole anwendbar wäre; und dieser Mangel war von Hamilton noch nicht gehoben. Herr Tait hat durch einen einfachen, wenn auch nicht rein directen Process diese Lücke bis zu einem gewissen Grade ausgefüllt, so weit als die Anwendung der Quaternionen auf Fragen, die mit der Potentialtheorie in Verbindung stehen, es erfordert. Dadurch ist es ihm möglich geworden, sehr einfache Beweise für Green's Theorem und andere verwandte Sätze zu geben. Die Rechnung mit Quaternionen lässt sich in der Folge, ohne ihre eigenen Vortheile einzubüssen, auf mannigfache allgemeine Theorien anwenden, auf Anziehung, Hydrodynamik etc. Zu einem der allgemeinen Theoreme wäre der Verfasser bereits 1860 gelangt, wenn er einen im Quart. J. (Quaternion investigation of the potential of a closed circuit) behandelten speciellen Fall mit Hülfe der hier entwickelten Principien verallgemeinert hätte. Cly. (M.)

A. K. Grünwald. Zur Theorie des Potentiales. Schlömilch Z. XIV. 521-624. 1869.

Clausius hat in seiner bekannten Arbeit über das Potential einen ausführlichen Beweis für die bekannte Gleichung:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k_0$$

geliefert. Herr Gr. erhebt nun den Anspruch, in obiger Mittheilung einen ebenso strengen und bedeutend kürzeren Beweis zu geben; in Wirklichkeit beweist er aber nur Folgendes: Ist V das Potential eines beliebig vertheilten Agens von überall endlicher Dichtigkeit, und hat letztere innerhalb einer beliebig kleinen Kugel den constanten Werth k_0, so ist innerhalb dieser Kugel

$$\Delta V = -4\pi k_0.$$

Der Beweis hierfür lässt sich allerdings kurz genug fassen.

B.

J. Moutier. Sur la fonction potentielle et le potentiel. Nouv. Ann. (2) IX. 472-478 489-505. 1870.

Enthält eine elementare Darstellung der einfacheren Sätze aus der Potentialtheorie und der Elektrostatik, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der Leydener Flasche.

B.

E. Mathieu. Sur la généralisation du premier et du second potentiel. Liouville J. XV. 117-133. 1870.

Unter der Bezeichnung „erstes und zweites Potential" werden hier die Ausdrücke

$$v = \int \frac{dm}{r} \text{ und } w = \int r\,dm$$

verstanden; dm bedeutet das Massenelement eines Körpers; ferner ist $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, wo $x'\,y'\,z'$ die Coordinaten von dm und $x\,y\,z$ die eines beliebigen Punktes P sind. Wenn k die Dichtigkeit in P bezeichnet, so folgt aus der leicht zu erweisenden Relation $\Delta w = 2v$, dass $\Delta(\Delta w) = -4\pi k$ oder $= 0$ ist, je nachdem P innerhalb oder ausserhalb des Körpers liegt. In einer früheren Arbeit hatte Hr. Mathieu die Functionen v und w näher untersucht und speciell nachgewiesen, dass jede Function w, welche der Differentialgleichung vierter Ordnung $\Delta(\Delta w) = 0$ und ausserdem noch bestimmten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt, sich darstellen lässt als die Summe des

ersten und des zweiten Potentials einer und derselben mit Masse belegten Fläche, wobei jedoch die zu den beiden Potentialen gehörigen Massenbelegungen von einander verschieden sind.

In der vorliegenden Arbeit sind nun die so erhaltenen Resultate dahin verallgemeinert, dass für r^2 der Ausdruck

$$\frac{(x-x')^2}{A}+\frac{(y-y')^2}{B}+\frac{(z-z')^2}{C}$$

und entsprechend für Δ das Symbol

$$\delta = A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

gesetzt wird. Die Entwickelung der früher gefundenen Sätze für diesen allgemeineren Fall bietet keine irgendwie erheblichen Schwierigkeiten. Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Differentialgleichungen $\delta w = 0$ und $\delta(\delta w) = 0$ für die Wärme- und Elasticitätstheorie krystallinischer Körper dieselbe Rolle spielen, wie die Gleichungen $\Delta w = 0$ und $\Delta(\Delta w) = 0$ bei isotropen Medien. B.

E. Mathieu. Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide. Liouville J. (2) XIV. 378-421. 1869. C. R. LXIX. 1019-1021. 1870.

Setzt man

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

so ist die Bedeutung des Resultats der wiederholten Operation $\Delta\Delta u$ unmittelbar verständlich. Während nun die Theorie der Lösungen der Gleichung $\Delta u = 0$ und ihre Anwendung auf die Potentiale in der Lehre von der Anziehung, der Elasticität und der Temperaturbewegung als bekannt angenommen, die dahin gehörigen Sätze jedoch noch einmal zusammengestellt werden, besteht die gegenwärtige Arbeit darin, analoge Sätze für die Lösungen der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ zu entwickeln, und darauf die Berechnung des Gleichgewichts der Elasticität in einer deformirten Platte, welche zu eben jener Differentialgleichung führt, zu gründen. Hierbei führt der Verfasser den Begriff eines zwei-

ten Potentials ein. Bezeichnet nämlich r den Abstand zweier Körperelemente (abc) und (xyz), so ist

$$\Delta\frac{1}{r} = 0;\ \Delta r = \frac{2}{r};\ \text{also}\ \Delta\Delta r = 0,$$

und insofern dem ersten Potential $\int\frac{\varrho}{r}\partial w$ als zweites Potential die Grösse $\int\varrho r\,\partial w$ analog.

Zunächst wird von der bekannten Relation

$$\int v\,\Delta u\,\partial w - \int u\,\Delta v\,\partial w = \int v\frac{\partial u}{\partial n}\partial\sigma - \int u\frac{\partial v}{\partial n}\,\partial\sigma,$$

wo ∂w ein Körperelement, $\partial\sigma$ ein Element der Oberfläche, ∂n ein normales Linienelement nach der Aussenseite hin bezeichnet, ausgehend die analoge Formel entwickelt:

$$\int u\,\Delta\Delta u'\,\partial w - \int u'\,\Delta\Delta u\,\partial w = \int\left(u\frac{\partial\Delta u'}{\partial n} - u'\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right)\partial\sigma$$
$$+\int\left(\Delta u\frac{\partial u'}{\partial n} - \Delta u'\frac{\partial u}{\partial n}\right)\partial\sigma$$

Hiervon wird Anwendung gemacht auf den Fall $u' = r$. Dazu war es nöthig, den Punkt (abc), in welchem $\frac{1}{r}$ unstetig wird, durch eine um denselben beschriebene Kugelfläche abzuschliessen. Man findet alsdann:

$$\int r\,\Delta\Delta u\,\partial w = \int\left(r\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - \Delta u\frac{\partial r}{\partial n}\right)\partial\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)\partial\sigma - 8\pi u.$$

Statt r kann man nun eine Function u' von a, b, c setzen, welche der Gleichung $\Delta\Delta u' = 0$, bezogen auf a, b, c genügt, und auf der Innenseite stetig ist.

Unter den weiteren Sätzen sind die folgenden zu nennen:

Auf einer Fläche σ lässt sich immer eine Massenschicht, und zwar nur auf eine Weise, so vertheilen, dass das zweite Potential auf der Fläche einen gegebenen Werth hat.

Jede Function u, welche auf der Innenseite von σ der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt und neben ihren Differentialquotienten bis zur dritten Ordnung stetig ist, ist die Summe eines ersten und eines zweiten Potentials je einer Schicht auf der Fläche.

Es existirt immer eine, und zwar nur eine Function u, welche auf der Innenseite von σ der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt, in obigem Sinne stetig ist, und deren Werth nebst $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Fläche gegeben ist; desgleichen, wenn Δu statt $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben ist.

Genügt eine stetige Function von der Form

$$u = AR + B \cos\vartheta + C \sin\vartheta \cos\psi + D \sin\vartheta \sin\psi,$$

wo R Radiusvector, ϑ Breite, ψ Länge, A, B, C, D Constante für einen festen Anfangspunkt sind, auf der Aussenseite von σ der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für sehr grosse R, so ist sie die Summe eines ersten und eines zweiten Potentials je einer Schicht auf der Fläche.

Es wird dann weiter von der Gestaltung der Formeln und Sätze in Anwendung auf die Ebene gehandelt, und schliesslich die Berechnung der zwei Potentiale durch Reihenentwickelung beim Gleichgewicht der Elasticität in einer kreisförmigen und einer elliptischen Platte durchgeführt. H.

DE SAINT-VENANT. Sur un potentiel de deuxième espèce, qui résout l'équation aux différences partielles du quatrième ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes. C. R. LXIX. 1107-1110. 1869.

Bei der Lösung des Problems des Gleichgewichts elastischer Körper sind Differentialgleichungen von folgender Form zu lösen:

$$1)\quad a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}2)\quad & a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ & + b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ & + c\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Die Gleichung 1), welche für $a = b = c$ in die Gleichung des Potentials übergeht, wird erfüllt durch:

$$\theta = \iiint \frac{f(\alpha\beta\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{\sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}}}.$$

Die durch die Gleichung 2) bestimmte Function nennt Lamé für den Fall $a=b=c$ Potential der zweiten Gattung. Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$u = \iiint f(\alpha\beta\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \sqrt{\left(\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}\right)}.$$

In beiden Integralen ist $f(\alpha\beta\gamma)$ eine willkürliche Function; die Integration ist auszudehnen über alle Elemente eines beliebigen Körpers. Wn.

W. v. Bezold. Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. Pogg. Ann. CXLI. 91-94. 1870.

Da ein leuchtender Punkt von der Intensität i ein Flächenelement, dessen Normale mit der Verbindungslinie den Winkel α bildet, in der Entfernung r mit der Helligkeit beleuchtet:

$$H = \frac{i}{r^2}\cos\alpha,$$

so lässt sich H sowohl für einen, als für eine Anzahl leuchtender Punkte ebenso darstellen, wie die Anziehungscomponente nach irgend einer Richtung sich durch das Potential darstellen lässt:

$$H = \frac{\partial U}{\partial n};$$

hier ist n die Normale des Flächenelements, U der Ausdruck des Potentials, das man erhält, wenn man die leuchtenden Punkte als materielle betrachtet, deren Massen den Intensitäten der Lichtquellen proportional sind. Aus diesem Ausdruck lassen sich für die Lichtintensität analoge Sätze ableiten, wie in der Potentialtheorie, wobei den Niveauflächen Flächen gleicher Helligkeit entsprechen. Wn.

C. Neumann. Zur Theorie des Potentiales. Clebsch Ann. II. 514. 1870.

Ziehen sich zwei materielle Punkte in einer Ebene proportional ihren Massen, umgekehrt proportional ihrer Entfernung

an, so lässt sich eine Kreisperipherie so mit Masse belegen, dass die Wirkung derselben auf äussere (innere) Punkte identisch ist mit der Wirkung eines beliebigen inneren (äusseren) Punktes von bestimmter Masse. Dieser Satz ist ohne Beweis mitgetheilt, und seine Erweiterung nicht nur auf den Raum, sondern auch auf eine beliebige einfache Mannigfaltigkeit angedeutet.

B.

E. Padova. Sopra due teoremi del Sgr. Neumann. Battglini G. VIII. 296-301. 1870.

Herleitung der in dem vorangehenden Referat angegebenen Sätze und ihrer Verallgemeinerung für n-fache Mannigfaltigkeit.

B.

F. Lucas. Nouvelles propriétés de la fonction potentielle. C. R. LXX. 1397-1400. 1870.

Der Verfasser theilt die Lösung der folgenden Aufgabe, jedoch ohne Beweis mit: Es sei ein System von N Atomen gegeben; die Wirkung der äusseren und inneren Kräfte sei so beschaffen, dass ein Potential existirt und das System im Gleichgewicht ist. Man soll nun die Bewegung jedes einzelnen Atoms in geschlossener Form ermitteln, wenn dasselbe um eine beliebige Strecke aus seiner Ruhelage verschoben wird und eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit erhält, vorausgesetzt, dass jene Verschiebungen unendlich klein seien, im Vergleich mit der gegenseitigen Entfernung der Atome.

Der Verfasser beabsichtigt eine ausführliche Mittheilung in Liouville's J. zu geben. B.

J. Somoff. Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface. Bull. de St. Pétersbourg XIII. 1-5. 1869.

Laplace hat den Satz aufgestellt: „Die Resultante der Anziehung der Punkte einer sehr dünnen Schicht auf einen Punkt der Oberfläche — die Anziehung erfolgt umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung — liegt in der in dem Punkte er-

richteten Normale und ist gleich dem Product der Dichtigkeit in dem Punkte in den Umfang des Kreises, dessen Radius gleich der Dicke der Schicht ist, vorausgesetzt, dass nur die Punkte berücksichtigt werden, die sich von dem angezogenen Punkte erreichen lassen, ohne eine der Begrenzungsflächen zu treffen." Diesen Satz hat Chasles benutzt, um die Anziehung einer dünnen Schicht zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden zu bestimmen. Hr. Résal hat bei Gelegenheit der Reproduction der Chasles'schen Ableitung in seinem „Traité élém. de Méc. céleste. Paris 1865" bemerkt, dass die meisten Beweise desselben ungenau seien, indem sie auf der Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse von derselben Ordnung, wie die Dicke der Schicht, beruhten und hatte einen Beweis gegeben, der diesen Uebelstand vermeidet, aber sehr lang ist. Der Verfasser giebt nun hier einen kürzeren Beweis (der von Hrn. Résal ist Ref. leider unbekannt geblieben, da ihm das Werk nicht zugänglich war, indem er zwei Fälle unterscheidet: 1) den Fall, wo alle Schnitte der Oberfläche, die den angezogenen Punktenthält, mit Normalebenen convexe Curven nach Aussen sind, und 2) wo alle diese Schnitte concave Curven sind. O.

F. Mertens. Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. Borchardt J. LXX. 1-9. 1869.

Mit Hülfe einer von Jakobi herrührenden Formel zur Transformation vielfacher Integrale gelingt es dem Verfasser das dreifache Integral für das Potential in ein einfaches umzuwandeln. Dasselbe nimmt unmittelbar die bekannte, von Dirichlet herrührende Form des Potentials an, sobald das Ellipsoid auf seine Hauptaxen bezogen wird. Die Kenntniss der letzteren ist jedoch gar nicht nöthig, vielmehr lässt sich die Rechnung vollständig durchführen, sobald nur der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten in den Mittelpunkt des Ellipsoids fällt.

B.

L. Kronecker. Zur Potentialtheorie. Borchardt J. LXX. 246-48. 1869

Herleitung folgenden Satzes: Der Raum t sei mit Masse von

beliebiger Dichtigkeit f und der Raum θ mit Masse von der Dichtigkeit „Eins" erfüllt; das Potential beider Massen sei Φ, und Φ_1, Φ_2, Φ_3 seien die nach den rechtwinkligen Axen genommenen Componenten der Attraction. Denkt man sich nun die Masse θ in der Richtung der x-Axe unendlich wenig verschoben und bezeichnet das Verhältniss der dadurch bewirkten Aenderung von Φ_1 in der Grösse der Verschiebung selbst durch Φ_{11}, und die analogen auf die anderen beiden Axen bezüglichen Ausdrücke durch Φ_{22}, Φ_{33}, so ist die Summe $\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}$ gleich der mit -4π multiplicirten Masse desjenigen Theiles von t, welcher mit dem Raum θ zusammenfällt.

Der Beweis dieses Satzes geht von einer einfachen Identität aus und macht über die Dichtigkeitsfunction f nur diejenigen Voraussetzungen, welche für die Existenz des Potentials und seiner ersten Ableitungen nothwendig sind. Setzt man auch noch die Existenz der zweiten Ableitungen voraus, dann kann man aus jener Relation die bekannte partielle Differentialgleichung für das Potential herleiten, indem man den Raum θ unendlich klein werden lässt. B.

A. Cayley. Note on the attraction of ellipsoids. Not. of Astr. S. XXIX. 254-257. 1869.

Untersuchung der Attraction gewisser Theile einer Kugelschale von gleichförmiger Dicke in Bezug auf einen Punkt der äusseren Oberfläche; die Erläuterung zu dem Satze, dass die Anziehung einer unendlich dünnen Schale, die durch zwei ähnliche und ähnlich liegende Ellipsoide begrenzt ist, in Bezug auf einen Punkt der äusseren Fläche, die Richtung der Normale in diesem Punkte hat und gleich der doppelten Anziehung einer unendlichen Platte ist, deren Dicke gleich der normalen Dicke der Schale in diesem Punkte ist.

Cly. (M.)

F. Grube. Zur Geschichte des Mac-Laurin'schen Satzes betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide. Schlömilch Z. XIV. 261-266. 1869.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. p. 29.

F. Grube. Ueber die Anziehung der von einer Fläche zweiten Grades und von zwei zu deren Axen senkrechten Ebenen begrenzten Körperstumpfe. Schlömilch Z. XIV. 267-289. 1869.

Der Verfasser hat folgende Attractionsprobleme auf elliptische Integrale zurückgeführt: 1) die Componenten einer paraboloidischen Schale, welche den Hauptaxen ihres elliptischen Querschnitts parallel sind, 2) die Componenten einer unendlich dünnen Schale, welche von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades und zwei zur Axe derselben senkrechten Ebenen begrenzt wird, 3) die senkrecht zum Querschnitt gerichtete Componente eines von zwei parallelen Ebenen und von einer centrischen Oberfläche zweiten Grades begrenzten Körpers, wenn der angezogene Punkt in der durch den Mittelpunkt der Fläche senkrecht zu ihrer Axe gelegten Ebene liegt, 4) die Componenten einer Kugelschale. Die Resultate sind auf folgenden Ausdruck für das Potential einer unendlich dünnen elliptischen Scheibe:

$$V = 2k\sqrt{pp'}\,dx \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sqrt{s-(x-a)^2-\dfrac{b^2 s}{s+pk}-\dfrac{c^2 s}{s+p'k}}}{\sqrt{(s+pk)\,(s+p'k)}}\cdot\frac{ds}{s}$$

gegründet, der vermittelst der Dirichlet'schen Methode des discontinuirlichen Factors auf demselben Wege erlangt ist, den Dirichlet zur Bestimmung des Potentials eines Ellipsoids eingeschlagen hat. O.

R. del Grossò. Memoria sull' attrazione degli sferoidi. Battaglini G. VII 137-151. 193-209. 1869. VIII. 97-128. 206-221. 333-365. 1870.

Die vorliegende grössere Arbeit zerfällt in zwei Theile. Der erste Theil handelt von der Anziehung der Sphäroide bei gleichförmiger Dichtigkeit. Nach Ableitung der bekannten Sätze über das Potential einer Masse bezüglich eines Punktes werden die allgemeinen Formeln zur Berechnung des Potentiales einer Masse von gleichförmiger Dichtigkeit aufgestellt. Es werden sodann die Anziehungscomponenten eines von einer geschlossenen Fläche zweiten Grades begrenzten Körpers, wie auch die

einer sphärischen Masse und eines Cylinders mit unendlicher Axe bestimmt, und endlich auch die eines Körpers, der von einer allgemeinen Fläche zweiten Grades begrenzt ist. Nachdem im Weiteren die Sätze von Mac Laurin, Jvory und Newton über die Anziehung confocaler Ellipsoide bewiesen, werden dieselben zur Herleitung der Formeln für die Anziehung eines homogenen Ellipsoides benutzt. Den Schluss dieses Theiles der Arbeit bilden einige Chasles'sche Sätze über Niveauflächen, die mit Hülfe eines Satzes von Green bewiesen werden. Der zweite Theil behandelt die Anziehung eines Körpers von variabler Dichtigkeit, der sich nur wenig von einer Kugel unterscheidet, mit Hülfe der Kugelfunctionen. Neue Gesichtspunkte enthält die Arbeit nicht, sondern ist nur eine zusammenhängende Darstellung von Bekanntem.

O.

O. Schlömilch. Ueber die Anziehung eines Ellipsoids auf einen äusseren Punkt. Schlömilch Z. XV. 216. 388. 1870.

Für den Fall, dass die drei Axen des anziehenden Ellipsoids wenig von einander verschieden sind, werden mittelst des Jvory'schen Satzes die Anziehungscomponenten in endlicher Form dargestellt. — Die zweite Note enthält die Berichtigung eines Schreibfehlers.

Wn.

E. Padova. Sul moto di un ellissoide fluido ed omogeneo. Ann. d. Sc. Norm. Pisa. 1868/69.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. B. p. 734.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

R. Wolf. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich. I. Bd. 1869-1870.

Das Werk enthält in den Abschnitten XXV.-XXXII. die Elemente der mathematischen Physik; die Anmerkungen zeichnen sich durch einen Reichthum an literarisch-historischen Notizen aus. M.

de Saint-Venant. Rapport sur cinq mémoires de Mr. Lucas intitulés: Recherches concernant la mécanique des atomes. C. R. LXX. 311-321. 1870.

Ein Bericht über die Arbeiten des Herrn Lucas, deren Resultate bereits im vorigen Jahresberichte besprochen sind. (Siehe Fortschr. d. Math., Band I. p. 319). Wn.

F. Lucas. Etude sur la mécanique des atomes. Liouville J. (2) XV. 137-192. 1870 C. R. LXVIII. 1313-1316. 1869. C. R. LXX. 509-511. 1870.

In der vorliegenden Arbeit wird die „Mechanik der Atome" von einem etwas anderen Gesichtspunkte aus behandelt, als in den früher besprochenen (siehe oben). Der Verfasser betrachtet eine begrenzte Anzahl von Atomen, deren Dimensionen gegen ihre gegenseitige Entfernung verschwindend klein sind, so dass

man die Masse derselben in einem Punkte concentrirt denken kann. Masse und Coordination sind für jeden Punkt gegeben. Zwischen je zwei Atomen wird eine anziehende oder abstossende Wirkung angenommen, die proportional den Massen und einer beliebigen Function der Entfernung ist; es wird ferner vorausgesetzt, dass das System unter der Wirkung der genannten Kräfte im Gleichgewicht ist. Werden nun die sämmtlichen Atome aus ihrer ursprünglichen Lage ein wenig verschoben, so ändert sich ihre gegenseitige Wirkung. Man kann die neuen Kräfte nach Potenzen der relativen Verrückung entwickeln und hat dabei wegen der Kleinheit der Verrückungen nur die ersten Potenzen zu berücksichtigen. Die constanten Glieder der Entwickelung verschwinden wegen der Gleichgewichtsbedingungen. — Die erwähnten, durch die Verrückung hervorgerufenen Kräfte werden in zwei Theile getheilt, deren erster (effort de déplacement) dadurch entsteht, dass das Atom, dessen Bewegung betrachtet werden soll, allein verschoben wird, während alle andern fest bleiben; der zweite Theil (effort de déformation) entsteht, wenn das Atom fest bleibt, alle andern sich bewegen. Die Componenten der ersten Kraft sind lineare Functionen der Componenten der Verrückung des Atoms. Daraus folgt, dass, wenn das verschobene Theilchen sich auf einer Kugel bewegt, die Kräfte die Radienvectoren eines Ellipsoids bilden. Auf die Hauptaxen dieses Ellipsoids bezogen sind die Componenten u, v, w der Kraft:

$$u = -H.x, \quad v = -Ky, \quad w = -Lz.$$

Hier bedeuten H, K, L Constante, x, y, z die Projectionen der Verrückung auf die Axen. Sind die drei Constanten (physische Parameter genannt) positiv, so sucht die Kraft das betrachtete Atom in seine frühere Lage zurückzuführen; das Gleichgewicht ist stabil. Sind jene Parameter $= 0$, so ist das Gleichgewicht indifferent; sind sie alle drei negativ, so ist das Gleichgewicht labil. Diese drei Fälle entsprechen den drei Aggregatzuständen.—

Um die Bewegung des Atoms zu erhalten, hat man, wenn man von den Hauptaxen zu einem beliebigen Coordinatensystem zurückkehrt, drei Differentialgleichungen von folgender Form zu integriren:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = A.x + P.y + R.z.$$

Diese lassen sich in bekannter Weise auf die eine zurückführen:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = -s \cdot E,$$

deren Integrale für die verschiedenen Fälle, wo s positiv, Null oder negativ ist, bekannt sind. s selbst ist hierbei die Wurzel einer Gleichung dritten Grades, deren Coefficienten aus A, P, R etc. zusammengesetzt sind. Diese Gleichung, die sich leicht in Form einer Determinante darstellen lässt, hat drei reelle Wurzeln, die vorher erwähnten physischen Parameter. Es wird die Berechnung dieser Parameter für den Fall gegeben, dass die gegenseitige Wirkung zweier Atome irgend einer (positiven oder negativen) Potenz der Entfernung proportional ist.

Aehnliche Gleichungen, wie oben, erhält man für die Bewegung der Atome, wenn eins derselben fest, alle übrigen beweglich sind; nur hat man hier $3(N-1)$ Gleichungen, und die rechte Seite jeder Gleichung ist die Summe von $3(N-1)$ linearen Gliedern, falls N die Anzahl der Atome des Systems ist. Es tritt hier dieselbe Hülfsgleichung für E auf, nur dass s hier die Wurzel einer Gleichung vom Grade $3(N-1)$ ist. Auch die Wurzeln dieser Gleichung, die dynamische Parameter genannt werden, sind sämmtlich reell; ihre Werthe sind unabhängig von der Richtung der Coordinatenaxen. — Es wird zum Schluss gezeigt, dass, wenn alle N Atome eine Verrückung erfahren, die Zahl der in die Lösung eintretenden willkürlichen Constanten sich auf $6N$ reduciren lässt.

Wir bemerken dazu, dass sowohl die Methode, als die Resultate nur zum Theil Neues enthalten, da analoge Betrachtungen in vielen Problemen der Molecularphysik schon angestellt sind. Die entwickelten Resultate gestatten ferner noch keine Anwendung auf wirkliche physikalische Fragen.

Wn.

LERAY. Théorie nouvelle de la gravitation. C. R. LXIX. 615-621. 1869. Inst. 1 sect. XXXVII. 331-334. 1869. Mondes (2) XXI. 269-273. 1869.

Lecoq de Boisbaudran. Note sur la théorie de la pesanteur. C. R. LXIX. 703-705. 1869. Inst. 1 sect. XXXVII. 333-334. 1869.

Herr Leray stellt eine Hypothese zur Erklärung der Attraction auf. Er nimmt einen Aether an, der in allen Punkten von gleichen Strömen nach allen Richtungen erfüllt ist. Durch die Einwirkung dieses Aethers beim Eindringen in die Körper sucht er Magnetismus, Wärme und Licht der Gestirne zu erklären. Er ist durch philosophische Betrachtungen zu seiner Hypothese gelangt. Herr Lecoq de Boisbaudran ist zu einer ähnlichen Hypothese gekommen, die in der Note kurz angedeutet wird.

O.

W. C. Wittwer. Beiträge zur Molecularphysik. Schlömilch Z. XV. 32-116. 1870.

Fortsetzung der Arbeit, die in den Fortschr. d. M. I. 348-349 besprochen ist. Der Verfasser fasst das Resultat seiner Untersuchungen selbst kurz in folgenden Sätzen zusammen: 1) Es giebt zweierlei träge, materielle Substanzen in der Natur, Aethertheilchen und Massentheilchen. 2) Gleichartiges stösst sich ab; Ungleichartiges zieht sich an. 3) Beide Arten von Kräften sind dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

O.

A. Beer. Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. (Herausgegeben von Giesen.) Leipzig 1869.

Das vorliegende Buch will die im Titel angegebenen Theorien nicht erschöpfen, sondern nur die wichtigsten Resultate derselben auf dem kürzesten Wege ableiten. Im ersten Theile wird demgemäss nur das elastische Gleichgewicht homogener isotroper (nicht krystallinischer) Körper behandelt, sowie die Oscillationen isotroper Medien, falls die Amplitude der Schwingung nur von einer Coordinate abhängig ist. Der experimentellen Prüfung der Theorie werden besondere Capitel gewidmet.

Im zweiten Theile wird die Theorie der Capillarität verhältnissmässig ausführlicher behandelt, als die der Elasticität im

ersten. Nach einer Auseinandersetzung der Grundzüge der Gauss'schen Theorie folgt die Anwendung dieser Theorie auf ein System, das nur aus einer Flüssigkeit und einem festen Körper besteht, auf die Aenderung des hydrostatischen Druckes durch Capillarität etc. Zum Schluss wird das Gleichgewicht eines aus zwei Flüssigkeiten und einem festen Körper bestehenden Systems ausführlich behandelt und auf die bekannten Plateau'schen Versuche angewandt. Wn.

de Saint-Venant. Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation dans des solides ductiles au de là des limites de leur élasticité. C. R. LXX. 309-311. 1870.

Herr Tresca hat experimentell gezeigt, dass die Coefficienten des Widerstandes, den ein fester Körper dem transversalen Gleiten der einzelnen Schichten, und des Widerstandes, den er einer Crompression entgegensetzt, gleich sind, wenigstens für den Fall, wo die Elasticitätsgrenze überschritten ist. Herr St.-V. beweist die Gleichheit beider Coefficienten theoretisch, indem er die Arbeit berechnet, die erforderlich ist, um durch tangentiale oder normale Druckkräfte einem rechtwinkligen Parallelepipedon dieselbe Deformation zu ertheilen. Die Gleichheit der geleisteten Arbeit bedingt die Gleichheit der Coefficienten.

Wn.

de Saint-Venant. Sur un potentiel de deuxième espèce, qui résout l'équation aux différences partielles du quatrième ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes. C. R. LXIX. 1107-1110. 1869.

Siehe Abschnitt X., Cap. 5. p. 752.

E. Mathieu. Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide. Liouville J. (2) XIV. 378-421. C. R. LXIX. 1019-1021. 1869.

E. Mathieu. Sur le mouvement vibratoire d'une plaque.
Liouville J. (2) XIV. 241-259. 1869.

In der ersten Abhandlung wird die Berechnung des Gleichgewichts einer deformirten circulären und elliptischen Platte auf die vorausgehende Theorie des zweiten Potentials gegründet (siehe Abschn. X. Cap. 5, p. 752), in der zweiten die Vibration einer solchen berechnet. Die zuerst von Poisson bewiesene Differentialgleichung für letztere lautet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+a^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=0,$$

wo $a^2=\frac{k^2h^2}{\varrho}$, und zwar h die Dicke, ϱ die Dichtigkeit, k eine von beiden Elasticitätscoefficienten abhängige Constante, w die normale Verschiebung ist. Vor Specialisirung der Begrenzung werden einige Formeln entwickelt. Die Amplitude einer einfach periodischen Schwingung u wird durch eine lineare Gleichung vierter Ordnung bestimmt, die sich in zwei Gleichungen zweiter Ordnung von gleicher Form zerlegen lässt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=l^2 v;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-l^2 u,$$

so dass also v immer eine zweite Lösung liefert. Man kann dann durch die Substitution

$$u=U+V;\ v=U-V$$

zwei Gleichungen, eine für U allein, eine für V allein, ableiten, deren Integrale dann die gewünschte Form für u ergeben. Sind überhaupt u, u' zwei Speciallösungen, so ergiebt sich mittelst einiger partiellen Integrationen:

$$(l^4-l'^4)\iint uu'\,\partial x\,\partial y$$
$$=\int\partial s\left(u'\frac{\partial\Delta u}{\partial n}-\Delta u\frac{\partial u'}{\partial n}-\Delta u'\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial\Delta u'}{\partial n}\right),$$

wo zur Linken über die Platte, zur Rechten über den Umfang zu integriren ist. Diese Grösse verschwindet in den 4 Fällen, wo auf dem Umfang durchgängig

$$1.\ u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0;$$

$$2.\ \Delta u = 0,\ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0;$$

$$3.\ u = 0,\ \Delta u = 0;$$

$$4.\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0$$

ist. Hierin sind die möglichen Grenzbedingungen ausgedrückt. Der erste Fall ist der einer Platte mit eingefugtem Rande. Auf ihn lässt sich der zweite leicht zurückführen, weil $\Delta u = l^2 v$ und v Lösung der Gleichung ist. Der dritte Fall ist dem Ausdruck zufolge identisch mit dem einer vibrirenden Membran (s. Fortschr. d. M. I. 354.)

Die Berechnung beschränkt sich auf den ersten Fall. Sie wird zuerst an einer kreisförmigen Platte mit Anwendung von Polarcoordinaten r, α ausgeführt, indem Kreise $r =$ const. und Radien $\alpha =$ const. die Knotenlinien ergeben. Das Resultat ist

$$u = (A\cos n\alpha + B\sin n\alpha)\ \{CR(r, l^2) + DR(r, -l^2)\},$$

wo n willkürliche ganze Zahl,

$$R(r, l^2) = r^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k (\tfrac{1}{2} lr)^{2k}}{1.2\ldots k(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$$

ist, und die Constanten $\frac{D}{C}$ und l durch die Grenzbedingungen zu bestimmen sind.

Die elliptisch begrenzte Platte hat zu Knotenlinien confocale Ellipsen und Hyperbeln. Es werden diesen entsprechende Coordinaten eingeführt, übereinstimmend mit der erwähnten Berechnung der Vibration einer Membran. Die Darstellung geschieht durch Reihen, deren Coefficienten jedoch kein einfaches Gesetz erkennen lassen. H.

L. F. Ménabréa.*) Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique. Turin 1868.

Betrachtet man ein System von materiellen Punkten, die unter

*) Die Redaction bekam erst nach Schluss des Jahrgangs Kenntniss von dieser Arbeit. Das Referat wird daher jetzt nachgeholt.

einander durch Verbindungen zusammenhängen, so ist die Frage, wie sich die Wirkungen äusserer angreifender Kräfte auf die einzelnen Bänder für den Fall des Gleichgewichts vertheilen, im Allgemeinen unbestimmt. Diese Unbestimmtheit hört auf, sobald man auf die Elasticität der Verbindungen zwischen den Punkten des Systems Rücksicht nimmt. Jedoch bietet die Bestimmung dieser „inneren Kräfte“ insofern Schwierigkeiten, als man in jedem Falle eine besondere Hypothese aufstellen muss, um die zur Bestimmung der Unbekannten noch fehlenden Gleichungen zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein allgemeines Princip aufgestellt, von dem aus man stets, neben den für die äusseren Kräfte nöthigen Gleichungen, zu den noch nöthigen für die inneren Kräfte gelangen kann. Dies Princip wird folgendermassen ausgesprochen: „Wenn sich irgend ein elastisches System unter der Wirkung äusserer Kräfte in Gleichgewicht setzt, so ist die durch die inneren Kräfte entwickelte Arbeit ein Minimum.“ Nachdem sodann an einigen Beispielen gezeigt ist, dass die aus diesem Princip sich ergebenden Gleichungen dieselben sind, wie diejenigen, welche man bei der directen Methode aus der Betrachtung der geometrischen Bedingungen des Systems erhält, wird ein Beweis derselben gegeben, jedoch unter der Voraussetzung kleiner Verrückungen. Zum Schluss wird das Princip auch auf den Fall ausgedehnt, dass das System feste Punkte oder starre Theile enthält. O.

J. H. Röhrs. On the strains to which ordnance are subject and on the vibrations of solid bodies in general. Trans. of. Cambridge XI. (2). 324-359. 1869.

Cly.

L. F. Menabrea. Dilucidazioni sul principio di elasticità. Atti di Torino. V. 1870.

Unter diesem Titel sind veröffentlicht einige Bemerkungen des Herrn A. Parodi, ein Brief des Herrn Prof. Barsetti, zwei Auszüge aus Briefen der Herrn Bertrand und Yvon Villarceau, und ein Auszug aus den C. R. XLVI. 1858, betitelt: „Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastique

par L. F. Menabrea.“ Herr Menabrea fasst diese Notizen zusammen als Unterlage für ein Theorem, welches er „Gleichung der Elasticität“ genannt und in seiner Abhandlung: „Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique“ (Mem. di Torino (2) XXV. 1868 s. p. 765.) aufgestellt hatte; dies Theorem war in einer Schrift: „Errore del principio d'élasticità formolato dal sig. L. F. Menabrea, Cenno critico di Emilio Sabbia, Torino 1869“ angegriffen worden. Die Bemerkungen des Hrn. Parodi beziehen sich ebenfalls auf diese Schrift.

Jg. (O.)

PHILLIPS. De l'équilibre des solides élastiques semblables. C. R. LXVIII. 75-79. 1869.

Der Verfasser hat, von den fundamentalen partiellen Differentialgleichungen ausgehend, das Gleichgewicht ähnlicher elastischer Körper untersucht, die, homogen und von constanter Elasticität, äusseren Kräften unterworfen sind, die auf die Oberfläche oder auf die ganze Masse wirken. Er ist dabei zur Aufstellung folgender Frage gelangt: „Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit in der Deformation die elementaren Verrückungen homologer Punkte parallel sind und in constantem Verhältniss stehen, und damit es sich ebenso verhalte für die elastischen Kräfte, bezogen auf die Einheit der Oberfläche, die auf zwei homologe, in der Masse des Körpers genommene Oberflächenelemente wirken.“ Die Art der mathematischen Behandlung ist indess in dem vorliegenden Auszug zu wenig hervortretend, um Näheres darüber berichten zu können.

O.

PHILLIPS. Du mouvement des corps solides élastiques semblables. C. R. LXIX. 911-912. 1869.

Nur kurze Anzeige. Der Bericht folgt nach dem Erscheinen der ausführlichen Arbeit.

Wn.

KIRSCH. Theorie der Elasticität und Festigkeit dünner Platten. Z. dtsch. Ing. XIII. 371-377. 417-423. 489-493. 545-561. 1869.

Nachdem kurz die Differentialgleichung der elastischen Linien

für die Biegung balkenförmiger Körper entwickelt ist, leitet der Verfasser ausführlich die Differentialgleichung der elastischen Flächen her und giebt im letzten Theile Anwendungen seiner Resultate auf runde dünne Platten. O.

Kirsch. Ueber die Festigkeit rechteckiger Platten, welche am Rande lose aufliegen. Z. dtsch. Ing. XIV. 361-369. 1870.

Ausdehnung der obigen Arbeit auf den Fall, wo die Platte rechteckig ist. O.

L. Boltzmann. Ueber die Festigkeit zweier mit Druck übereinander gesteckter cylindrischer Röhren. Wien. Ber. LIX. 679-689. 1869.

Auf einem hohlen Cylinder aus einem homogenen und isotropen Medium, dessen Querschnitt ein von zwei concentrischen Kreisen begrenzter Ring sei, wirken folgende Kräfte: Auf die innere und äussere Mantelfläche je eine constante normale Druckkraft [die innere bedeutend stärker, als die äussere], auf die senkrecht zur Axe liegenden Endflächen eine normale Zugkraft. Unter diesen Bedingungen ist es leicht, die im Innern eintretenden Deformationen, sowie die dort vorhandenen elastischen Druckkräfte (die elastischen Spannungen) zu berechnen. Mit Hülfe der so erhaltenen Ausdrücke kann man dann, wenn die Dimensionen und die Zugfertigkeit des Materials gegeben sind, entweder die äusserste Grenze des inneren Drucks, oder, wenn dieser gegeben ist, die Grenze des Verhältnisses beider Radien bestimmen, die noch möglich ist, ohne dass eine dauernde Deformation eintritt. Es ergiebt sich, dass der innere Druck nie stärker sein darf, als die Zugfestigkeit, vermehrt um zwei Atmosphären, falls der äussere Druck gleich dem Atmosphärendruck ist. Günstiger wird das Verhältniss, wenn der Körper aus zwei solchen hohlen Cylindern besteht, die mit einem gewissen Drucke über einander gepresst sind, derart dass der äussere Radius des inneren Cylinders zugleich der innere Radius des äussern ist. Herr B. stellt die für diesen Fall geltenden

Formeln auf, wenn das Material beider Cylinder verschieden ist, und leitet daraus den Werth ab, den der gemeinsame Radius beider Cylinder haben muss, damit der innere Druck den grösstmöglichen Werth erreicht. Wn.

M. Okatow. Notiz über das Gleichgewicht eines schweren Drahtes, dessen Axe eine Schraubenlinie bildet. Clebsch Ann. II. 9-12. 1869.

Die Axe eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt und nach allen Richtungen gleicher Elasticität bildet im natürlichen Zustande eine Schraubenlinie auf dem Mantel eines Cylinders von verticaler Axe, mit dessen Grundkreisen die Enden der Schraubenlinie so verbunden sind, dass der Draht die Wirkung der beiden Kräftepaare auf sich nimmt, die in diesen Kreisen liegen und mit zwei gleichen, aber entgegengesetzten Drehmomenten M auf den Draht wirken. Die Mittelpunkte dieser Kreise dienen zugleich als Angriffspunkte zweier entgegengesetzter vertikaler Kräfte. Beim Uebergang aus dem natürlichen in das elastische Gleichgewicht ändert sich der Durchmesser des Cylinders um C; jeder Punkt der Schraubenlinie verschiebt sich ferner parallel der Axe des Cylinders um Y und dreht sich endlich um die Axe um einen Kreisbogen B. Diese drei Grössen werden durch Formeln dargestellt, die, streng genommen, nur für solche Punkte der Schraubenlinie Geltung haben, welche beim elastischen Gleichgewicht um eine ganze Anzahl von Umgängen vom unteren Ende des Drahtes entfernt sind, die aber auch für die übrigen Punkte eine Annäherung enthalten, deren Genauigkeit mit der Anzahl der Windungen des Drahtes wächst. Zum Schluss werden die Lagen der Molecüle nach der Formveränderung bestimmt, die vorher zu demselben Querschnitte gehörten. Die Molecüle bilden nach der Formänderung eine Ebene; nur ein Durchmesser bleibt gradlinig, alle andern formen sich in flache Parabeln um. O.

R. S. Ball. On an elementary proof of a theorem of Lagrange. Phil. Mag. (4) XXXIX. 107-108. 1870.

„Wenn eine dehnbare oder undehnbare Membran unter dem

Einfluss von Kräften, die in jedem Punkte normal zur Oberfläche sind, im Gleichgewicht ist, so ist der normale Druck in einem Punkte gleich der Spannung in ihm, multiplicirt mit der Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien."

Csy. (O.)

W. C. Wittwer. Anwendung der Lehre vom Stosse elastischer Körper auf einige Wärmeerscheinungen. Schlömilch Z. XIV. 478-505. 1869.

Ohne wesentliches mathematisches Interesse. Der Verfasser sucht die Erscheinungen der Wärme auf die Bewegung elastischer Körper, die in einer Reihe aufeinander folgen, zurückzuführen. O.

H. Resal. De l'équilibre, de l'élasticité et de la résistance du ressort à boudin. C. R. LXIX. 42-43. 1869.

Angabe zweier Formeln aus einer grösseren Arbeit des Verfassers, ohne Ableitung. O.

H. Schneebeli. Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. Wolf. J. XIV. 375-407. 1869. — Pogg. Ann. CXL. 598-621. 1870.

Nicht mathematisch; es werden nur im Laufe der rein experimentellen Untersuchung einige bekannte Formeln der Elasticitätstheorie für die Rechnung angewandt.

Wn.

M. Kuhn. Ableitung der Gleichungen für die Bewegung eines elastischen Theilchens und Nachweis für die Richtigkeit der Bezeichnung „pendelartige Schwingung", welche für diese Bewegungsform gebraucht wird. Pr. Wien. 1869.

Elementare Beweise für die Formeln, die den Schwingungszustand eines elastischen Theilchens und die Bewegung des Pendels darstellen. Der Gang des Beweises für die erste Formel ist (wie gewöhnlich) folgender: Aus der Annahme, dass die

elastische Kraft, welche das Theilchen in seine Gleichgewichtslage zu führen sucht, dem Abstand von der Gleichgewichtslage proportional ist, und aus dem Satze, dass diese Kraft gleich der Masse, multiplicirt mit dem Zuwachs der Geschwindigkeit, auf die Zeiteinheit bezogen, wird für die Bewegung eine gewisse Formel abgeleitet. Dieselbe Formel ergiebt sich, wenn man ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreise sich bewegendes Theilchen auf den Durchmesser projicirt denkt. Durch geeignete Wahl der Constanten werden beide Bewegungen identisch. — Aehnlich ist die Ableitung für die Pendelgleichung.

Wn.

J. Stahl. Ueber einige Punkte in der Theorie der Capillarerscheinungen. Pogg. Ann. CXXXIX. 239-261. 1870.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die der Theorie der Capillarerscheinungen entgegengesetzten Einwürfe zu widerlegen. Vorzugsweise kommen hier die Einwürfe von Poisson und von Dawidow in Betracht. Die Einwürfe von Poisson, die sich im Wesentlichen auf die Werthe der in der Laplace'schen Theorie auftretenden Constanten beziehen, werden nur kurz besprochen. Dawidow war, von dem Princip der virtuellen Bewegungen ausgehend, zu demselben Resultate wie Poisson gelangt, dass nämlich unter der Annahme einer gleichförmigen Dichtigkeit der Flüssigkeit die in der Laplace'schen Theorie auftretende Constante $H=0$ sei; es sei daher unter der Annahme einer gleichförmigen Dichtigkeit überhaupt keine Theorie der Capillarität möglich. Zur Widerlegung dieses Einwurfs verallgemeinert der Verfasser die Gauss'sche Ableitung der Grundgleichungen der Capillarität, indem er ihre Anwendbarkeit auch für den Fall nachweist, dass die Dichtigkeit an der Grenze der Flüssigkeit variabel ist; und zwar wird gleich der Fall durchgeführt, dass im Haarröhrchen zwei verschiedene Flüssigkeiten übereinander stehen. Die Bedingung des Gleichgewichts ist in der Gauss'schen Theorie bekanntlich, dass eine gewisse Summe von Integralen ein Maximum ist. Diese Summe ist hier dieselbe, nur die Berechnung der vielfachen bestimmten Integrale ändert sich durch die Annahme der variablen Dichtigkeit. Die Ausführung

dieser Rechnungen führt zu denselben Gleichungen, die Poisson aufgestellt hat, Gleichungen, die in der Form mit denen von Laplace übereinstimmen. Das erhaltene Resultat ist unmittelbar auch auf den Fall anwendbar, dass die Dichtigkeit constant ist, und ergiebt, dass die Laplace'sche Constante H nicht $= 0$ ist. Dawidow war, wie gezeigt wird, zu seinem falschen Resultate nur durch unstatthafte Vernachlässigungen gelangt. Damit ist gezeigt, dass die Betrachtung einer gleichförmigen Dichtigkeit für die Capillaritätstheorie genügt, da die Berücksichtigung der an der Grenze variablen Dichtigkeit zu Gleichungen von derselben Form führt. — Zum Schluss wird durch das Princip der virtuellen Bewegung die Grösse des Horizontaldrucks einer Flüssigkeit auf eine verticale Ebene berechnet.

Wn.

L. Boltzmann. Ueber die Ableitung der Grundgleichungen der Capillarität aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Pogg. Ann. CLI. 582-590. 1870.

Herr B. findet in der Gauss'schen Theorie der Capillarität den Mangel, dass die über alle Molecülpaare zu erstreckenden Summen durch Integrale ermittelt werden. Dies kann nur dann zu richtigen Resultaten führen, wenn die einem Molecül unmittelbar benachbarten Molecüle nur einen verschwindenden Theil der Summe liefern. Liefern jene Molecüle Endliches, so gestattet die Discontinuität der Materie die Integration nicht. Aus demselben Grunde hat man in der Elasticitätstheorie die Auswerthung der Summen durch Integrale schon längst verlassen. — Herr B. giebt dann eine Ableitung der Grundgleichungen der Capillaritätstheorie, welche von den obigen Einwürfen frei ist und ausserdem den Umstand in Rechnung zieht, dass die Flüssigkeitsmolecüle aus verschiedenen heterogenen Atomen bestehen können. Nach dem Princip der virtuellen Verrückungen ist es zum Gleichgewicht der Flüssigkeit erforderlich, dass, wenn $f(r)$ das Wirkungsgesetz zwischen je zwei Atomen von der Entfernung r, wenn ferner $\varphi(r) = \int f(r)\,dr$, die Variation der über alle Atome erstreckten Doppelsumme $\Sigma\Sigma\,\varphi(r)$, vermehrt um die

Variation der Kräftefunction der äusseren Kräfte = 0 sei. Die Doppelsumme lässt sich zerlegen in eine Summe aus dem constanten Volumen der Flüssigkeit und dem Flächeninhalt jeder der Berührungsflächen der Flüssigkeit mit den festen Körpern, jeden Summanden noch mit einer gewissen Constante multiplicirt. Somit ist man auf eine Gleichung von derselben Form gelangt wie bei der Gauss'schen Theorie. Was die Berechnung jener Doppelsumme betrifft, müssen wir auf die Arbeit des Herrn B. verweisen; bemerkt mag noch werden, dass die dabei anzustellenden Betrachtungen zum grossen Theil analog den Betrachtungen der Elasticitätstheorie sind.

Wn.

P. du Bois-Reymond. Ueber den Antheil der Capillarität an den Erscheinungen der Ausbreitung der Flüssigkeiten. Pogg. Ann. CXXXIX. 262-275. 1870.

Der Verfasser zeigt zunächst, dass, wenn ein Tropfen einer Flüssigkeit auf einer andern Flüssigkeit schwimmt, die Meridiancurve jenes Tropfens (den Tropfen als Rotationskörper angenommen) weder an seiner freien, noch an seiner untern Fläche einen Wendepunkt haben kann. Der Beweis dieses Satzes beruht auf Folgendem: Wenn man zwei Punkte der Oberfläche des Tropfens durch einen unendlich dünnen Kanal verbindet, muss, damit die in dem Kanal enthaltene Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwere und der Capillarkräfte im Gleichgewicht sei, $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ mit der Höhendifferenz der Endpunkte des Kanals wachsen, wenn R_1 und R_2 die Krümmungshalbmesser der Fläche am untern Endpunkte des Kanals bedeuten. Diese Bedingung schliesst einen Wendepunkt der Meridiancurve aus.

Es werden dann aus dem Neumann'schen Satze über die Randwinkel dreier aneinanderstossender Flüssigkeiten, unter der Annahme, dass eine dieser Flüssigkeiten Luft sei, für gewisse Werthe der Capillaritätsconstanten die Randwinkel abgeleitet. Endlich macht der Herr Verfasser darauf aufmerksam, dass bei der Ausbreitung gewisser mit Dämpfen imprägnirter Flüssigkeiten noch eigenthümliche Strömungen eintreten, die durch

blosse Capillarkräfte nicht zu erklären seien; zu ihrer Erklärung sei wahrscheinlich eine Repulsionskraft anzunehmen, die nur bei sehr dünnen Schichten der Flüssigkeit auftrete.

Wn.

A. Mousson. Bemerkungen über die Theorie der Capillarerscheinungen. Wolf. J. XV. 305-321. 1870.

Referat im nächsten Jahresbericht.

Koniecki. Elementare Darstellung der Capillaritätslehre. Pr. Berlin. 1869.

Der Verfasser stellt die historische Entwickelung der Capillaritätstheorie kurz dar, giebt dabei für die Hauptsätze die elementaren Beweise an und vergleicht schliesslich die Theorie mit den neueren Beobachtungen. Neues enthält die Arbeit nicht.

Wn.

J. Moutier. Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide C. R. LXX. 612-615. 1870.

Clairaut berechnet bei seiner Erklärung der Capillarerscheinungen die Wirkung der Flüssigkeitsmolecüle untereinander und die Einwirkung der festen Wand auf sie, indem er die Oberfläche der Flüssigkeit anfänglich als horizontal annimmt. Diese Ungenauigkeit im Beweise verbessert Herr M., indem er die Componenten der Capillarkräfte unter der Annahme berechnet, dass die Flüssigkeit mit der festen Wand den Winkel i bildet. Soll nun die Wirkung der festen Wand der Wirkung der Flüssigkeitsmolecüle unter einander das Gleichgewicht halten, so muss die Resultante dieser Kräfte senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeit sein. Diese Bedingung giebt aber $i = 0$. Um einen mit der Erfahrung übereinstimmenden Werth von i zu erhalten, [wie ihn die Gauss'sche Theorie der Capillarität giebt], muss man als Bedingung aufstellen: Die zur festen Wand normale Componente der Wirkung der Flüssigkeitstheilchen auf einander ist gleich und entgegengesetzt der Wirkung der festen Molecüle auf die Flüssigkeit. —

Wn.

J. Boussinesq. Théorie des experiences de Savart sur la forme que prend une veine liquide après s'être choquée contre un plan circulaire. C. R. LXIX. 45-48. 123-132. 1869.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. B. p. 745.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

R. Moon. On the theory of sound. Phil. Mag. (4) XXXVII. 189-200. 1869.

Es wird bewiesen, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2x}{dt^2},$$

welche gewöhnlich angewandt wird, um den Ausdruck der Bewegung des Schalls in leeren Röhren zu geben, nicht correct ist. Ferner wird gezeigt, dass Laplace's Methode zur Bestimmung des Unterschiedes, welcher zwischen der theoretischen und experimentellen Geschwindigkeit existirt, auf einer falschen Annahme beruht. Es wird eine Lösung gegeben, die frei von beiden Einwänden ist. Csy. (O.)

de Saint-venant. Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique; et remarques sur les propagations du son et de la lumière, sur les resauts; ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents. C. R. LXXI. 186-195. 1870.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. B. p. 735.

A. Terquem. Étude sur le timbre des sons, produits par des chocs discontinus et en particulier par la sirène. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 269-365. 1870.

Der Ton einer Sirene verdankt seine Entstehung den Stössen

der discontinuirlich ausströmenden Luft und den daraus entstehenden Verdichtungen und Verdünnungen. Der Verfasser hat diese Bewegungserscheinung einer mathematischen Behandlung unterzogen. Er geht dabei von der vereinfachenden Annahme aus, dass, wenn die Oeffnungen einander gegenüber stehen, die Luft stets mit constanter Geschwindigkeit ausströme. Die Grösse und der Verlauf der Verdichtungen wird deshalb wesentlich von Grösse und Form der an einander vorübergehenden Oeffnungen, von ihren Entfernungen, sowie von ihren relativen Geschwindigkeiten abhängen. Ist diese, in jedem besonderen Fall leicht zu bestimmende Function der Zeit gegeben, so kann sie stets in Form einer Fourier'schen Reihe entwickelt werden. Die Coefficienten der einzelnen Glieder geben dann die Amplituden der Obertöne. Der Verfasser hat in dieser Weise eine grosse Auswahl spezieller Fälle durchgeführt, indem er verschiedene Formen der Oeffnungen — Rechtecke, Rhomben, Dreiecke, Kreise —, annimmt. Man findet daher eine reiche Sammlung von Entwickelungen spezieller Functionen nach Fourier'schen Reihen.

Die weiteren Entwickelungen, die mathematisch alle in derselben Weise durchgeführt werden, schliessen sich an Versuche von Savart und Seebeck an und geben deren Erklärung mit Hülfe der Theorie der Obertöne. Ok.

J. Bourget. Sur le mouvement vibratoire des membranes élastiques. Inst. XXXVIII. 1 sect. 189-190. 1869.

Die Resultate der Berechnung der Vibrationen einer quadratförmigen Membran, welche der Verfasser früher gegeben hatte, zeigte zwar in Hinsicht der Knotenlinien genügende Uebereinstimmung mit der Beobachtung, doch hinsichtlich der Tonhöhe grosse Abweichungen bis zu zwei ganzen Tönen. Der erste Versuch dieselben zu erklären, nämlich durch Theilnahme des Randes an der Bewegung, erwies sich unzureichend. Im gegenwärtigen Aufsatz zieht der Verf. nun den Luftwiderstand in Berücksichtigung, indem er ihn der Geschwindigkeit proportional setzt. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+2a\frac{dw}{dt}=c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right).$$

Durch Zerlegung der Normalverschiebung w in drei Factoren, die einzeln Functionen von t, von x, von y sind, ergiebt sich, gerade wie im Fall eines Widerstandscoefficienten $a=0$, ein particuläres Integral für einfach periodische Schwingung

$$w=Me^{-at}(n\cos nt+a\sin nt)\sin\frac{i\pi x}{\lambda}\sin\frac{i'\pi y}{\lambda},$$

wo λ die Seite des Quadrats, i, i' die Knotenzahl bestimmende ganze Zahlen sind. Die Knotenlinien sind demnach unabhängig von a; dagegen ergiebt sich für die Schwingungszahl in der Zeiteinheit:

$$N_{i,i'}=\frac{c}{2\lambda}\sqrt{i^2+i'^2-\left(\frac{a\lambda}{c\pi}\right)^2}.$$

Diese wird also durch den Luftwiderstand vermindert, wie es auch die Beobachtungsresultate fordern. H.

A. Kundt. Zur Theorie der Schwingungen in Luftplatten.

Pogg. Ann. CXXXVII. 466-470. 1869.

Nimmt man für die Schallbewegung in einer unendlich dünnen Luftplatte die Bewegung als nur von zwei Dimensionen abhängig an, so wird die Differentialgleichung der Bewegung dieselbe, wie für eine Membran, nämlich:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right).$$

φ bedeutet für die Luftplatte das Geschwindigkeitspotential, für die Membran dagegen die Entfernung des Theilchens aus seiner Gleichgewichtslage. Bei beiden Bewegungen sind jedoch die Grenzbedingungen verschieden. Bei der allseitig gespannten Membran wird am Rande $\varphi=0$; bei der Luftplatte ist [wenn n die Normale des Randes] $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ für die begrenzte Platte, während für die Platte mit offenem Rande $\frac{\partial\varphi}{dt}=0$ ist. Herr K. setzt voraus, dass im letzteren Falle nicht nur $\frac{\partial\varphi}{dt}=0$, sondern auch $\varphi=0$ sei, dann ergiebt sich, dass (wegen der verschiedenen

Bedeutung von φ) die Bewegung der Luftplatte und der Membran die entgegengesetzte ist; wo auf der Membran Ruhe, ist in der Luftplatte Bewegung, und umgekehrt. Zum Schluss wird für eine rechteckige Platte ein partikuläres Integral aufgestellt, das der Randbedingung $\frac{\partial\varphi}{dt} = 0$ genügt, und gezeigt, dass für dies partikuläre Integral dann auch $\varphi = 0$ wird am Rande. Somit ist die Möglichkeit der Voraussetzung $\varphi = 0$ für einen Specialfall bewiesen. Wn.

E. Warburg. Ueber tönende Systeme. Pogg. Ann. CXXXVI. 89-102. 1869.

Ein gespannter Faden, auf dessen Elemente dämpfende Kräfte wirken, sei an eine Stimmgabel geknüpft, welche durch äussere Kräfte in fortdauernder periodischer Bewegung gehalten wird; es soll die Kraft untersucht werden, die der Faden auf die Stimmgabel ausübt. Die dämpfenden Kräfte seien proportional der Geschwindigkeit, so ist die Differentialgleichung der Bewegung des Fadens

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Dazu kommt als Grenzbedingung, dass das eine Ende des Fadens fest ist, das andere periodische Schwingungen ausführt. Für den stationären Zustand der Bewegung wird das Integral dieser Differentialgleichung aufgestellt, aus dem folgt, dass die gesammte Bewegung des Fadens so vor sich geht, als wäre sie hervorgebracht durch die Interferenz zweier Wellen, die nach entgegengesetzten Seiten fortschreiten. Nimmt man nun an, dass der Faden auf die Stimmgabel an der Befestigungsstelle eine Kraft proportional $\frac{\partial y}{\partial x}$ ausübt, so folgt, dass diese Kraft aus zwei Theilen besteht, deren einer proportional den Elongationen der Stimmgabel, der andere proportional der Geschwindigkeit derselben, aber von entgegengesetzter Richtung ist. Schwingt die Stimmgabel nur unter dem Einfluss der Elasticität, so wird der erste Theil jener Kraft die Tonhöhe ändern, der zweite die

Schwingungen der Gabel dämpfen. Beide Wirkungen sind um so stärker, je stärker die Resonanz des Fadens ist.

Wn.

E. WARBURG. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern. Pogg. Ann. CXXXVI. 285-299. 1869.

In der allgemeinen Gleichung für die Bewegung transversal schwingender Stäbe werden die Integrationsconstanten für den Fall bestimmt, wo das eine Ende der Stäbe frei ist, das andere periodische Schwingungen vollführt. Daraus werden die Abscissen der Knoten bestimmt als Wurzeln einer transcendenten Gleichung. Für solche Knoten, welche dem festen Ende nicht zu nahe liegen, nimmt die transcendente Gleichung eine einfache Form an, aus der sich eine einfache Beziehung zwischen den Lagen entsprechender Knoten in Stäben mit verschiedener Schallgeschwindigkeit ergiebt. Wn.

R. HOPPE. Berechnung der Vibrationen einer Saite mit Berücksichtigung ihres Biegungswiderstandes. Pogg. Ann. CXL. 263-271. 1870.

Es werden die drei Fälle berücksichtigt, dass die Saite an beiden Enden fest, an beiden Enden frei und an einem Ende fest, am anderen frei ist. O.

V. v. LANG. Einleitung in die theoretische Physik. Zweites Heft. Licht. Braunschweig 1868.

Das vorliegende, für das erste Studium der mathematischen Optik sehr empfehlenswerthe Buch leitet die wesentlichsten Resultate der theoretischen Optik (auch die Lichtbrechung in doppelt brechenden Medien), sowie die Lichtbewegung an Linsen, auf möglichst elementarem Wege ab. Bei den Beweisen wird nur analytische Geometrie, keine Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Bei der Reflexion, sowie bei der Krystalloptik ist die Fresnel-Cauchy'sche Vorstellung (die Schwingung senkrecht zur Polarisationsebene) zu Grunde gelegt. In jedem

einzelnen Abschnitt sind die Originalabhandlungen fast vollständig angegeben.

Das erste, früher erschienene Heft behandelt in ähnlicher Weise folgende Kapitel: Mechanik, Schwere, Magnetismus, Elektricität. Wn.

O. Airy. Geometrical optics. London, Macmillan 1870.

Colnet-d'Huart. Mémoire sur la théorie mathématique de la chaleur et de la lumière. Luxembourg 1870.

Die vorliegende Arbeit sucht die Gesetze der Lichtschwingungen in Zusammenhang zu bringen mit denen der Bewegung der Wärme in ponderablen Körpern, indem sie für die Wärmeerscheinungen folgende Erklärung aufstellt: „Wird ein elastisches Medium durch irgend welche Kräfte aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, so pflanzt sich die Erschütterung wellenförmig durch das Medium fort, und wir empfinden diese Vibrationen als Licht. Bei diesen Vibrationen werden aber die einzelnen Molecüle (die der Verfasser sowohl in isotropen, als in krystallinischen Medien als kugelförmig annimmt) nicht blos aus ihrer ursprünglichen Lage verrückt, sondern es wird gleichzeitig jedem einzelnen Molecül eine Rotation um seinen Mittelpunkt ertheilt. Diese Rotation der Molecüle soll die Ursache aller Wärmeerscheinungen sein.“ Abgesehen davon, dass für diese Hypothese keine physikalische Thatsache spricht, kann sich Referent auch mit den Gründen, die der Herr Verfasser anführt, um die Hypothese plausibel zu machen, durchaus nicht einverstanden erklären. Herr C. entwickelt zuerst auf gleiche Art, wie Cauchy, Ausdrücke für die elastischen Druckkräfte, die dadurch entstehen, dass ein Theil des (isotrop angenommenen) Mediums aus seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage verrückt ist. Er bildet dann für einen Punkt eines kugelförmigen Molecüls die von diesen Kräften herrührenden Drehungsmomente unter der Voraussetzung, dass die Dimensionen der Kugel klein sind gegen die Entfernung der nächsten Molecüle. Daraus ergeben sich dann durch Integration die Drehungsmomente für die ganze Kugel, sowie die Gleichungen für die Rotation der Kugel. Nun wird weiter so geschlossen:

Ebenso wie die Verrückung eines Molecüls aus seiner Gleichgewichtslage elastische Druckkräfte hervorruft, so muss auch die Rotation eines Molecüls ohne Verrückung elastische Kräfte hervorrufen. Dies ist (was der Verfasser nicht angiebt) nur dann richtig, wenn man annimmt, die zwischen den einzelnen Molecülen wirkenden Kräfte seien nicht nur Functionen der Entfernung, sondern auch der Geschwindigkeit. Bei Herrn C. würden sogar diese Kräfte nur Functionen der Rotationsgeschwindigkeit sein. Vorher, bei Ableitung der Gleichungen für die Verschiebung der Molecüle, war aber (mit Cauchy) angenommen, zwischen den Molecülen seien Kräfte wirksam, die nur Functionen der Entfernung seien. Es würden sich demnach folgende Anschauungen über das Wesen der Molecularkräfte ergeben: Bei der Verschiebung der Theilchen ohne Rotation sind zwischen den Molecülen nur Kräfte wirksam, die Functionen der Entfernung sind, bei der Rotation der Molecüle kommen Kräfte hinzu, die von der Entfernung und der Geschwindigkeit der Molecüle abhängen. Beide Vorstellungen, so neben einander gestellt, scheinen dem Referenten unvereinbar zu sein; mindestens liegt in der Anschauung insofern eine Inconsequenz, als die Molecularkräfte nicht von vornherein als Functionen der Entfernung und der Geschwindigkeit angenommen sind. — Für die Richtigkeit seiner Annahme, dass durch blosse Rotation eines Molecüls ohne Verrückung neue Elasticitätskräfte hervorgerufen werden, führt der Verfasser die Torsion eines Cylinders an. Was der Verfasser hierüber sagt, trifft nicht den Kern der Sache, der in der oben angeführten Anschauung über das Wesen der Molecularkräfte liegt.

Obwohl wir uns demnach mit der Theorie des Herrn Verfassers nicht befreunden können, führen wir die hauptsächlichsten der von ihm abgeleiteten Resultate an. Herr C. entwickelt auf ganz analoge Weise, wie Cauchy, Ausdrücke für die elastischen Kräfte, die durch Rotation der Molecüle neu entstanden sein sollen, und erhält auf diese Weise Elasticitätsgleichungen, die die bekannte Form haben, nur dass noch zwei neue Glieder hinzugefügt sind. Die Gleichungen werden integrirt unter der Annahme longitudinaler oder transversaler ebener Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ersteren ergiebt sich als unab-

hängig von der Rotationsgeschwindigkeit der Molecüle, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen die Rotationsgeschwindigkeit enthält. Durch jene Rotation wird die Dispersion erklärt, und das Fehlen der Dispersion im freien Aether soll davon herrühren, dass dessen Molecüle nicht rotiren. Endlich soll auch bei transversalen ebenen Wellen die räumliche Dilatation nicht $= 0$ sein, sondern eine periodische Function der Zeit und des Ortes. — Alle diese Folgerungen werden jedoch mit der besprochenen Hypothese, die uns unhaltbar erscheint, ungültig. Wn.

C. Neumann. Ueber die Aetherbewegung in Krystallen. Clebsch Ann. I. 325-358; II. 182-186. 1869. 1870.

Die Anwendung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen auf die Fortpflanzung ebener Wellen in krystallinischen Medien ergiebt bekanntlich, dass eine longitudinale und zwei nahezu transversale Wellen möglich sind. Dies Resultat weicht von der Erscheinung in sofern ab, als die longitudinale Welle sich in keiner Weise nachweisen lässt und die beiden transversalen Wellen nach den Fresnel'schen Gesetzen genau transversal sein sollten. Ein mit den Fresnel'schen Gesetzen mehr übereinstimmendes Resultat erhält man, wenn man zu den gewöhnlichen Annahmen über die Elasticität und Dichtigkeit des Aethers noch folgende hinzugefügt: Die Dichtigkeit des Aethers ist zwar sehr starken Kräften gegenüber veränderlich, hingegen schwachen Kräften gegenüber so gut wie unveränderlich, so dass man bei der Vibrationsbewegung den Aether als ein incompressibles Medium betrachten kann. Diese Hypothese, die von Hrn C. Neumann in seiner Dissertation [Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur, Halle 1858] und in seiner Schrift „die magnetische Drehung der Polarisationsebene" zuerst aufgestellt ist, wird auch der gegenwärtigen Arbeit zu Grunde gelegt. Durch diese Hypothese werden die longitudinalen Wellen, bei denen ja stets eine Aenderung der Aetherdichtigkeit stattfindet, ausgeschlossen; die beiden transversalen Wellen ferner ergeben sich als genau senkrecht zur Normale der Wellenebene. — Die Differentialgleichungen

für die Bewegung des Aethers werden unter Zugrundelegung obiger Hypothese:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = mX + \frac{m}{q}\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

wozu zwei ähnliche Gleichungen für die Schwingungscomponenten v und w kommen. Die drei Gleichungen enthalten ausser u, v, w noch eine vierte Unbekannte λ; es kommt aber zu den drei Differentialgleichungen noch als vierte die Bedingung der Incompressibilität hinzu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Für die Componenten der zwischen den Molecülen wirkenden Anziehungskräfte (X) setzt Herr N. unter der Voraussetzung, dass nur solche Krystalle betrachtet werden, die durch drei auf einander senkrechte Ebenen symmetrisch theilbar sind, die allgemeinen Ausdrücke

$$X = (h_{11} + h_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (h_{12} + h_2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h_{13} + h_3)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ 2h_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2h_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{h}_1 u,$$

und ähnlich für Y und Z. Integrirt man dann, wie gewöhnlich die Differentialgleichungen für den Fall ebener Wellen, so ergeben sich zwei genau transversale Wellen. Fügt man noch die Annahme hinzu, dass die Einwirkung der ponderablen Molecüle auf die Aethertheilchen (die in den Ausdrücken für X in den Coefficienten $\mathfrak{h}$ enthalten sind) gleich Null ist, so sind die Vibrationsrichtungen beider Wellen genau auf einander senkrecht. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit m der Wellen ergiebt sich eine quadratische Gleichung; um diese auf eine einfache Form zu bringen, werden zwischen den sechs Coefficienten h_{11}, h_{12} etc. drei Relationen angenommen:

$$h_{11} + h_{22} = 6h_{12} = 6c$$
$$h_{33} + h_{11} = 6h_{31} = 6b$$
$$h_{22} + h_{33} = 6h_{23} = 6a.$$

Die Gleichung für m nimmt dann, wenn α, β, γ die Cosi-

nus der Winkel bezeichnen, die die Wellennormale mit den Krystallaxen bildet, folgende Form an:

$$0 = \frac{\alpha^2}{m^2 - (\bar{p} + a)} + \frac{\beta^2}{m^2 - (\bar{p} + b)} + \frac{\gamma^2}{m^2 - (\bar{p} + c)},$$

wo

$$\bar{p} = h_1 \alpha^2 + h_2 \beta^2 + h_3 \gamma^2$$

ist.

Nimmt man dazu die Formeln, die die Schwingungsrichtungen der beiden Wellen bestimmen, so stellen diese Formeln genau die Fresnel'schen Gesetze dar, falls man nur die Vibrationsebene und Polarisationsebene als identisch nimmt, und falls die Coefficienten h_1, h_2, h_3, einander gleich sind.

Herr N. untersucht dann weiter die in Bezug auf die Coefficienten h_{11}, h_{12} etc. gemachten Annahmen näher, indem er auf die Bildung der Differentialgleichungen und der Ausdrücke für X, Y, Z zurückgeht. Wegen der Anziehung, die die Aethertheilchen durch die ponderablen Molecüle zu erleiden haben, ist die Dichtigkeit und damit die Coefficienten h, (die bekanntlich gewisse über die Aethertheilchen auszudehnende Summen bedeuten) als periodische Functionen des Raumes anzusehen. Wegen der angenommenen Incompressibilität ist jedoch die periodische Aenderung der Dichtigkeit nur sehr gering, und man kann daher an Stelle der periodischen Functionen h ihre constanten Mittelwerthe setzen. Durch Untersuchung der Verschiebungen, welche nöthig sind, den wirklichen Zustand des Aethers in einen absolut gleichförmigen überzuführen, ergiebt sich, dass zwischen den constanten Mittelwerthen Relationen stattfinden müssen, die genau identisch sind mit den vorher angenommenen $h_{11} + h_{22} = 6h_{12}$ etc. Ebenso ergiebt sich, dass die constanten Mittelwerthe der Coefficienten $\mathfrak{h} = 0$ sind. Dass aber die Coefficienten h_1, h_2, h_3 einander gleich sind, was zur völligen Uebereinstimmung der Resultate mit den Fresnel'schen Gesetzen nothwendig ist, lässt sich aus den Grunddarstellungen nicht ableiten, wenn es mit denselben auch nicht in Widerspruch zu stehen scheint.

In einem Nachtrage lässt Herr N. die Annahme $h_1 = h_2 = h_3$, die sich aus den Grundvorstellungen nicht ableiten liess, fallen und setzt an deren Stelle die Annahme:

$$h_1 - h_{23} = h_2 - h_{31} = h_3 - h_{12}.$$

Diese Annahme wird, wie aus der Bildung der Summen h folgt, erfüllt, wenn die Wirkung zwischen zwei Aethertheilchen entweder der sechsten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist, oder aus zwei Theilen besteht, einem umgekehrt proportional der vierten, dem andern umgekehrt proportional der sechsten Potenz der Entfernung. In diesem Falle führen die Ausdrücke für die Schwingungsrichtung genau auf die Fresnel'schen Gesetze; die Vibrationsrichtung ist dann senkrecht zur Polarisationsrichtung, während bei der ersten Annahme beide Richtungen zusammenfielen. Wn.

A. Brill. Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen. Clebsch Ann. I. 225-252. 1869.

Der Herr Verfasser behandelt folgende Frage: Welches ist die allgemeinste Form der Lösungen der Elasticitätsgleichungen, wenn diese Lösungen Lichtschwingungen von gegebener Wellenlänge entsprechen sollen, d. h. wenn folgende Bedingungen erfüllt sein sollen:

1) Die Componenten u, v, w des Schwingungsausschlags haben die Form:

$$\Omega \, . \, e^{\frac{2\pi i}{\tau}(\lambda - t)},$$

wo λ eine reelle Function der Coordinaten bedeutet, die auf einer Wellenfläche constant ist, Ω eine reelle Function der Coordinaten, τ eine Constante.

2) Die Componenten parallel dem vom Erschütterungspunkte aus gezogenen Radiusvector sind $= 0$.

3) Die Schwingungen erfolgen ohne räumliche Dilatation; es ist also

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Zur Lösung der Aufgabe wird ein System orthogonaler krummliniger Coordinaten ($\varrho, \varrho_1, \varrho_2$) eingeführt, und zwar besteht eins von den drei orthogonalen Flächensystemen (ϱ) aus concentrischen Kugeln. Sind dann U, V, W die Componenten der Schwingung parallel

$\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ (also U parallel dem Radiusvector), so ist nach Bedingung 2) $U = 0$, während die anderen Bedingungen für V und W folgende Werthe ergeben:

$$V = h_2 \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} e^{(\lambda-\tau)\frac{2\pi i}{\tau}}; \quad W = -h_1 \frac{\partial F}{\partial \varrho_1} e^{\frac{2\pi i}{\tau}(\lambda-t)}.$$

Hierin ist F eine Function von λ und ϱ allein, wenn λ ausser ϱ noch ϱ_1 und ϱ_2 enthält; enthält λ nur ϱ, so ist F eine beliebige Function von $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$. Ferner sind $\frac{d\varrho_1}{h_1}$ und $\frac{d\varrho_2}{h_2}$ die Bogenelemente senkrecht zu den Flächen $\varrho_1 =$ Const. und $\varrho_2 =$ Const., also:

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right)^2.$$

Aus den obigen Ausdrücken folgt, dass bei einer beliebig gestalteten Wellenfläche die Schwingungen längs der Elemente der Durchschnittscurven der Wellenfläche mit den concentrischen Kugeln stattfinden.

Es werden nun die isotropen, die einaxigen und zweiaxigen Medien besonders behandelt, und es ergiebt sich dabei das Resultat, dass in isotropen Medien für Kugelwellen, in optisch einaxigen Medien für ellipsoidische Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine sehr mannigfaltige sein kann, während für die Kugelwellen in optisch einaxigen und für die Wellen der Fresnel'schen Wellenfläche in optisch zweiaxigen Medien nur eine gleichförmige Geschwindigkeit möglich ist.

Für isotrope Medien werden die Elasticitätsgleichungen auf das obige System orthogonaler Coordinaten transformirt, und es wird die Annahme gemacht, dass die Wellenflächen concentrische Kugeln, dass also λ nur eine Function von ϱ ist. Die Aufgabe reducirt sich dann auf die Integration zweier Differentialgleichungen, einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für Ω mit den unabhängigen Variabeln ϱ_1 und ϱ_2 und einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung für R, von welcher Grösse λ abhängt. Die Differentialgleichung für Ω lässt sich, wenn man statt ϱ_1, ϱ_2 gewöhnliche Polarcoordinaten

einführt, durch eine Reihe integriren. Die Differentialgleichung für R ist:

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} = R\left(T^2 + \frac{\beta}{\varrho^2}\right),$$

β eine willkürliche Constante, T eine Constante, die von den Elasticitätsconstanten abhängt.

Aus dem Integral dieser Gleichung, für das schon Euler eine Reihenentwickelung gegeben hat, bestimmt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche $= \frac{d\varrho}{dt}$ ist, da $\varrho = \text{Const.}$ eine Wellenfläche:

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{4i\pi}{\tau} R^2 \int \frac{d\varrho}{R^2}.$$

Die hierbei auftretende partielle Differentialgleichung für Ω erhält man, wenn man die Gleichung des Potentials auf die Coordinaten ϱ, ϱ_1, ϱ_2 transformirt und die Differentialquotienten nach $\varrho = 0$ setzt. Die Lösungen dieser Differentialgleichung liefern gleichzeitig eine bemerkenswerthe Klasse von Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right).$$

Für optisch einaxige Medien sind die allgemeinsten Lösungen der Elasticitätsgleichungen in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten:

$$u = -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad v = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x};$$
$$w = -\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x};$$

T und S sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right);$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right),$$

wo a und b die Elasticitätsconstanten sind. Die Schwingungen in diesen Medien setzen sich somit aus zwei Theilen zusammen, deren ein von S abhängiger Theil den Kugelwellen entspricht.

Führt man für diese Polarcoordinaten ein, so ergeben sich für die Schwingungscomponenten parallel den neuen Coordinaten Ausdrücke, durch welche sowohl die Schwingungsrichtung, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eindeutig bestimmt sind; letztere ist zugleich constant $= b$. Der zweite, von T abhängige Theil der Lösung führt auf ellipsoidische Wellen, für die ähnliche Gesetze gelten, wie für die Kugelwellen in isotropen Medien.

Für optisch zweiaxige Medien werden als Coordinaten concentrische Kugelflächen $\varrho =$ Const. und für ϱ_1 und ϱ_2 elliptische Kugelcoordinaten eingeführt. Die Elasticitätsgleichungen werden für diesen Fall aus dem Hamilton'schen Princip abgeleitet, dass die erste Variation des Integrals

$$\int dt\,(U-T)$$

verschwindet, unter T die lebendige Kraft des ganzen Systems verstanden. Dabei ist die Voraussetzung gemacht, dass die zwischen den einzelnen Theilchen des elastischen Mediums wirkenden Kräfte eine Kräftefunction U besitzen. Es werden die Ausdrücke für T und U auf das neue Coordinatensystem transformirt und dann aus dem Verschwinden der ersten Variation des Hamilton'schen Integrals für die Elasticitätsgleichungen eine besondere Form aufgestellt, aus welcher das oben angegebene Resultat für Wellen der Fresnel'schen Wellenfläche folgt.

Wn.

E. Ketteler. Ueber den Einfluss der ponderablen Molecüle auf die Dispersion des Lichts und über die Bedeutung der Constanten in der Dispersionsformel. Berl. Monatsb. 1870. 137. Pogg. Ann. CXL. 1-53. 177-213. 1870.

Der Haupttheil der Arbeit ist rein physikalisch; es soll aus sämmtlichen vorhandenen Beobachtungen eine möglichst vollkommene empirische Dispersionsformel abgeleitet werden. Die Formel, wenn auch empirisch, ist doch von grossem theoretischem Interesse. Sie ist

$$\frac{1}{n^2} = K\cdot l^2 + A + \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4},$$

wenn n der Brechungsexponent, l die innere Wellenlänge des betreffenden Mediums, K, A, B, C dem Medium eigenthümliche Constante sind. Die Formel ist von A ab mit den ersten Gliedern der von Cauchy theoretisch abgeleiteten Dispersionsformel identisch. Das erste Glied $K\cdot l^2$, welches bei Cauchy fehlt, muss, wie der Verfasser aus experimentellen Daten abgeleitet hat, nothwendig hinzugefügt werden. — Der zweite Theil der Arbeit giebt eine formelle Interpretation der Constanten, die von rein physikalischem Interesse ist. — Der dritte Theil endlich ist theoretisch. Der Verfasser wiederholt die hauptsächlichsten Entwickelungen aus Briot's: „Essais sur la théorie mathématique de la lumière" (Paris 1869) Buch 3. Briot nimmt zur Erklärung der Dispersion an, durch die Anziehung der ponderablen Molecüle sei der Aether innerhalb der ponderablen Körper ungleichförmig vertheilt, die Aetherdichtigkeit sei daher eine periodische Function des Raumes. Die directe Einwirkung der ponderablen Molecüle auf den schwingenden Aether setzt er dagegen $= 0$.

Herr K. zeigt nun, dass, wenn man diese letztere Kraft nicht vernachlässigt, aus den Briot'schen Gleichungen sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Formel ergiebt, die der Form nach völlig mit der obigen empirischen übereinstimmt. — Die empirischen Daten der vorliegenden Arbeit liefern ein reiches Material zum weiteren Ausbau der Theorie. Wn.

Challis. The dispersion of light on the hypothesis of undulations. Phil. Mag. (4) XXXVIII. 268-280. 1869.

Csy.

M. Ricour. Sur la dispersion de la lumière. C. R. LXIX. 1231-1233. 1869. C. R. LXX. 115-119. 1870.

Ohne Beweis wird für die Dispersion des Lichtes folgende (theoretisch abgeleitete) Eormel mitgetheilt:

$$\sin\frac{R\alpha\pi}{l}=\frac{\varrho\alpha\pi}{l},$$

wo R den Brechungsindex für Strahlen von der Wellenlänge l bedeutet; α und ϱ sind Constante, die von der Natur des Mediums abhängen. Wn.

P. GLAN. Ueber die Absorption des Lichtes. Pogg. Ann. CXLI. 58-83. 1870.

Nach einem experimentellen Theil behandelt der Verfasser das Problem der Absorption des Lichtes auf Grund der Annahme, dass die Aetherschwingungen zum Theil an die Körpermolecüle übertragen werden. Diese Annahme führt auf eine ähnliche Differentialgleichung, wie sie Helmholtz in seiner Abhandlung über Combinationstöne aufgestellt und integrirt hat.

Ok.

W. VELTMANN. Fresnel's Hypothese zur Erklärung der Aberrationserscheinungen. Astr. Nachr. LXXV. 145-160. 1870.

W. VELTMANN. Ueber die Fortpflanzung des Lichts in bewegten Medien. Astr. Nachr. LXXVI. 127-144. 1870.

Die Erscheinungen der Aberration, deren Erklärung durch die Vibrationstheorie Schwierigkeiten macht und nur unter Zuhülfenahme gewisser (von Fresnel zuerst aufgestellter) neuer Hypothesen möglich ist, werden hier von folgendem Gesichtspunkte aus behandelt. Zwei Medien, in welchen eine Wellenbewegung des Lichts stattfindet, bewegen sich mit gemeinsamer Geschwindigkeit parallel ihrer Trennungsfläche; wie wird ein ursprünglich zur Trennungsfläche senkrechter Lichtstrahl modificirt? Zur Behandlung dieser Frage wird die Vorstellung zu Grunde gelegt, dass die Vibrationen des Aethers mit dem Medium, das den Aether enthält, ohne sonstige Veränderung fortbewegt werden, dass die Richtung dieser Fortbewegung dieselbe wie die des Mediums ist, aber eine andere Geschwindigkeit besitzen kann. Unter dieser Annahme trifft der ursprünglich senkrechte Strahl die Trennungsfläche schief. Nimmt man weiter an, dass für die relativen Strahlen das Snellius'sche Brechungsgesetz gilt, so lässt sich daraus die Geschwindigkeit ableiten, mit der die Wellenbewegung an der Translationsbewegung des Mediums theilnimmt, $= c - \frac{v^2}{g^2} c$. Hierin ist c die Geschwindigkeit der Translationsbewegung des Mediums, g die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im leeren Raume (freien Aether), v die in dem betrachteten Medium. Die Formel, welche der mathematische Ausdruck der oben erwähnten Fresnel'schen Hypothese ist, ist nur eine angenäherte und gilt nur, wenn v sehr gross gegen c ist. — Es wird dann dasselbe Problem behandelt für den Fall eines die Trennungsfläche schief treffenden Strahls, falls die Translationsbewegung in der Einfallsebene stattfindet. Das Resultat ist dasselbe wie vorher, d. h. soll für die relativen Strahlen das Brechungsgesetz gelten, so muss die Wellenbewegung an der Translationsbewegung theilnehmen, aber nicht mit der ganzen Geschwindigkeit, sondern nur mit der durch die obige Formel ausgedrückten. Diese Formel ist somit die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die relativen Strahlen das Brechungsgesetz befolgen; die absoluten Strahlen befolgen das Brechungsgesetz nicht. — Das Resultat bleibt, wie in der zweiten Arbeit gezeigt wird, dasselbe, wenn die Richtung der Translationsbewegung der Medien auch in der Einfallsebene liegt.

An diese Untersuchungen schliessen sich Anwendungen auf die Brechung an Linsen und Prismen. Referent bemerkt noch, dass Herr Klinkerfues in seiner Schrift „Die Aberration der Fixsterne" (Leipzig 1867) eine andere Vorstellung zu Grunde legt, indem er annimmt, dass für die Lage des geschlängelten oder gebrochenen Strahls nur diejenigen translatorischen Bewegungen des Aethers von Einfluss sind, welche die Scheidewand oder die Dichtigkeit des Mittels ändern. Danach würde die Beschaffenheit des Objectivs eines Fernrohrs die Aberrationsconstante ändern, was nach den Fresnel'schen Formeln, die Herr V. behandelt, nicht der Fall ist. Eine Entscheidung zwischen beiden Ansichten scheint nur die Beobachtung herbeiführen zu können.

Wn.

E. Jochmann. Ueber eine von Quincke beobachtete Klasse von Beugungserscheinungen und über die Phasenänderung der Lichtstrahlen bei totaler und metallischer Reflexion. Pogg. Ann. CXXXVI. 561-588. 1869.

Herr Quincke hat die Interferenzstreifen beobachtet, die

entstehen, wenn Lichtstrahlen an der Hypotenusenfläche eines gleichschenklig-rechtwinkligen Glasprismas im Innern des Prismas so reflectirt werden, dass die Reflexion theils an Luft, theils an Metall (mit dem ein Theil der Hypotenusenfläche belegt ist) geschieht. Jochmann unterwirft diese Erscheinung der Rechnung, indem er nach dem Huyghens'schen Princip den Schwingungszustand irgend eines Punktes auf dem Schirm, auf welchem die Beugungserscheinung beobachtet wird, durch die Summe zweier Doppelintegrale darstellt. Dieser Ausdruck wird dann auf zwei bekannte einfache Integrale reducirt, die auch bei anderen Beugungserscheinungen eine Rolle spielen; Fresnel hat für diese Integrale, die nicht in endlicher Form berechnet werden können, eine Tabelle mit Hülfe von Näherungsformeln entworfen. Aus dem reducirten Ausdruck für den Schwingungszustand wird die Intensität in dem beobachteten Punkte abgeleitet, und daraus die Stellen der Maxima und Minima der Intensität. Um die Werthe der letzteren mit den beobachteten Werthen vergleichen zu können, werden endlich aus den optischen Constanten des Prismas und der Metallbelegung die Werthe für die Amplituden des an Silber und an Luft reflectirten Strahles, sowie der Phasenunterschied beider Strahlen berechnet. Diese Rechnung wird zuerst ausgeführt mit Hülfe der von Cauchy gegebenen Reflexionsformeln, dann aber auch mit Hülfe der von Neumann aufgestellten Formeln. Die beiden Resultate stimmen mit den Beobachtungen gut überein. Diese geben daher keine Entscheidung darüber, welche von den beiden Lichttheorien den Vorzug verdient, d. h. ob man mit Fresnel und Cauchy annehmen muss, dass die Schwingungen des polarisirten Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene, oder mit Neumann, dass sie in der Polarisationsebene stattfinden. Wn.

E. Lommel. Die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung. Schlömilch Z. XIV. 1-47. 1869.

Während in den bekannten Darstellungen der Beugungserscheinungen zunächst der Intensitätsausdruck für einen beliebigen Bildpunkt durch weitläufige Summationen oder durch

Integralrechnung aufgestellt und durch dessen Discussion die Erscheinung abgeleitet wird, verzichtet die vorliegende synthetische Darstellung auf die Herstellung des allgemeinen Ausdrucks der Intensität und betrachtet die geometrische Seite der Erscheinung, sowie die geometrischen Gründe für das Gesetz der Intensitätsvertheilung. Diese Darstellung gewährt einen grösseren Einblick in die Entstehung der Erscheinung und bildet gewissermaassen eine Ergänzung der analytischen Darstellung. Es lässt sich auf diesem Wege sowohl die Construction der Beugungsbilder für die wichtigsten Fälle ableiten, als auch die Intensität in den hauptsächlichsten Punkten des Bildes. Dem Inhalte nach giebt die vorliegende Arbeit hauptsächlich eine elementare Darstellung der Resultate, die Schwerd in seinem bekannten Werke über die Beugungserscheinungen, analytisch abgeleitet hat. Zum Schluss wird der Satz abgeleitet, dass der Beugungswinkel für einen bestimmten Bildpunkt ein Minimum wird, wenn die Normale des Schirmes denselben halbirt.

Wn.

E. Lommel. Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. Schlömilch Z. XV. 141-169. 1870.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 258.

A. Kurz. Berechnung der hyperbolischen dunkeln Büschel in zweiaxigen Krystallen. Schlömilch Z. XV. 209-215. 1870.

Aus dem Schnitt einer gegebenen Wellenebene mit der Fresnel'schen Elasticitätsfläche wird eine quadratische Gleichung aufgestellt für die Vibrationsazimuthe der beiden der Wellenfläche zugehörigen Strahlen, wobei die Krystallfläche senkrecht zur Mittellinie der optischen Axen angenommen wird. Die bisher innerhalb des Krystalls betrachteten Strahlen erleiden dann noch eine Brechung in die Luft, wobei nur nahezu senkrecht austretende Strahlen berücksichtigt werden, für die das gewöhnliche Brechungsgesetz gilt. Es ergiebt sich dann, dass alle Strahlen, die einem bestimmten Vibrationsazimuthe angehören,

auf einer Hyperbel zu liegen scheinen, deren Gleichung in Polarcoordinaten aufgestellt wird. Die Hyperbel ist nur nahezu gleichseitig. Es folgen dann einige Transformationen der Hyperbelgleichung, sowie die Gleichung des geometrischen Ortes für den Scheitel aller Hyperbeln. Endlich werden für den Salpeter die Hyperbeln wirklich berechnet. Wn.

E. Reusch. Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Mit Atlas. Leipzig 1870.

Für die Art und Weise, wie Lichtstrahlen beim Durchgang durch ein System von Linsen ihre Richtung ändern, ist zuerst von Gauss in seinen dioptrischen Untersuchungen durch Einführung der „Hauptpunkte" eine einfache geometrische Darstellung gegeben. Die Resultate der Gauss'schen Theorie sind dann von Herrn C. Neumann (die Haupt- und Brenn-Punkte eines Linsensystems, Leipzig 1866) auch auf elementarem Wege entwickelt. An die Arbeit von C. Neumann anknüpfend, giebt Herr Reusch für eine grosse Zahl hierher gehöriger Aufgaben eine graphische Behandlung in der Art, dass er mit Beibehaltung der Axenstrecken oder Abscissen die zugehörigen Ordinaten [die ja für Strahlen, welche mit der Axe kleine Winkel bilden, nur sehr kleine Grössen sind] in einem sehr vergrösserten Massstabe aufträgt. In der so erhaltenen schematischen Figur sind die Axenschnitte von Linien identisch mit den wirklichen Axenschnitten des Linsensystems; parallele Gerade der schematischen Figur entsprechen parallelen Geraden des Systems etc. In dieser Art wird zunächst der Fall zweier brechenden Medien behandelt, die längs einer sphärischen Fläche zusammentreffen, und dann der Weg eines beliebigen Strahls durch eine Reihe von brechenden Medien verfolgt, wobei sich die Hauptpunkte in jedem Fall in einfacher Weise ergeben. Es folgt dann die Besprechung der eigentlichen Linsen und der wichtigsten dioptrischen Instrumente. Neben den Constructionen, die mit grosser Sorgfalt ausgeführt sind, enthält die Arbeit auch die Aufstellung der Grundformeln und die Berechnung der Cardinalpunkte für gewisse Hauptfälle.

Wn.

KRAMM. Ueber die Brechung des Lichtes in einem System von Flächen zweiter Ordnung. Pr. Marburg 1869.

In der vorliegenden Arbeit werden die Gauss'schen dioptrischen Untersuchungen auf den Fall ausgedehnt, wo die brechenden Medien statt von centrirten Kugelflächen, von anderen Flächen zweiter Ordnung begrenzt werden. Wie bei Gauss die Mittelpunkte sämmtlicher Kugelflächen auf einer geraden Linie liegen, so werden hier die Hauptaxen sämmtlicher Flächen als parallel angenommen; eine der Hauptaxen fällt bei sämmtlichen Flächen in die Axe x, so dass die Gleichung einer beliebigen Fläche (auf den Scheitel als Anfangspunkt bezogen) lautet

$$ax^2 + bx + cz^2 + dy^2 + e = 0.$$

Die Berechnung der Richtung der gebrochenen Strahlen geschieht sowohl bei einer brechenden Fläche, als bei einem System Schritt für Schritt wie bei Gauss, indem nur Strahlen betrachtet werden, die mit der x Axe sehr kleine Winkel bilden. In den Resultaten tritt insofern eine Aenderung gegen die Gauss'schen Resultate ein, dass statt des Kugelradius die beiden Hauptkrümmungsradien im Scheitel der Fläche in die beiden Gleichungen des Strahls eintreten. Von den Resultaten heben wir folgende hervor. Die Brechung durch das System kann (wie bei Kugelflächen) ersetzt werden durch die Brechung an einer einzigen Fläche, verbunden mit einer Verschiebung des Strahls sich selbst parallel. Ein von einem Punkte ausgehendes Strahlenbündel wird durch die Brechung so modificirt, dass die austretenden Strahlen zwei den Axen y und z parallele Brennlinien bilden, die nicht durch denselben Punkt gehen. Aehnliche Modificationen erleidet ein Bündel paralleler Strahlen. Schliesslich werden die erhaltenen Formeln auf Cylinderlinsen angewandt, und für diese die Abstände der Brennlinien vom Scheitel berechnet. Wn.

KUDELKA. Die Gesetze der Lichtbrechung. Grunert Arch. L. 18-56. 121-157. 241-278. 1869.

Von dem Snellius'schen Brechungsgesetz ausgehend entwickelt der Verfasser auf die elementarste und breiteste Weise

die geometrischen Erscheinungen der Lichtbrechung für eine ebene Fläche, ein Prisma und eine Kugelfläche. In mathematischer Beziehung enthält die Arbeit weder dem Inhalt noch der Form nach etwas Neues; in physikalischer Beziehung enthält sie Unwichtiges, indem sie die Newton'sche Farbentheorie umstossen und die prismatischen Farben durch reine Contrastwirkungen erklären will. Wn.

W. Graffweg. Ueber Linsen, welche von einem homogenes Licht ausstrahlenden Punkte ein mathematisch genaues Bild geben. Schlömilch Z. XV. 311-324. 1870.

Der Verfasser behandelt die Frage: Welches muss die Grenze zwischen zwei Medien von gegebener optischer Dichtigkeit sein, damit die von einem Punkte des einen Mediums ausgehenden Strahlen sich nach der Brechung in einem reellen oder virtuellen Punkte vereinigen?

Als Resultat ergiebt sich eine Rotationsfläche mit der Meridiancurve

$$mr \pm ns = \text{Const.},$$

wo r und s die Entfernung eines beliebigen Punktes von dem leuchtenden Punkte, resp. seinem Bilde, m und r die Brechungsindices beider Medien sind. Ableitung und Discussion des Resultats bieten nichts Bemerkenswerthes. Wn.

H. Zinken, gen. Sommer. Untersuchungen über die Dioptrik der Linsen-Systeme. Braunschweig, Vieweg 1870.

Der Verfasser behandelt im ersten Theile als Vorbereitung die Theorie der Brechung in erweiterter Gauss'scher Methode, indem er auch die Glieder der sphärischen Abweichung, die Gauss vernachlässigt hatte, berücksichtigt. Im zweiten Theile wird dann das Bild, das durch ein Linsensystem entsteht, einer eingehenden Erörterung unterworfen. Der dritte Theil behandelt die umgekehrte Aufgabe, die Berechnung eines Systems, das ein gegebenes Object in vorgeschriebener Weise abbilden soll, und bespricht die Mängel, die dabei hervortreten. Im vierten Theile endlich wird die Lage des gebrochenen Strahles aus

der des einfallenden genau bestimmt, d. h. mit Berücksichtigung auch der vorher vernachlässigten höheren Glieder der sphärischen Centralabweichung etc., und dadurch werden Mittel zur Correction für die im dritten Theil besprochene Aufgabe gewonnen.

O.

E. Hill. On a practical method of finding the magnifying power of a telescope. Messenger V. 84-85. 1869.

Beweis, dass die vergrössernde Kraft eines Fernrohrs mit Ocular gleich ist dem Verhältniss des Objectivglases zu dem Durchmesser des deutlichen Bildes, welches das Ocular giebt.

Glr. (O.)

O. Airy. To find the condition of minimum deviation of a ray of light passing through a prism composed of a medium denser than the original medium. Messenger V. 88-90. 1869.

Ohne Anwendung der Differentialrechnung.

Glr. (O.)

W. v. Bezold. Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. Pogg. Ann. CXLI. 91-94. 1870.

Siehe Abschn. X. Cap. 5. p. 753.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

C. Neumann. Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik. Clebsch Ann. I. 317-329. 1869.

Siehe Fortschr. d. Math. I. p. 371.

W. Weber. Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung. Pogg. Ann. CXXXVI. 485-489. 1869.

Die Wirkung zweier elektrischer Massen auf einander hat nach dem Weber'schen Gesetz das Potential:

$$V = \frac{e \cdot e'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right).$$

Nennt man „Anregung zur Bewegung bei relativer Ruhe" den Ausdruck: $\frac{e \cdot e'}{r}$, dagegen: „relative Bewegung ohne Anregung zur Bewegung" das Quadrat von: $\frac{dr}{dt} = c$, so ist das Potential bei einer beliebigen Geschwindigkeit: $\frac{dr}{dt}$ derjenige Bruchtheil des ersten Grenzwerths:

$$\frac{e e'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right),$$

der an dem zweiten fehlt, da:

$$\frac{c^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \text{ ist.}$$

Es knüpfen sich hieran noch weitere Speculationen, die indess zu neuen Ergebnissen nicht führen und, wie der Verfasser selbst zugiebt, noch nicht geeignet sind, als Grundlage einer mathematischen Theorie der bewegten Elektricität zu dienen.

Ok.

J. Stefan. Ueber die Grundformeln der Elektrodynamik. Wien Ber. LIX. 693-759. 1869. Carl Rep. V. 57-59. 1869.

Es ist bekannt, dass das elektrodynamische Ampère'sche Grundgesetz keineswegs das einzig mögliche ist, welches die elektrodynamischen Bewegungserscheinungen für geschlossene Ströme übereinstimmend mit der Erfahrung ergiebt. Schon Grassmann (Pogg. Ann. LXIV) hat vor längerer Zeit ein zweites aufgestellt, ohne dass bis jetzt eine Entscheidung zwischen beiden getroffen werden konnte. Stefan hat in der vorliegenden Abhandlung die Frage von dem allgemeinsten Gesichtspunkt aufgefasst. Sein Zweck ist, alle möglichen Elementargesetze auf-

zustellen, die alle für geschlossene Ströme zu demselben Resultat führen. Dabei ist zunächst von den bekannten Ampère'schen Voraussetzungen diejenige auszuscheiden, die nicht als allgemein aufzufassen ist, nämlich, dass die Wirkung zweier Elemente dem Princip der Wirkung und Gegenwirkung folgt. Dagegen wird, als durch die Erfahrung bewiesen, beibehalten, dass es gestattet ist, für die Wirkung eines Elementes auf ein anderes die Summe der Wirkungen von 3 rechtwinkligen Componenten des einen auf die drei rechtwinkligen Componenten des anderen, zu substituiren. Bei der Entwickelung dieser Kräfte treten 4 unbekannte Constanten in das Resultat, die nur einer Bedingungsgleichung zu genügen brauchen, während eine zweite dieser Constanten noch bestimmt wird durch eine Wahl für die Einheit der Stromintensität.

Zwei der 4 Constanten bleiben also stets willkürlich, und bei den einfachsten Annahmen für dieselben (nämlich = 0), gelangt man zu 7 verschiedenen Elementargesetzen, von denen 3 dem Princip der Wirkung und Gegenwirkung genügen (hierunter das Ampère'sche), 4 dagegen nicht (hierunter das Grassmann'sche).

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird gezeigt, dass keinerlei Versuche mit geschlossenen Strömen für eines dieser Gesetze entscheiden können. Ok.

REYNARD. Nouvelle théorie des actions électrodynamiques. Ann. de Chem. et de Phys. (4) XIX. 272-328. 1870.

J. BERTRAND. Rapport sur Reynard, vue nouvelle sur la théorie des actions électrodynamique. C. R. LXVIII. 1156. 1869.

Reynard verwirft ebenfalls die Ampère'sche Hypothese der Anwendbarkeit des Princips von Wirkung und Gegenwirkung auf zwei Stromelemente, führt dagegen eine andere, ebenso wenig bewiesene ein. Er denkt sich nämlich die elektrodynamische Wirkung übertragen durch ein flüssiges Medium. Dann muss die Resultante senkrecht gegen das angegriffene Element stehen. Hieraus leitet er ein neues Grundgesetz ab, das übrigens

nur eine Reproduction des Grassmann'schen Gesetzes ist. Danach ist die Wirkung von ds auf ds':

$$\frac{i \cdot i' \cdot ds \cdot ds'}{r^2} \cdot \sin\vartheta \cos\mu,$$

wo ϑ der Winkel von ds mit der Verbindungslinie r, μ dagegen der Winkel von ds' mit der durch ds und r gelegten Ebene ist.

Er weist ferner die Uebereinstimmung der aus dem Gesetze sich ergebenden Formeln für geschlossene Ströme mit den von Ampère gefundenen nach und sucht endlich eine spezielle Vorstellung von der Uebertragung durch das flüssige Medium zu geben, indem er eine Fortpflanzung durch Wirbelbewegungen annimmt.

Bertrand macht in seinem Bericht über diese Arbeit darauf aufmerksam, dass schon Gauss (t. V. p. 618) eine ähnliche Umwandlung des Ampère'schen Gesetzes vorgenommen hat.

Ok.

H. Helmholtz. Über die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper. Borchardt J. LXXII. 57-129. 1870.

Bei der Anwendung der aus dem Weber'schen Grundgesetze abgeleiteten Bewegungsgleichungen der elektrischen Ströme auf eine neue Aufgabe der Elektrodynamik ergaben sich physikalisch unzulässige Folgerungen. Eine genauere Untersuchung zeigte, „dass der Grund davon in den Principien der Theorie stecke, dass nämlich nach den Folgerungen aus der Weber'schen Theorie das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem leitenden Körper labil sei, und dass deshalb die darauf gegründete Theorie die Möglichkeit von elektrischen Strömen anzeige, die zu immer grösser werdenden Werthen der Strömungsintensität und der elektrischen Dichtigkeit fortschritten." Es scheine daher das Weber'sche Gesetz für die Wirkung elektrischer Theilchen auf einander unzulänglich zu sein; ausserdem widerspreche es dem Gesetze von der Erhaltung der lebendigen Kraft insofern, als zwei elektrische Theilchen, die sich nach dem Gesetze bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen und also eine

unendlich grosse Arbeit leisten können. Verfasser geht in seinen Untersuchungen über die Bewegungsgleichungen der Elektricität von einem Ausdrucke für das Potential zweier Stromelemente aus, welcher eine unbekannte Constante $\varkappa$ enthält und welcher die sämmtlichen bisher bekannten Ausdrücke für das Potential als specielle Fälle in sich begreift.

Bezeichnen wir mit Ds und $D\sigma$ die Elemente der Länge zweier linearen Leiter s und σ, mit $(Ds, D\sigma)$ den Winkel, welchen die Richtungen beider mit einander bilden, mit r ihre Entfernung, mit i die Intensität des Stromes in s, mit j diejenige in σ, so ist das Potential der beiden Stromelemente gleich:

$$-\frac{1}{2}A^2\frac{i\cdot j}{r}\left[(1+k)\cos(Ds,D\sigma)+(1-k)\cos(r,Ds)\cos(r,D\sigma)\right]\cdot \cdot Ds\cdot D\sigma.$$

Darin ist A^2 eine Constante, deren Grösse von dem zur Messung der Stromstärke gebrauchten Maasse abhängt. Für $k=1$ geht dieser Ausdruck in den von F. E. Neumann gebrauchten über, für $k=0$ in den von Cl. Maxwell, für $k=-1$ in den von Weber.

Der zweite Paragraph der Abhandlung enthält die Ableitung des elektro-dynamischen Potentials für Ströme, die continuirlich im Raume verbreitet sind, sowie Umformungen der gewonnenen Ausdrücke, welche den von Kirchhoff in einem ähnlichen Falle angewandten Umformungen analog sind.

Sind u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung in der Richtung der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, so kann man die Werthe des elektrodynamischen Potentials, welches die sämmtlichen vorhandenen Ströme in Bezug auf die Stromcomponenten u, v, w im Stromelement $dx\,dy\,dz$ hervorbringen, der Reihe nach mit

$$-A^2\cdot U\cdot u\cdot dx\,dy\,dz$$
$$-A^2\cdot V\cdot v\cdot dx\,dy\,dz$$
$$-A^2\cdot W\cdot w\cdot dx\,dy\,dz$$

bezeichnen.

Ist $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, so ist

$$U = \iiint \left\{ \frac{1+k}{2} \cdot \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{x-\xi}{r^3} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot [u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)] \right\} d\xi\, d\zeta\, d\zeta,$$

und entsprechend V und W gleich einem ähnlichen Ausdrucke. Unter dem Integralzeichen sind u, v, w als Functionen von ξ, η, ζ zu nehmen, und die Integration ist über alle Stellen des Raumes, in denen elektrische Strömungen vorhanden sind, auszudehnen. Bezeichnet man mit Ψ den folgenden Ausdruck:

$$\Psi = \iiint \left(u \frac{dr}{d\xi} + v \frac{dr}{d\eta} + w \frac{dr}{d\zeta} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

so können, vorausgesetzt, dass Ψ einen endlichen Werth hat, was immer der Fall ist, wenn nur endliche elektrische Massen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt werden und diese sich alle in endlicher Entfernung von einander befinden, U, V, W auf folgende Form gebracht werden:

$$U = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \iiint \frac{u}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

und entsprechend V und W.

Es wird dann bewiesen, dass sowohl Ψ, U, V, W, als auch ihre ersten und zweiten Differentialquotienten überall stetig sind, mit eventueller Ausnahme solcher Punkte, in denen $\frac{d\varphi}{dt}$ unendlich wird, wenn φ die Potentialfunction der freien Elektricität bezeichnet. Als charakteristische Eigenschaften der Functionen U, V, W ergeben sich die folgenden:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U = (1-k) \frac{d^2\varphi}{dx\, dt} - 4\pi u$$

und

$$(3^a) \qquad \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k \frac{d\varphi}{dt}.$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für V und W.

Bezeichnet man nun den Widerstand eines prismatischen Leiters von der Einheit der Länge und der Einheit des Querschnitts mit $\varkappa$, so sind die Bewegungsgleichungen der Elektricität mit Rücksicht darauf, dass die in dem Punkte (xyz) wirkende elektromotorische Kraft zusammengesetzt ist aus derjenigen,

die von der elektrostatischen Kraft der freien Elektricität

$$\left(-\frac{d\varphi}{dx}, \varkappa\right)$$

herrührt und ferner aus der Inductionskraft, die in der Richtung der xAxe gleich $-A^2 \frac{dU}{dt}$ ist, folgende:

$$(3^b.)\quad \begin{cases} \varkappa u = -\frac{d\varphi}{dx} - A^2 \frac{dU}{dt}, \\ \varkappa v = -\frac{d\varphi}{dy} - A^2 \frac{dV}{dt}, \\ \varkappa w = -\frac{d\varphi}{dz} - A^2 \frac{dW}{dt}. \end{cases}$$

Hierin sind U, V, W, φ zunächst als Integrale gegeben. Führen wir diese vier Grössen als Unbekannte ein, so nehmen die Gleichungen (3^b) die Form von Differentialgleichungen an.

Für solche Theile (S) des Raumes, welche leitend sind und auf deren Inneres keine anderen Kräfte wirken, als die elektrostatischen und die inducirten elektromotorischen Kräfte, gelten die Gleichungen (3^b), die mit Rücksicht auf (3) die Form annehmen:

$$(\text{I.})\quad \Delta U - (1-k)\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} = \frac{4\pi}{\varkappa}\left\{\frac{d\varphi}{dx} + A^2\frac{dU}{dt}\right\} \text{ etc.}$$

In anderen Theilen (S_1) des Raumes, in denen die elektrischen Strömungen als vorgeschrieben betrachtet werden können, und in denen die Werthe von U, V, W, φ etc. mit U_1, V_1, W_1, φ_1 etc. bezeichnet werden mögen, ist

$$(\text{I}^a.)\quad \Delta U_1 - (1-k)\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dt} = -4\pi u_1, \text{ etc.}$$

Im ganzen Raume ($S+S_1$) gilt die Gleichung (3^a)

$$(\text{II.})\quad \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k\frac{d\varphi}{dt}.$$

$$(\text{II}^a.)\quad \frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = -k\frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Die Grenzbedingungen an mit Elektricität belegten Flächen Ω sind, wenn $+N$ die nach aussen gehende Richtung der Normale bezeichnet:

$$\text{(III.)} \quad U - U_1 = V - V_1 = W - W_1 = \varphi - \varphi_1 = 0.$$

$$\text{(IV.)} \quad \frac{dU}{dN} - \frac{dU_1}{dN} = \frac{dV}{dN} - \frac{dV_1}{dN} = \frac{dW}{dN} - \frac{dW_1}{dN} = 0.$$

In unendlicher Entfernung von den Leitern und bewegten Massen muss

$$\text{(V.)} \quad U = V = W = \varphi = 0$$

sein.

Die abgeleiteten Bewegungsgleichungen sind im Inneren eines Leiters von gleichmässiger Beschaffenheit dieselben wie diejenigen für verschwindend kleine Bewegungen in einem der Reibung unterworfenen Gase, nur mit anderen Grenzbedingungen. Es entsprechen dabei die elektromotorischen Kräfte den Geschwindigkeiten des Gases, die elektrostatische Potentialfunction den Druck- und Dichtigkeitsänderungen des Gases.

Im vierten Paragraphen wird der Beweis geliefert, dass, wenn $k \geqq 0$ ist und wenn für den Anfang der Bewegung die Werthe von U, V, W gegeben sind, die Gleichungen I. bis V. in Verbindung mit (3) die Bewegung der Elektricität vollständig bestimmen, ferner dass bei negativen Werthen von k das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in leitenden Körpern ein labiles ist, und dass $\frac{d\varphi}{dt}$, u, v, w, wenn sie nicht von vornherein an einzelnen Stellen unendliche Werthe haben, jedenfalls mit der Zeit zu unendlichen Werthen anwachsen müssen.

Dass solche unendlich fortschreitenden Störungen des elektrischen Gleichgewichts wirklich zu Stande kommen können bei denjenigen Methoden, elektrische Bewegung hervorzurufen, die uns zu Gebote stehen, wird im § 5 an einem Beispiel gezeigt, welches die radialen Bewegungen der Elektricität in einer Kugel behandelt, die durch Verengerung und Erweiterung einer äusseren concentrischen, mit Elektricität geladenen Kugelschale hervorgebracht werden.

Dass in den bisher von Kirchhoff, Jochmann und Lorberg behandelten elektrodynamischen Problemen, bei denen allen die aus dem Weber'schen Inductionsgesetze abgeleiteten Bewegungsgleichungen zu Grunde gelegt wurden, die Unzulänglichkeit jenes Grundgesetzes nicht zum Vorschein gekommen ist, liegt darin,

dass bei diesen Problemen der Einfluss der Constante k verschwindet. Verfasser untersucht im § 6 allgemein, indem er in den Bewegungsgleichungen die von k unabhängigen Theile von den von k abhängigen trennt, den Einfluss dieser Constante auf etwaige ausführbare Versuche. § 7 enthält eine Anwendung der Bewegungsgleichungen auf das Problem der Bewegung der Elektricität in einem unendlich langen Cylinder von kreisförmiger Basis, ein Problem, das in der Praxis bei der Anwendung eines sehr langen Drahtes annähernd eine Verwendung findet.

Seit Faraday's Entdeckung, dass bei weitem die meisten Stoffe magnetisirbar sind, und dass auch ein der magnetischen Polarisation ähnlicher Zustand von dielektrischer Polarisation in den elektrischen Isolatoren vorkommt, ist es nicht mehr gestattet, die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als reine Wirkungen in die Ferne zu betrachten. Daher wird in dem letzten Theile der Abhandlung der Einfluss erörtert, den die zwischen den durchströmten Leitern liegenden und sie umgebenden Isolatoren haben können, da etwaige Veränderungen, die in ihnen vorgehen, auf die Ausbreitung der inducirenden Wirkungen gewiss von Einfluss sein werden. In Bezug auf die Durchführung dieses Gedankens im Einzelnen verweise ich auf die Abhandlung. Ht.

J. Moutier. Sur les attractions et répulsions des corps électriques au point de vue de la théorie mécanique de l'électricité. Ann. de Ch. et de Ph. (4) XVI. 108-139. 1869.

Nachdem der Verfasser mehrere neue Versuche besprochen hat, die Annahme einer Fernwirkung elektrischer Massen zu umgehen und in anderer Weise das Coulomb'sche Grundgesetz zu erklären, bringt er selbst folgende Hypothese mit demselben Zweck. Denkt man sich den Aether eines Körpers zwischen seinen Molecülen durch irgend eine Ursache in einen Zustand von Verdichtung gebracht, der denjenigen der Umgebung übersteigt, so soll dies mit einer positiven Elektrisirung identisch sein. Ebenso umgekehrt. — Den Ausgleich mit dem umgebenden Mittel denkt sich der Verfasser als eine Reihe von Stössen der

ungleich dichten Aethermassen und wendet daher die Gleichungen des Stosses elastischer Körper an.

Für zwei kleine Kugeln, die verschieden oder gleich elektrisirt sind, gelangt man zu einem Ausdruck für ihre Anziehung oder Abstossung, die identisch mit dem Coulomb'schen Gesetz ist.

Ok.

P. Frost. Electro-Dynamics. Quart. J. XI. 47-57, 77-78. 134-144. 1870.

Ausgehend von dem Ampère'schen Gesetz giebt der Verfasser eine Ableitung der Formeln für die Wirkung unendlich kleiner Ströme auf einander, eines Solenoids auf einen Strom, und endlich den Nachweis, dass es gestattet ist, kleine geschlossene Ströme durch Magnete zu ersetzen. Ok.

L. Lorenz. Zur Moleculartheorie der Elektricitätslehre. Pogg. Ann. CXL. 644-647. 1870.

Die Arbeit behandelt die Bestimmung der oberen Grenze für die Anzahl der Molecüle, die in einem Milligramm Wasser enthalten sind. Die Zersetzung des Wassers durch den elektrischen Strom dient dabei als Ausgangspunkt. Als Resultat findet sich die Anzahl $< 1360 \cdot 10^{18}$. Ok.

J. Seeger. Ueber die Gleichgewichtsvertheilung der statischen Elektricität auf drei oder vier leitenden Kugeln. Bonn. 1868.

Die Aufgabe, die Vertheilung elektrischer Massen auf zwei, sich gegenseitig inducirenden Kugeln zu bestimmen, ist zuerst von Poisson gelöst worden. Nach ihm hat man diese Aufgabe sehr vereinfacht durch Anwendung von zwei Methoden, deren eine die „sphärische Spiegelung“ ist, während die andere, von Murphy zuerst angewandte, als „abwechselnde Influenz“ bezeichnet werden kann. Mit Hülfe dieser beiden Methoden giebt der Verfasser zuerst eine Methode, die gegenseitige Influenz einer beliebigen Anzahl beliebig mit Elektricität geladener Flächen zu bestimmen, indem er, der Reihe nach, je eine Fläche auf alle

übrigen inducirend wirken lässt. In derselben Weise wird die Aufgabe dann für drei und für vier Kugeln gelöst. Bei der Influenz zweier Kugeln auf einander kann man bekanntlich die Wirkung der Kugeln nach Aussen ersetzen durch zwei Gruppen elektrischer Punkte auf der Centrale der beiden Kugeln. Dem entsprechend findet der Verfasser, dass die gegenseitige Wirkung von drei Kugeln ersetzt werden kann durch Gruppen elektrischer Punkte, welche auf den Segmenten von Kreisen liegen, welche alle als gemeinsame Ebene die Ebene der drei Kugelmittelpunkte haben. Bei vier Kugeln findet man, dass die zu substituirenden Punktgruppen auf Stücken von Kugelschalen liegen müssen.

Die Berechnung dieser Punktgruppen lässt sich auf verschiedene Weisen durchführen. Ok.

J. Loschmidt. Ableitung des Potentials bewegter elektrischer Massen aus dem Potential für den Ruhezustand. Schlömilch Z. XIV. 141-147. 1869.

Eine Abhandlung von rein physikalischem Interesse. Sie behandelt die Ableitung des Potentials zweier elektrischer Massen aus einer allgemeinen Hypothese über die elektrische Wirkung. (cf. Riemann. Ein Beitrag zur Elektrodynamik. Pogg. Ann. CXXXI. 237.) Ht.

P. Volpicelli. Della distribuzione elettrica sui condutttori isolati. Brioschi Ann. (2). III. 249-268. 1869.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Theile. In dem ersten wird durch einfache Betrachtungen nachgewiesen, dass die Vertheilung der Elektricität, die man einem isolirten Leiter mittheilt, auf demselben stets eine constante ist; in dem zweiten Theile wird dieser Beweis auf ein System von isolirten Leitern ausgedehnt, also gezeigt, dass die elektrische Vertheilung auf einem Leiter auch dann eine constante ist, wenn derselbe unter dem Einflusse anderer (natürlich isolirter) Leiter steht, von denen jeder, ebenso wie er selbst, eine beliebige Menge positiver oder negativer Elektricität mitgetheilt erhalten hat.

Die analytischen Entwickelungen, grösstentheils Anwendungen bekannter Sätze aus der Potentialtheorie, gewähren vom mathematischen Standpunkte aus kein hervorragendes Interesse.

Ht.

TH. KÖTTERITZSCH. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Konduktoren. Schlömilch Z. XIV. 290-309. 1869.

Eine Fortsetzung der im 13. Bde. p. 120-147 dieser Zeitschrift abgedruckten Abhandlung (siehe Fortschr. d. M. I. 378) über die Frage: Wie sind elektrische Massen auf der Axe eines Systems von Konduktoren anzuordnen, welche von Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe umschlossen werden und einander nicht einschliessen, wenn dieselben zur Ermittelung der elektrischen Dichtigkeit auf den Konduktoren benutzt werden sollen?

Es hängt die Kenntniss der elektrischen Dichtigkeit an irgend einer Stelle der Oberfläche eines der gegebenen Konduktoren ab von der Kenntniss von q Functionen W (wenn q die Anzahl der Konduktoren ist), die folgende Eigenschaften haben:

1) Sie müssen Functionen einer Variablen μ und der Abscisse x des Punktes (xy) sein, auf welchen das Potential der zu bestimmenden elektrischen Massenvertheilung ausgeübt wird;
2) sie werden unendlich für jeden reellen, ganzzahligen Werth von μ;
3) sie werden Null für $\mu = \pm\infty$;
4) sie sind endlich und stetig für Werthe von μ, die nicht unter den Fall (2) gehören, auch wenn μ eine komplexe Grösse ist;
5) ihre reellen Theile sind grade, ihre imaginären ungrade Functionen von μ;
6) sie werden unendlich, sobald $\mu = \pm i\cdot\infty + l$, wenn l eine endliche Grösse bedeutet;
7) sie verschwinden für x (oder y) $= \pm\infty$, μ endlich;
8) das in Bezug auf μ von ihnen zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ genommene Integral verschwindet identisch.

Es geht die s^{te} dieser Functionen, $c_s W_s$, aus dem Ausdrucke

$$\sum_1^q p \int_{-h_p}^{+h_p} f_p(\varrho)\,[x + b_p - \varrho + yy']\,[(x + b_p - \varrho)^2 + y^2]^{-\frac{3}{2}}\, d\rho$$

dadurch hervor, dass man in ihm y und y' mit Hülfe der auf die Meridiancurve des s^{ten} Konduktors bezüglichen Gleichungen

$$y = \varphi_s(x),$$
$$y' = \varphi'_s(x)$$

eliminirt, ferner $f_p(\varrho)$ in eine für das Intervall der Integrationsgrenzen $2h_p$ gültige Fourier'sche Reihe entwickelt und in dieser Entwickelung statt des Stellenindex n die komplexe Variable μ einführt.

Führt man statt der Variablen ϱ die Variable $\frac{h_p}{\pi}\varrho$ ein und entwickelt $f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right)$ in eine Fourier'sche Reihe:

$$f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\right)\varrho = \sum_{-\infty}^{+\infty} n\, a_n^p\, e^{n\varrho i},$$

worin

$$a_n^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right) e^{-n\varrho i}\, d\varrho$$

bedeutet, und setzt man

$$A_m^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho + yy'\right]\left[\left(x + b_p \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2\right]\cdot e^{-m\varrho i}\, d\varrho$$

und berücksichtigt, dass

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{n\varrho i}\, e^{m\varrho i}\, d\varrho = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}$$

ist, je nachdem $m \gtrless n$ oder $m = n$ ist, so wird die allgemeinste und einfachste Form, die die Bedingungsform zur Bestimmung der Function W_s annehmen kann:

$$\frac{c_s}{2\pi}\int W_s\, d\mu = \int \sum_1^q p\, h_p\, a_\mu^p\, A_\mu^p \operatorname{ctg}(\mu\pi)\, d\mu = 0.$$

In Bezug auf die letzte Bestimmung der Function W oder, was schliesslich dasselbe ist, der Coefficienten a_μ^p aus dieser Gleichung verweise ich auf die Abhandlung selbst. Den Schluss

der letzteren bildet die Anwendung des gewonnenen allgemeinen Resultats auf zwei Beispiele. Ht.

G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Electricitätsvertheilung. Pr. Elbing. 1870.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 263.

J. Loschmidt. Die Elektricitätsbewegung im galvanischen Strome. Schlömilch Z. XIV. 344-347. 1869.

Die Auffassung der galvanischen Bewegung als eines Doppelstromes zweier Flüssigkeiten macht es wahrscheinlich, dass die Sätze über strömende Elektricität gewissen Sätzen der Hydrodynamik entsprechen. Es wird der Nachweis geliefert, dass das Ohm'sche Gesetz demjenigen hydrodynamischen Gesetze analog ist, welches in einem speziellen Falle das Poiseuille'sche Gesetz heisst; ferner, dass die Endgleichungen, welche Kirchhoff (cf. Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten. Pogg. Ann. C. 1857 und: Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern. Pogg. Ann. CII. 1857.) für die Theorie des nicht constanten galvanischen Stromes entwickelt hat, mit denjenigen hydrodynamischen Gleichungen, welche für das Strömen einer Flüssigkeit durch ein System von Röhren bei nicht stationärer Strömung gelten, in Uebereinstimmung gebracht werden können.

Ht.

L. Boltzmann. Ueber die elektrodynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. Schlömilch Z. XV. 16-32. 1870. Wien. Ber. LX. 69-88. 1869.

Eine quantitative Bestimmung der Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes für den Fall, dass nicht jeder derselben bereits für sich einen geschlossenen Strom bildet, eine Fortsetzung also der Weber'schen Versuche über die Wirkung fester geschlossener Ströme auf andere feste geschlossene Ströme.

Der erste Theil der Abhandlung enthält eine Beschreibung

des von dem Verfasser angewandten Apparates. Es stellt derselbe einen Strom von unveränderlicher Länge, aber veränderlicher Gestalt dar, indem er aus geradlinigen Leiterstücken zusammengesetzt ist, die einen Rhombus bilden, dessen Winkel veränderlich sind.

Der zweite Theil enthält eine Berechnung der Gleichgewichtsfigur des Apparates, d. h. eine Berechnung desjenigen Winkels, den der Rhombus enthalten muss, wenn er sich in allen seinen Theilen im Gleichgewichte befinden soll. Die Gleichgewichtsgleichung wird erhalten, wenn man die Wirkung der Schwere, die Wirkung des Erdmagnetismus auf jedes der vier Leiterstücke und die Wirkung je zweier derselben auf einander berechnet und ihre Summe gleich Null setzt. Es ist diese Berechnung aber bei der einfachen Gestalt jedes einzelnen Leiterstückes eine leichte Anwendung des Biot-Savart'schen und der Ampère'schen Gesetze.

Der dritte Theil der Abhandlung enthält eine experimentelle Prüfung des gewonnenen Resultates. Ht.

C. Neumann. Ueber die oscillirende Entladung einer Franklin'schen Tafel. Gött. Nachr. 17-26. 1869.

Verfasser geht von dem Satze aus: (cf. Gött. Nachr. 1868. 234., Fortschr. d. M. I. 371) Bei der Bewegung eines beliebigen Punktsystems wird die lebendige Kraft, vermehrt um das statische und vermindert um das motorische Potential, beständig ein und denselben Werth behalten, d. h. es wird für jedes beliebige Zeitelement dt

$$d(T+U-V) = \text{Const. sein.}$$

Befindet sich das System unter der Einwirkung äusserer Kräfte, so ist diese Formel zu ersetzen durch die allgemeinere:

$$d(T+U-V) = dS,$$

wenn S diejenige Arbeitsmenge bezeichnet, welche das System in Folge jener äusseren Einwirkungen während der Zeit dt consumirt.

Dieser allgemeine Satz wird auf die oscillirende Entladung einer Leydener Flasche oder Franklin'schen Tafel angewandt.

Das Resultat ist eine Differentialgleichung, welche bereits von Thomson (On transient electric currents. Philos. Mag. June 1853) und von Kirchhoff (Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche. Pogg. Ann. CXXI. 554) entwickelt worden ist.

Ht.

H. Lorberg. Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern. Borchardt J. LXXI. 53-90. 1870.

Die vorliegende Abhandlung besteht im Wesentlichen aus zwei Theilen.

Der erste enthät eine Reproduction und Umformung der aus dem Weber'schen Grundgesetze folgenden Kirchhoff'schen Gleichungen für die Bewegung der Elektricität, welche in so fern verallgemeinert werden, als die Elektricität nicht als sich selbst überlassen, sondern unter Einwirkung äusserer, mit der Zeit veränderlicher elektromotorischer Kräfte stehend angenommen wird.

In dem zweiten Theile werden die allgemeinen Gleichungen auf die Bewegung der Elektricität in einer Kugel angewandt und zwar auf die in derselben unter fortdauernder Einwirkung einer äusseren elektromotorischen Kraft entstehenden Induktionsströme. Das Verfahren, welches dabei eingeschlagen wird, ist im Wesentlichen dasjenige, welches Poisson in seiner Théorie math. de la chaleur Cap. XI. anwendet. Es wird dann der besondere Fall untersucht, in welchem die äusseren elektromotorischen Kräfte Stromkräfte sind, deren Resultante in jedem Punkte der Oberfläche parallel ist. Die in den folgenden Paragraphen 5, 6, 7 behandelten speciellen Fälle der Strömung ohne Einwirkung einer äusseren elektromotorischen Kraft, ferner der der Oberfläche parallelen Strömung nach Erlöschen der äusseren elektromotorischen Kraft haben wesentlich auch ein physikalisches Interesse, insofern als sie die Frage nach der Dauer der elektrischen Nachwirkung hervorrufen und beantworten.

In Bezug auf die Integration der Differentialgleichungen für jeden der behandelten speciellen Fälle verweise ich auf die Abhandlung selbst.

Ht.

Th. du Moncel. Note sur les accouplements des piles en séries. C. R. LXIX. 668. 1869.

Th. du Moncel. Note sur le maximum de force des électroaimants. C. R. LXIX. 879-886. 1869.

Zusätze zu früheren Abhandlungen, in denen der Verfasser die Fragen behandelt hat:

1) Wie sind die Elemente einer galvanischen Säule zusammenzusetzen, wenn das Maximum der Stromintensität erreicht werden soll?
2) Wie muss der Widerstand einer Magnetisirungsspirale, relativ zum Widerstand der übrigen Kette, gewählt werden, wenn man einen möglichst starken Magnetismus erreichen will? Ok.

E. Betti. Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in uno lastra rettangolare. Nuovo Cimento (2) III. 1870.

Zweck dieser Note ist die Bestimmung der Art, in der ein elektrischer Strom in einer rechteckigen Platte von vollständig leitender Masse vertheilt ist, wenn die Pole der Kette in den Halbirungspunkten zweier gegenüberliegender Seiten liegen. Der Herr Verfasser bestimmt dazu den Charakter der Potentialfunction auf dem Umfang und im Innern der Platte. Diese Function ist der reelle Theil einer Function mit complexen Variabeln, die gewissen Bedingungen genügt, durch welche sie im ganzen Rechtecke völlig bestimmt ist. Ist b die Länge der Seiten, in denen die Pole sich befinden, a die Länge der beiden anderen, $\frac{b}{2a}=\frac{K'}{K}$ das Verhältniss der vollständigen elliptischen Integrale erster Art, die k zum Modul haben, so ist die gesuchte Potentialfunction der reelle Theil von $A \log du\,(z,k)$, wo A constant, Jg. (O.)

G. Kirchhoff. Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus. Pogg. Ann. Suppl. V. 1-15. 1870.

Die Arbeit behandelt 2 interessante elektromagnetische Probleme:

1) Ist ein geschlossener Eisenring von einer Magnetisirungsspirale umgeben, so übt er nach Aussen keine magnetische Wirkung aus. Ist aber eine zweite Drahtspirale um den Eisenring gelegt, so wird in derselben beim Schliessen nnd Oeffnen des magnetisirenden Stromes ein Inductionsstrom erregt. In einem speziellen Fall kommt man zu einem sehr einfachen Ausdruck für die elektromotorische Kraft dieses Inductionsstromes.

2) Fliesst ein elektrischer Strom durch eine Eisenmasse, so bietet die Berechnung der magnetisirenden Kraft dieses Stromes eine gewisse Schwierigkeit, weil es für dieselbe kein Potential giebt.

Trotzdem lässt sich das gestellte Problem lösen und man gelangt zu einfachen Beziehungen zwischen den Stromdichtigkeiten und magnetischen Momenten irgend eines Punktes der Eisenmasse. Die Resultate werden schliesslich auf einen Eisencylinder angewandt. Ok.

E. Weyr. Ueber die Curve der grössten und kleinsten electromagnetischen Wirkung. Prag. Ber. 1869. 59-63.

Lässt man zwischen zwei Punkten M_1, M_2 einer Curve einen elektrischen Strom von der Intensität Eins fliessen, so übt derselbe auf einen Punkt 0 in der Ebene der Curve, in welchem die magnetische Masseneinheit concentrirt ist, eine Kraft aus, deren Richtung normal zu der Ebene des Stromes ist.

Der Ausdruck für die von einem Stromelement auf 0 ausgeübte Kraft ist, wenn φ und r Polarcoordinaten sind, deren Pol 0 ist, $\frac{d\varphi}{r}$. Die Gesammtwirkung des Stromes auf den Punkt 0 wird also durch das Integral dargestellt

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r}.$$

Es soll nun unter allen Curven von gegebener Länge L, welche zwischen den beiden festen Punkten M_1 und M_2 eingeschaltet werden können, diejenige gefunden werden, für welche der durchfliessende Strom auf den Punkt 0 die grösste oder

kleinste Wirkung ausübt. Es soll also diejenige Curve bestimmt werden, für welche

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r} = \begin{cases} \text{max.} \\ \text{min.} \end{cases}$$

ist, während

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = L \text{ ist.}$$

Es kommt dies darauf hinaus, dass

$$\varkappa W + L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \frac{\varkappa}{r} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \right\} d\varphi$$

ein max. oder min. werden soll. $\varkappa$ bedeutet eine Constante, deren Bestimmung aus dem Problem selbst hervorgeht. Setzen wir

$$\frac{\varkappa}{r} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = V,$$

$$\frac{dV}{dr} = N,$$

$$\frac{d\,\frac{dV}{dr}}{d\varphi} = P_1,$$

so ist die Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$N - \frac{dP_1}{d\varphi} = 0,$$

oder entwickelt:

$$-\frac{\varkappa}{r^3} = \frac{r\frac{d^2r}{d\varphi^2} - 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

oder endlich, wenn wir den Krümmungsradius der Curve mit ϱ bezeichnen:

$$\varkappa\varrho = r^3.$$

In dieser Form stellt die Gleichung den merkwürdigen Satz dar, dass der Krümmungshalbmesser der Curve der grössten oder kleinsten elektromagnetischen Wirkung in jedem Punkte dem Cubus des Radiusvector proportional ist. Die Integration der Gleichung

$$N - \frac{dP_1}{d\varphi} = 0$$

wird ohne Schwierigkeit ausgeführt; sie liefert

$$V = c + \int \left(\frac{dP_1}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + P_1 \frac{d^2r}{d\varphi^2} \right) d\varphi,$$

oder mit Hülfe partieller Integration

$$V = c + P_1 \frac{dr}{d\varphi}.$$

Setzt man für V und P_1 die betreffenden Werthe ein, so erhält man leicht:

$$\varphi = c_1 + \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^4}{cr - \varkappa} - 1}}.$$

Ht.

E. du Bois-Reymond. Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. Berl. Monatsber. 1869. 807-852. 1870. 537.

Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx}{dt} + n^2 x = 0$$

liefert bekanntlich, je nachdem

$$\varepsilon^2 - n^2 \gtrless 1,$$

eine Exponentialfunction oder eine trigonometrische Function. Da diese Differentialgleichung die Schwingungen eines Magnets bei kleinen Amplituden darstellt, so lassen sich theoretisch zwei verschiedenartige Bewegungen voraussehen: die gewöhnlichen Schwingungen um die Gleichgewichtslage, oder die aperiodische Bewegung, d. h. nach Verschwinden einer ablenkenden Kraft die asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage. Den letzteren Fall hat der Verfasser experimentell verwirklicht. Er discutirt ausserdem die Bewegungserscheinungen für diesen Fall unter verschiedenen Anfangszuständen, d. h. bei verschiedenen Ablenkungen, und Anfangsgeschwindigkeiten, aus denen die Constanten des Integrals zu bestimmen sind.

Eine sehr ausführliche Erörterung erfährt die folgende Frage:

Denkt man sich einen aperiodischen Magnet aus einer grossen Ablenkung zurückfallend, wird er den Nullpunkt überschreiten oder nicht? Nachdem bereits in der ersten Abhandlung diese Frage experimentell und theoretisch dahin entschieden ist, dass eine Geschwindigkeit, die der Magnet allein der zurückführenden Kraft des Erdmagnetismus verdankt, ihn nie über denselben hinausführen kann, wird dasselbe Problem in der zweiten Abhandlung nochmals und allgemeiner gelöst. Es wird nämlich zunächst die Differentialgleichung als gültig auch noch für unendlich grosse Werthe von x und t vorausgesetzt und daraus eine Anzahl Beziehungen hergeleitet zwischen der Ablenkung x, der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ und der Zeit t. An sich giebt diese Betrachtung Verhältnisse, die mit den Bedingungen des Versuchs nicht übereinstimmen; wohl aber ist es möglich, denselben innerhalb gewisser Zeitgrenzen zu genügen. Man gelangt durch diese verallgemeinerte Betrachtung zu denselben Resultaten, wie in der ersten Abhandlung. Ok.

Linder. Sur le magnétisme terrestre. Mém. de Bordeaux VII. XXXIX. 1869.

Denkt man sich an irgend einem Beobachtungsort die Inclinationsnadel bis zu der Ebene des Erdaequators verlängert, so entsteht eine Curve in derselben, wenn die Inclinationsnadel ihre Richtung verändert. Nach der Angabe des Verfassers sollen diese Curven, soweit bis jetzt die Beobachtungen reichen, annähernd Ellipsen sein. Auf Grund dieser Bemerkung sucht er den Erdmagnetismus zu erklären durch Annahme zweier magnetischer Pole im Innern der Erde, welche ebenfalls Curven zweiten Grades beschreiben, und deren Verbindungslinie beweglich und nicht parallel der Erdaxe ist. Bei weiterem Eingehen auf den Verlauf der Isoclinen und Isogonen sieht sich der Verfasser indess gezwungen noch weitere lokale magnetische Kräfte anzunehmen, die ihren Sitz in der Nähe der Erdoberfläche haben.

Ok.

R. Most. Ueber die Beziehung der Pole zur magnetischen Vertheilungscurve. Pogg. Ann. CXXXVI. 137-140. 1869.

Methode, die Pole eines Magnets durch geometrische Construction zu finden. Ok.

J. Clerk Maxwell. On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress. Proc. of S. M. S. II. 58-60, 1869.

Siehe Abschn. IX. Cap. 5. p. 621.

Faye. Sur le log à boussole à propos du naufrage du Glenorchy. C. R. LXIX. 779. 1869.

Faye. Seconde Note sur le log à boussole. C. R. LXIX. 841-845. 1869.

Von mathematischem Interesse ist in den beiden Noten nur die Bemerkung, dass die durch das Eisen der Schiffe verursachte Störung der Declination der Compassnadel sich durch die ersten Glieder

$$\xi' - \xi = a_0 + a_1 \sin(\xi + A_1) + a_2 \sin 2(\xi + A_2) + \cdots$$

einer Fourier'schen Reihe mit hinreichender Annäherung darstellen lasse. ξ und ξ' sind die Ablesungen am Compasskreise, welche der wahren und der gestörten Richtung der Nadel entsprechen, die übrigen Grössen sind Constanten, welche von der Lage des Beobachtungsortes und dem magnetischen Zustande des Eisens im Schiffe abhängen. B.

Capitel 4.

Wärme.

G. Hoffmann. Physikalische Studien. I. Ueber die thermische Molecularbewegung. Pr. Dresden. 1870.

Historische Besprechung der Arbeiten von Redtenbacher, Clausius und Puschl („Das Strahlungsvermögen der Atome, als

Grund der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Körper.") Wn.

W. C. Wittwer. Entwurf einer Theorie der Gase. Schlömilch Z. XIV. 81-96. 1869.

Fortsetzung der Untersuchung über die Consequenzen der vom Verfasser im Jahre 1868 (siehe Fortschr. d. M. I. 349-350) aufgestellten Hypothese über die Einwirkung und Anordnung von Massentheilchen und Aethermolecülen, namentlich in Beziehung auf Gase. Mathematisches Interesse bietet die Arbeit nicht. O.

Chaucourtois. De l'interprétation des imaginaires en Physique mathématique. C. R. LXVIII. 127-131. 1869.

Der Verfasser stellt den Satz auf: Stellt man die Geschwindigkeit, die ein Körper durch die Wirkung der Schwerkraft erlangt, durch reelle Grössen dar, so sind die das plötzliche Aufhören der Bewegung begleitenden Wärmeerscheinungen durch imaginäre Grössen darzustellen; und für diesen Satz wird folgender Beweis gegeben. Es sei v die Geschwindigkeit, m die Masse eines fallenden unelastischen Körpers, so ist mv^2 die lebendige Kraft der Bewegung. Hört diese Bewegung plötzlich auf, so setzt sich die lebendige Kraft in Wärme um. Bei der Wärmebewegung sei w die Geschwindigkeit eines Molecüls μ, so ist $\sum \mu w^2$ die lebendige Kraft dieser Bewegung. Die algebraische Summe der beiden lebendigen Kräfte soll nun gleich Null sein, woraus für w ein rein imaginärer Werth folgt. Diese Schlussfolge scheint auf einem Missverständniss des Satzes von der lebendigen Kraft zu beruhen; die richtige Anwendung des Satzes kann höchstens $mv^2 = \sum \mu w^2$ ergeben.

Was der Verfasser sonst über die Anwendung des Imaginären in der mathematischen Physik sagt, so mag in manchen Fragen die Einführung des Imaginären von formellem Vortheil sein, indem dadurch zwei Gleichungen in eine einzige zusammengezogen werden können. Aber Sätze aufzustellen, wie den folgenden: „Die Imponderabilien in der Physik sind

das Imaginäre in der Mathematik", erscheint mindestens als zwecklos. Wn.

Colnet-d'Huart. Mémoire sur la théorie mathématique de la chaleur et de la lumière. Luxembourg. 1870.

Siehe Abschnitt XI., Cap. 2. p. 780.

F. Mohr. Allgemeine Theorie der Bewegung und Kraft, als Grundlage der Physik und Chemie. Braunschweig. 1869.

Die vorliegende Darstellung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft und seiner Anwendungen ist durchaus populär gehalten. Es finden sich in derselben daher keinerlei mathematische Ausführungen, gegen welche der Verfasser mehrfach ein gewisses Misstrauen an den Tag legt. Derselbe befleissigt sich dagegen einer originellen Form des Ausdrucks, wobei es an einer scharfen Kritik anderer Darstellungen nicht fehlt. Doch müssen wir hinzufügen, dass auch der Herr Verfasser schwerlich mit allen seinen Behauptungen und Definitionen wird auf allgemeine Zustimmung rechnen können. Ok.

R. Most. Ein einfacher Beweis des zweiten Wärmegesetzes. Pogg. Ann. CXXXVI. 140-143. 1869.

L. Boltzmann. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Most: „Ein Beweis des zweiten Wärmegesetzes." Pogg. Ann. CXXXVII. 495-496. 1869.

R. Most. Entgegnung auf die Bemerkung des Herrn L. Boltzmann. Pogg. Ann. CXXXVIII. 566-570. 1869.

L. Boltzmann. Erwiderung an Herrn Most. Pogg. Ann. CXL. 635-644. 1870.

Der Versuch Most's einen möglichst einfachen Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie zu liefern, hat eine Discussion zwischen ihm und Boltzmann hervorgerufen, die in den angeführten Arbeiten enthalten ist. Most sieht die Wärme als ein Product zweier Variabeln an, des Volumens

(d. h. der Anzahl Volumeinheiten) eines einfachen Gases und der absoluten Temperatur desselben und versucht allein vermittelst dieser Art der Darstellung einen Beweis des zweiten Hauptsatzes zu geben, ohne dazu einer weiteren Hypothese zu bedürfen. Wir glauben indess als Resultat der Discussion mit Boltzmann annehmen zu müssen, dass der fragliche Beweis nicht geliefert ist, und dass man die Ausführungen Most's höchstens als Versuche einer Verdeutlichung ansehen darf, die aber den Satz selbst als bewiesen voraussetzt. Ok.

A. Kurz. Notiz zu dem Aufsatz: Eine Bestimmung der specifischen Wärme der Luft von Kohlrausch. Pogg. Ann. CXXXVIII. 335-336. 1869.

L. Boltzmann. Ueber die von Gasmassen geleistete Arbeit. Pogg. Ann. CXL. 254-263. 1870.

A. Kurz. Ueber die von bewegten Gasmassen geleistete Arbeit, resp. Bemerkung zum Aufsatz des Dr. Boltzmann. Pogg. Ann. CXLI. 159-160. 1870.

Die citirten Arbeiten knüpfen an eine Experimentaluntersuchung von Kohlrausch über das Verhältniss der specifischen Wärmen der Luft an.

Während Kurz die Ansicht aufstellt, dass beim Verdünnen der Luft in einer Luftpumpe von der Luft im Recipienten keine Arbeit geleistet wird, indem dabei der Fall des Einströmens der Luft in einen leeren Raum vorliegt, sucht Boltzmann durch eine ausführliche Rechnung nachzuweisen, dass die Druckverhältnisse in der eingeschlossenen Luftmasse bei langsamer Bewegung des Kolbens sich annähernd so verhalten, als ob die Luft unmittelbar von dem ersten Gleichgewichtszustand in den zweiten, — den verdünnten —, übergegangen wäre. Jedenfalls unterscheidet sich der Luftdruck in unmittelbarer Nähe des Kolbens immer nur sehr wenig von demjenigen in der übrigen Masse. Die Luft leistet also Arbeit bei der Ausdehnung. — Der angestellten Rechnung liegt die einfache Differentialgleichung des Schalls für den Fall einer mit Luft erfüllten Röhre zu Grunde.

Die Entgegnung von Kurz bestreitet, ohne Angabe von Gründen, die Resultate der Boltzmann'schen Rechnung.

Ok.

J. Loschmidt. Der zweite Satz der mechanischen Wärmetheorie. Wien. Ber. LIX. 395-412. 1869.

Nachdem der Verfasser eine Reihe von Bedenken gegen den fraglichen Satz vorgebracht hat, sucht er zu einer neuen Begründung desselben zu gelangen. Hierzu wird zunächst der Begriff der Temperatur fixirt. Die absolute Temperatur eines Körpers, aufgefasst als mittlere lebendige Kraft der Molecüle desselben, kann in doppelter Weise in einen mathematischen Ausdruck gebracht werden. Entweder ist:

$$T = \frac{1}{N} \Sigma \frac{mv^2}{2},$$

wo N die Anzahl der Molecüle ist, und die Summe die Gesammtheit aller Molecüle begreift; oder es ist:

$$T = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2} dt,$$

wo v die variable Geschwindigkeit eines Atoms, t_2 und t_1 zwei Zeitmomente sind. Auf Grund dieser letzten Definition und mit einer einfachen Annahme über die Art der Bewegung der Atome hat schon Boltzmann einen neuen Beweis des zweiten Hauptsatzes gegeben, der hier reproducirt wird.

Im zweiten Theil seiner Arbeit wendet der Verfasser den eben bewiesenen Satz auf eine Salzlösung an und sucht zu einem Ausdruck zu gelangen für die Anziehung zwischen Wasser- und Salz-Theilchen.

Ok.

Zech. Einige Notizen (über Wärme) Carl Rep. VI. 389-390. 1870.

Kurzer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie in seiner einfachsten Form.

Ok.

K. Puschl. Ueber Wärmemenge und Temperatur der Körper. Wien. Ber. LXII. 171-197. Carl Rep. VI. 363-386. 1870.

Die Arbeit soll einen neuen Beitrag zu der Frage geben: Ist die Wärme anzusehen als Bewegungszustand der Atome eines Körpers oder des Aethers zwischen denselben? Der Verfasser kommt durch eine Reihe sehr gewagter Hypothesen zu dem Resultate, dass man im Allgemeinen beide Bewegungszustände anzunehmen habe, dass speciell bei permanenten Gasen die lebendige Kraft des Aethers grösser sei als diejenige der Atome.

Ok.

M. Zanotti. Lezioni sulla termodinamia. Battaglini G. VII. 160-173; VII 351-368; VIII 60-83. 1869. 1870.

Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie mit Anwendungen auf die Gase und Dämpfe. Ok.

R. Clausius. Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Pogg. Ann. CXLI. 124-131. C. R. LXX. 1314-1319. Carl Rep. VI. 197. 1870.

Sind bei der Bewegung eines Systems von Punkten, das von beliebigen Kräften angegriffen wird, die Bedingungen erfüllt: dass die Bahnen der einzelnen Punkte innerhalb eines begrenzten Raumes, die Geschwindigkeiten innerhalb endlicher Grenzen bleiben, so lässt sich mit Hülfe einfacher Transformationen der Grundgleichungen der Mechanik der Satz beweisen:

$$\Sigma \frac{1}{t}\int_0^t \frac{mv^2}{2}\,dt = \Sigma\left[-\frac{1}{2t}\int_0^t \{X\cdot x + Y\cdot y + Z\cdot z\}\,dt\right].$$

Die linke Seite giebt die mittlere lebendige Kraft des Systems für einen gewissen Zeitabschnitt von 0 bis t. Die rechte Seite giebt für dieselbe Zeit den mittleren Werth des Ausdrucks:

$$-\Sigma\{X\cdot x + Y\cdot y + Z\cdot z\}.$$

Führt man für diesen Mittelwerth den Namen „Virial“ ein, so lautet der gefundene Satz:

„Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist gleich dem Virial“.

Indem der Verfasser auf die Aehnlichkeit mit dem bekannten Satz:

$$d\left(\sum \tfrac{1}{2} mv^2\right) = -\sum \{X dx + Y dy + Z dz\}$$

aufmerksam macht, sucht er auch für diesen einen analogen, sprachlichen Ausdruck zu gewinnen. Ist der Ausdruck rechter Hand ein vollständiges Differential, so kann man beiderseits integriren. Nennt man dann die rechts erhaltene Function von x, y, z: „Ergal", so lautet der Satz:

„Die Summe aus der lebendigen Kraft und dem Ergal ist constant".

Ein spezieller Fall des Ergals ist das Potential. — Die Bewegung der Atome, die man Wärme nennt, muss, wie sie auch sonst beschaffen sein mag, jedenfalls den anfangs gestellten Bedingungen genügen. Der Satz gilt also für dieselbe. Wie nun der zuletzt genannte Satz durchaus analog dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ist, so stellt sich der erste dem zweiten Hauptsatz zur Seite. Ok.

J. Moutier. Sur la détente des gaz. C. R. LXIX. 1137. 1869.

Dehnt ein Gas sich aus, ohne dass es Wärme empfängt oder abgiebt, so müssen Volumen und Druck durch die Relation verbunden sein:

$$p \cdot v^m = \text{Const.},$$

wo m der Quotient der specifischen Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen ist. Nach einer kurzen Ableitung dieses Gesetzes geht der Verfasser zu einer Vergleichung desselben mit einer experimentellen Arbeit von Cazin über.

Ok.

G. R. Dahlander. De l'effet mécanique exercée par la vapeur d'eau saturée pendant la détente. Ann. de Ch. et de Ph. (4) XVI. 134-142. 1869.

Ausgehend von einer, von Clausius aufgestellten Formel für die vom Wasserdampf bei seiner Ausdehnung geleistete Arbeit berechnet der Verfasser eine umfassende Tabelle für diese Arbeit unter verschiedenen Druck- und Temperatur-Verhältnissen.

Ok.

G. R. DAHLANDER. Några undersökningar, beträffande den mekaniska värmetheorien. Öfvers af Förh. Stockh. 1870. 457-469. 941-951.

Der Aufsatz behandelt die geometrische Darstellung der thermischen Zustandsänderungen eines Körpers, dessen Dimensionen entweder unendlich klein, oder dessen Theile in gleichem Zustande gedacht werden. Ein Punkt 0, dessen rechtwinklige Coordinaten v (Volumen der Gewichtseinheit), p (Druck) und T (absolute Temperatur) sind, bestimmt einen Zustand, und eine Relation zwischen ihnen, sofern eine solche existirt, eine Fläche, die sich die Zustandsfläche nennen lässt.

Ein unendlich kleines Wärmeincrement, Ueberschuss der aufgenommenen über die abgegebene Wärme, hat zunächst die Form

$$\partial Q = c \partial T + l \partial v.$$

Geht man auf ein neues Coordinatensystem der x, y, z über, dessen Anfangspunkt in 0 liegt, und wo die Coordinate z in der Richtung der Flächennormale als unendlich klein zweiter Ordnung nicht in Rechnung kommt, so wird der Ausdruck

$$\partial Q = Mx + Ny.$$

Setzt man nun

$$x = \partial s \cos\mu;\ y = \partial s \sin\mu;\ M = \varrho \sin\nu;\ N = \varrho \cos\nu,$$

so wird

$$\partial Q = \varrho \sin\omega\, \partial s \quad (\omega = \mu + \nu).$$

Zur Richtung der x nimmt man am besten die der Tangente der adiabatischen Curve. Die gleiche Form lässt sich herstellen für den Ausdruck der inneren Wärmeänderung, wo nur $l - Ap$ an die Stelle von l tritt, unter A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit verstanden. Beschreibt man dann auf der Berührungsebene zwei gleiche Kreise, die einander, und zwischen sich die adiabatische Curve berühren, und zwei andere ebenso zu beiden Seiten der isodynamischen Curve, so drückt jede Sehne des einen oder anderen Kreispaares von 0 aus gezogen, nach Richtung und relativer Grösse beziehungsweise die totale oder innere Wärmeänderung aus. Ferner ergiebt sich der Satz:

Die totale Wärmemenge, die bei einer Zustandsänderung mehr aufgenommen als abgegeben wird, ist äquivalent der

Arbeitsleistung einer Kraft $\frac{\varrho}{A}$ in der Berührungsebene normal zur adiabatischen Curve, welche den dem Zustande entsprechenden Punkt längs der die Aenderung darstellenden Bahn führt. Das Analoge gilt von der inneren Wärme, die bei einer Aenderung erzeugt wird, wo dann ϱ seinen neuen Werth annimmt.

H.

F. Massieu. Sur les fonctions caractéristiques des divers fluides. C. R. LXIX. 858. 1067. 1869.

Reech. Équations fondamentales dans la théorie mécanique de la chaleur. C. R. LXIX. 913. 1869.

J. Bertrand. Rapport sur un mémoire de Mr. Massieu: „Sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs“. C. R. LXXI. 257-260. 1870.

Durch einfache Transformation der beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie gelangt Massieu zu einer Function zweier Variabeln Ψ, — er nennt sie charakteristische Function —, deren Differential durch die Gleichung bestimmt ist:

$$d\Psi = \frac{U}{T^2} \cdot dt + \frac{A \cdot p}{T} \cdot dv.$$

Die beiden unabhängigen Variabeln sind hier Temperatur und Volumen des in Frage kommenden Körpers. T ist die absolute Temperatur, A das mechanische Wärmeäquivalent, U endlich eine Function zweier Variabeln (z. B. auch von v und t), die man auch Wirkungsfunction (Kirchhoff) oder mechanische Energie (W. Thomson) genannt hat. — Alle in Bezug auf Zustands- oder Wärme-Aenderungen wesentlichen Grössen eines Körpers lassen sich vermittelst dieser Function Ψ berechnen.

Man erhält eine andere charakteristische Function, wenn man p und t als unabhängige Variabeln nimmt.

Die fraglichen Functionen lassen sich bestimmen für Gase, gesättigte und überhitzte Dämpfe. Bei den letztgenannten Körpern treten als Constanten in die Functionen:

1) die specifische Wärme der Flüssigkeit,
2) die specifische Wärme des Dampfes bei constantem Druck,
3) die Verdampfungswärme, welche alle durch den Versuch gegeben sein müssen.

Anknüpfend an die Arbeiten von Massieu weist Reech auf sein Werk hin (Théorie des machines motrices et des effets mécaniques de la chaleur), das dieselben Resultate geben soll, und zeigt dies an den Hauptgleichungen desselben.

Ok.

T. Hopkinson. On a proposition in thermo-dynamics. Messenger V. 162-163.

Neuer Beweis der Gleichung

$$\frac{dL}{dt} + c - c' = \frac{L}{f}.$$

Glr. (O.)

F. Lippich. Ueber die Breite der Spectrallinien. Pogg. Ann. CXXXIX. 465-479. 1870.

Nähert sich ein leuchtender Punkt dem Beobachter, so wird bekanntlich die Wellenlänge des ausgesandten Lichts verkürzt, und die Farbe demgemäss verändert. Der Verfasser benutzt diese Thatsache, um die Veränderungen zu erklären, die das Spectrum eines glühenden Gases durch Erhöhung des Druckes oder der Temperatur erfährt. Er sieht dabei die einzelnen in linearer Bewegung befindlichen Molecüle des Gases als die leuchtenden Punkte an, und findet durch Rechnung die Aenderungen der Intensität eines hellen Streifens im Spectrum, die eine Folge dieser Bewegungen sind. Als Resultat ergiebt sich besonders eine Verbreiterung der Streifen bei erhöhter Temperatur, wie sie durch Versuche nachgewiesen ist. Ok.

E. Mulder. Geschwindigkeit der Molecularbewegung und des Schalles in Gasen. Pogg. Ann. CXL. 288-297. 1870

Der Verfasser sucht eine Beziehung zwischen der Schallgeschwindigkeit in einem Gase und der auf Grund der Bewegungstheorie der Gase berechneten Geschwindigkeit der Molecüle.

Da ein innerer Zusammenhang zwischen beiden sich aus der Abhandlung nicht ergiebt, so glauben wir die empirischen Formeln, die er aufstellt, übergehen zu können.

Ok.

F. Zöllner. Ueber die Natur und physische Beschaffenheit der Sonne. Pogg. Ann. CXLI. 353-375. 1870.

Der Verfasser untersucht die an der Sonnenoberfläche auftretenden Druck- und Temperatur-Verhältnisse, auf Grund einer besonderen Vorstellung, die er sich über die Protuberanzen gebildet hat. Er sieht dieselben an als glühende Wasserstoffmassen, die in Folge grosser Druckverschiedenheit aus engen Oeffnungen der Sonnenoberfläche hervordringen. Hierauf können die Bewegungsgleichungen der mechanischen Wärmetheorie angewandt werden. Eine Discussion der erhaltenen Resultate scheint hier nicht am Orte zu sein. Ok.

C. Neumann. Ueber die mechanische Energie der Schwefelsäure. Leipz. Ber. XXI. 213-221. 1869.

Im Anschluss an die neuesten experimentellen Arbeiten J. Thomson's über chemische Wärmewirkungen stellt der Verfasser zunächst eine Formel auf für die Wärmeentwickelung bei einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser; sodann mit Bezugnahme auf die Abhandlung Kirchhoff's (Pogg. Ann. CIII.) eine Formel für die mechanische Energie eines Gemisches von Schwefelsäure und Wasser, wenn die Energieen der Bestandtheile bekannt sind. Die Definition der Energie einer Function zweier Variabeln findet man in der Arbeit Kirchhoff's oder auch Clausius' (Pogg. Ann. CXVI.). Ok.

K. von der Mühll. Ueber den stationären Temperaturzustand. Clebsch Ann. II. 643-649. 1870.

Ausgehend von der Fourier'schen partiellen Differentialgleichung für geleitete Wärme, beweist der Verfasser die beiden Sätze:

1) Bleibt die Temperatur der Umgebung eines Körpers ungeändert, so wird, welches auch sein Anfangszustand gewesen ist, die Temperatur des Körpers nach sehr langer Zeit stationär, d. h. von der Zeit unabhängig.

2) Auch wenn die Temperatur der Umgebung mit der Zeit veränderlich ist, so wird die Temperatur eines Körpers nach langer Zeit zwar nicht stationär, aber doch von seinem Anfangszustand unabhängig werden.

Ok.

J. BOUSSINESQ. Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur dans les milieux homogènes, chauffés en un de leurs points. Liouville J. (2) XIV. 265-297. 1869.

J. BOUSSINESQ. Construction générale des courants de chaleur en un point quelconque d'un milieu athermane, homogène ou hétérogène. C. R. LXIX 329-333. 1869.

Ueber einen Auszug der vorliegenden ausführlichen Arbeit ist schon berichtet worden (siehe Fortschr. d. M. I. 380). Die Aufgabe, mit der sich der Verfasser beschäftigt, ist die Construction der Flächen gleicher Temperatur und der Curven der geleiteten Wärme in einem krystallinischen Medium, das in einem Punkt erwärmt ist. Er löst diese Aufgabe mit Hülfe zweier Ellipsoide: des Lamé'schen Hauptellipsoids und des von ihm selbst zuerst benannten Ellipsoids der linearen Leitungsfähigkeit.

So breitet sich in einem unbegrenzten Medium, das in einem Punkt auf höherer Temperatur erhalten wird, die Wärme in Spiralen aus, die auf Kegeln liegen, deren Spitzen in dem erwärmten Punkt sich befinden. Die Directrix jedes Kegels ist einfach mit Hülfe der beiden Ellipsoide zu finden.

Die Flächen gleicher Temperatur sind ähnlich und ähnlich gelegen mit dem Hauptellipsoid. Ausser dem unbegrenzten Medium werden noch die besonderen Fälle der Ausbreitung der Wärme in dünnen Cylindern und in dünnen, ebenen Platten erörtert.

Ok.

E. Mathieu. **Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques.** Liouville J. (2) XIV. 65-102. C. R. LXVIII. 590-592. 1869.

Es wird stets vorausgesetzt, dass in der Richtung der Seite der Cylinder keine Bewegung stattfindet, so dass die Betrachtung sich auf deren Basis in der Ebene der xy reducirt. Bezeichnet v die Temperatur im Punkte (xy), so ist deren Veränderung bestimmt durch

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=k\frac{\partial v}{\partial t},$$

und zwar lässt sich v aus Particularlösungen von der Form

$$v=ue-\frac{m^2}{k}t$$

zusammensetzen, wo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-m^2 u.$$

Sind die Basen der den Körper von aussen und innen begrenzenden Cylinder zwei excentrische Kreise, so lassen sich für x, y durch die Substitution

$$x=c\,\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta};\ y=\frac{2c\sin\beta}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta}$$

immer zwei Parameter α, β einführen, der Art, dass die Curvensysteme $\alpha=$const., $\beta=$const. sich rechtwinklig schneiden, und die Grenzkreise dem ersteren System angehören. Es werden zwei Fälle der Grenzbestimmung in Betracht gezogen: 1) wo die Temperatur an beiden Grenzen constant und gleich erhalten wird; 2) wo die Wärme in ein Medium von constanter Temperatur ausstrahlt. Die Lösung geschieht durch Reihenentwickelung nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von β und nach Potenzen der Grösse $\alpha-a$, wo a den grössten Werth von α bezeichnet. Es folgt die Anwendung auf den vollen Cylinder für den Fall constanter Temperatur an der Oberfläche.

Sind die Basen der Cylinder Lemniscaten, so gelangt man durch Einführung der zwei Parameter:

$$\alpha = \log \frac{c^2}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}}$$

$$\beta = \text{arc}\, tg\, \frac{y}{x+c} + \text{arc}\, tg\, \frac{y}{x-c}$$

zu zwei orthogonalen Systemen von Curven $\alpha =$ const. und $\beta =$ const., deren ersteres für zwei Werthe von α in die Grenzlinien übergeht, letzteres Hyperbeln bildet.

Mit den genannten zwei Fällen der Begrenzung wird, wie der Verfasser im C. R. hervorhebt, der Kreis derjenigen Figuren überschritten, deren Berechnung an dem Umstande eine Erleichterung geniesst, dass die einfache Particularlösung in Factoren zerfällt, deren jeder nur von einer Coordinate abhängt, wie es beim Ellipsoid und dem elliptischen Cylinder nach Lamé's Berechnung stattfindet. H.

E. Stahlberger. Ueber die Berechnung der mittleren Tagestemperatur aus der höchsten und tiefsten Temperatur. Schlömilch Z. XV. 475-479. 1870.

Die an sich unbestimmte Aufgabe wird durch folgende Annahmen zu einer bestimmten gemacht. Die Temperaturcurve (die Zeit als Abscisse, die Temperatur als Ordinate genommen) besitzt bei normalem Verlauf zwischen zwei auf einander folgenden Minimis von gleicher Grösse ein Maximum und zwei dasselbe einschliessende Wendepunkte. Die vier so entstehenden Stücke der Curve gehören Sinuscurven an von der Form $y = a \cdot \sin mx$, welche in jenen ausgezeichneten Punkten mit der Temperaturcurve gemeinschaftliche Tangenten haben. Die aus diesen Annahmen resultirende Formel für die mittlere Temperatur enthält ausser der höchsten und niedrigsten Tagestemperatur nur noch das den beiden Wendepunkten entsprechende Zeitintervall.

B.

H. Resal. Calcul des épaisseurs des fonds plats et bombés des chaudières cylindriques. C. R. LXVIII. 175-176. 1869.

Auszug aus einer Arbeit mathematischen Inhalts. Derselbe

giebt indess nur die Resultate, nicht den Weg, auf dem sie gewonnen sind, an. O.

W. J. M. Rankine. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. Trans. of London. CLX. 277-288. 1870.

Cly.

W. J. M. Rankine. On the thermal energy of molecular vortices. Trans. of Edinb. XXV. (II.) 557-566. 1869.

In einer vor der Köngl. Ges. zu Edinburgh im Jahre 1850 gelesenen Abhandlung über die mechanische Wirkung der Wärme (Trans. XX.) hat der Verfasser gezeigt, dass wenn merkbare oder thermometrische Wärme in der Bewegung melecularer Wirbel besteht, welche auf besondere Weise mit oscillatorischen Bewegungen combinirt werden, unter dieser Annahme die Principien der Thermodynamik und verschiedene Beziehungen zwischen Wärme und Elasticität durch Anwendung der Gesetze der Dynamik gewonnen werden. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist nun zu zeigen, wie die allgemeine Gleichung der Thermodynamik und andere Sätze aus der Hypothese von den molecularen Wirbeln abgeleitet werden, und zwar frei von speciellen Voraussetzungen über Gestalt und Anordnung der Wirbel und über die Eigenschaften der Materie in denselben. Das Resultat ist: „Thermometrische Wärme besteht in einer Bewegung der Theilchen der Körper in Strömen, die mit constanter oder periodisch fluctuirender Geschwindigkeit circuliren.“ Dies hat zur Folge, dass die zwischen den Theilchen wirkenden Kräfte diese Bewegung fortzupflanzen vermögen.

Cly. (M.)

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

R. Wolf. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich. I. Bd. 1869-1870.

Der Verfasser hat die der praktischen Geometrie verwandten Kapitel XXI: „Die Messungen mit Kette, Kreuzscheibe und Messtisch“ und XXII: „Die Messungen mit Theodolith, Spiegelsextant und Nivellirinstrument“ in den ersten Band aufgenommen, und es wird die ausschliesslich die Erdmessung behandelnde Geodäsie im II. Bande folgen. Das vorgehende Kapitel XX. enthält „die Methode der kleinsten Ouadrate“. Auch diese drei Abschnitte enthalten, sowie das Buch überhaupt, zahlreiche literarisch-historische Notizen. M.

C. M. Bauernfeind. Elemente der Vermessungskunde. Stuttgart. 1869.

Die mathematischen Abschnitte dieses ungemein reichhaltigen Lehrbuches sind durchgehends möglichst elementar gehalten und überall so weit geführt, als es anging, ohne auf das Gebiet der höheren Geodäsie überzugreifen. Dagegen wird man von den für technische und staatswirthschaftliche Vermessungen nothwendigen Theorien und Methoden wohl kaum etwas Wesentliches vermissen.

B.

H. Doergens. Theorie und Praxis der geographischen Kartennetze. Theil I. Die perspectivischen Projectionen. Berlin 1870.

Der vorliegende erste Theil des Werkes giebt theoretische Auseinandersetzungen über die orthographische und stereographische Projection. Des Weiteren werden die Projectionen von de la Hire, Parent, Lowry und James besprochen nebst Anwendung auf das Kartenzeichnen. Die Methode ist analytisch.

O.

A. Grunert. Theorie des Polarplanimeters in strenger elementar-mathematischer Entwickelung. Grunert Arch. LI. 385-422. 1870.

Die hier entwickelte Theorie ist dieselbe, wie die von dem Erfinder des Instrumentes, Prof. Amsler, gegebene, nur ist sie mit der bekannten Gründlichkeit des Herrn Verfassers durchgeführt. B.

Lüdde. Die Sonne im Dienste der Kartographie. Berlin, Peiser 1869.

H. Elsching. Kurzgefasste Anleitung zum barometrischen Nivelliren. Salzburg, Glamer. 1869.

F. Bournier. Formule de nivellement trigonométrique. Bull. d. l. S. Vaud. X. 231. 1869.

Ch. Wiener. Die Berechnung der Veränderungen in einem veränderlichen Dreiecksnetze. Schlömilch Z. XIV. 62-65. 1869.

Entwickelung von Differentialformeln für die Aenderungen der Bestimmungsstücke eines ebenen Dreiecksnetzes, wenn in demselben einzelne Netzpunkte kleine Verschiebungen erleiden.

B.

E. Helmert. Beiträge zur Theorie der Ausgleichung trigonometrischer Netze. Schlömilch Z. XIV. 174-208. 1869.

I. Directe Ausgleichung trigonometrischer Netze.

Die Coordinaten der Stationen eines trigonometrischen Netzes werden gewöhnlich erst nach erfolgter Ausgleichung seiner Seiten und Winkel ermittelt. Der Verfasser dieser Beiträge macht nun darauf aufmerksam, dass es von Vortheil sein kann, mit Vermeidung dieses Umweges die Coordinaten der Netzpunkte direct auszugleichen, wenn sehr viel mehr Richtungen eingeschnitten werden, als zur Construction des Netzes nothwendig und hinreichend sind. Denn bei dem gewöhnlichen Verfahren wächst die Anzahl der schliesslich aufzulösenden Gleichungen mit jeder neu hinzutretenden überschüssigen Richtung, während sie bei der directen Ausgleichung der Coordinaten nur von der Anzahl der Netzpunkte abhängt und ein Minimum ist.

Der Verfasser entwickelt dem entsprechend zunächst unter Voraussetzung von Polarcoordinaten die Formeln für die directe Ausgleichung eines Netzes, welches auf einer Kugeloberfläche liegt, und erläutert die Vorschriften für eine tabellarische Anordnung der ganzen Rechnung an einem fingirten Beispiel. Hieran schliessen sich Vorschriften über die beste Art und Weise, vorhandene Basismessungen in die Ausgleichung hineinzuziehen, ferner Formeln für die Uebertragung eines sphäroidischen Netzes von mässigen Dimensionen auf die Kugeloberfläche, und endlich Bemerkungen über das Aneinanderschliessen von Einzelnetzen.

II. Ueber die Ausgleichungsmethode von Schleiermacher und Untersuchung ihrer Anwendbarkeit auf Richtungsbeobachtungen.

Der Verfasser sucht nach einer kurzen Auseinandersetzung der genannten Methode die Ansicht zu begründen, dass sie auf Richtungsbeobachtungen angewendet gegen andere Methoden zurückstehe.

III. Einige allgemeine Bemerkungen zu der Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen.

Die Bemerkungen beziehen sich auf die Art und Weise, wie man am richtigsten die relative Grösse der eigentlichen Beobachtungsfehler und der Theilfehler des Instruments bei der Ausgleichung der einzelnen auf einer Station eingeschnittenen Gyri berücksichtigt. B.

A. SCHELL. Ueber die Genauigkeit der Winkelgleichung des Stampfer'schen Nivellirinstrumentes. Schlömilch Z. XIV. 329-337. 1869.

Bei diesem Nivellirinstrumente werden die Verticalwinkel nicht an einem getheilten Kreise, sondern durch die Umdrehungen einer Micrometerschraube gemessen. Der Ausdruck für den Winkelweith der Drehung hat die Form

$$An + Bn^2 + Cn^3,$$

wo A, B, C die Constanten, n die Schraubenumdrehungen bezeichnen. Die von Stampfer eingeführte Vernachlässigung des kubischen Gliedes in jenem Ausdruck ist mehrfach als zu ungenau angegriffen worden. Vorliegende Mittheilung führt nun den Nachweis, dass die Parabel $y = ax + bx^2$ bei passender Wahl von a und b sich der Curve dritten Grades $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ mit einer für die Praxis genügenden Schärfe anschmiegt, indem die Differenz beider Ausdrücke für die Winkelgleichung innerhalb eines beträchtlichen Intervalles von n im Maximum nur eine Bogensecunde erreicht. B.

C. BREMIKER. Studien über höhere Geodäsie. Berlin. Weidmann. 1869.

Die aus astronomischen Beobachtungen sich ergebenden Richtungen des Bleilothes sind wegen der unregelmässigen Gestalt der Erde im Allgemeinen etwas verschieden von den unter Annahme eines bestimmten Erdsphäroids berechneten. Diese Abweichungen sind die sogenannten Lothstörungen. Der Verfasser definirt nun als oscillirendes Sphäroid dasjenige, bei welchem die Quadratsumme der übrigbleibenden Lothstörungen ein Minimum wird, und schlägt zur Ermittelung desselben folgenden Weg vor.

Es seien für eine Reihe von Punkten die Längen, Polhöhon und Azimuthe gewisser gegebener Richtungen auf astronomischem Wege bestimmt, ferner seien diese Punkte durch ein Dreiecksnetz mit einander verbunden, und durch Ausgleichungsrechnungen die wahrscheinlichsten Werthe der Seiten und Winkel des Netzes ermittelt, endlich berechne man, von den astronomischen Coor-

dinaten einer Station ausgehend unter Zugrundelegung eines angenäherten Sphaeroids die Längen, Polhöhen und Azimuthe der übrigen Stationen aus den Seiten und Winkeln jenes Netzes. Die Unterschiede, welche dann zwischen den so erhaltenen geodätischen Coordinaten übrig bleiben, sind dann gleich bekannten linearen Functionen der Lothstörungen auf den einzelnen Stationen, sowie der Correctionen für die grosse Halbaxe und die Abplattung des angenommenen Sphäroids. Die Bedingung des Minimums liefert schliesslich die nöthige Anzahl von Gleichungen zur Ermittelung aller jener als unabhängig von einander anzusehenden Unbekannten.

Der bei Weitem grössere Theil der „Studien" ist der Entwickelung und Erläuterung von Rechnungsvorschriften für die bei obigem Verfahren nothwendige Bestimmung der geodätischen Längen, Polhöhen und Azimuthe gewidmet. Der Verfasser vermeidet dabei vollständig die Anwendung der geodätischen Linie, weil dieselbe zu complicirten Formeln führe und mit den geodätischen Operationen gar nichts zu thun habe; er operirt vielmehr nur mit den von Verticalschnitten und den zugehörigen Sehnen gebildeten Dreiecken, und wo bei den elliptischen Bogen der Verticalschnitte zwischen zwei Stationen eine Rectification nöthig wird, genügt es, jene Bogen unter Zuhülfenahme ihres mittleren Krümmungshalbmessers als einfache Kreisbogen zu behandeln.

Die so entwickelten Rechnungsvorschriften lassen an Schärfe und Bequemlichkeit, namentlich bei kleinen Dreiecken, kaum etwas zu wünschen übrig, besonders da fast sämmtliche Rechnungen directe sind und auf geschlossenen Ausdrücken beruhen. Zwei als Anhang beigefügte Tafeln dienen zur bequemeren Ermittelung der reducirten Breite und des Krümmungshalbmessers für einen beliebigen Normalschnitt.

Zum Schluss muss Referent noch auf einen kleinen Irrthum in den „Studien" aufmerksam machen, der jedoch glücklicherweise ohne wesentlichen Einfluss ist. Der Verfasser schlägt nämlich vor, auf dem Sphäroid statt der geodätischen Linie die Feldlinie einzuführen. Dieselbe ist dadurch definirt, dass für

jeden ihrer Punkte die zugehörige Flächennormale von der Sehne zwischen den beiden Endpunkten der Curve geschnitten wird. Es wird dabei die Ansicht ausgesprochen, dass die durch die Normale und Sehne bestimmte Ebene die Curve berühre und dass die Seiten- und Winkelmessungen des Geodäten dieser Curve angehören. Der Irrthum liegt hier auf der Hand. Merkwürdiger Weise hat ein analytischer Beweis, der zur Begründung dieser Ansicht versucht wird, (pag. 63-65) den Verfasser nicht zur Aufdeckung des Fehlers geführt. B.

A. SONDERHOF. Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel. Grunert Arch. LI. 20-41. 1870.

A. SONDERHOF. Nachtrag zu der Abhandlung: Die geodätischen Correctionen etc. Grunert Arch. LI. 42-45. 1870.

Die für die genannten Correctionen entwickelten Formeln sind im Wesentlichen Differentialformeln und betreffen die Reduction der gemessenen Azimuthe, geodätischen Linien und Polhöhen auf die analogen Grössen des als Grundfläche angenommenen Sphäroids. Daran schliessen sich Erörterungen über die gegenseitige Lage einer geodätischen Linie und der zu ihren Endpunkten gehörigen Verticalschnitte, sowie über den Einfluss der verticalen und horizontalen Strahlenbrechung. Es läuft dabei der Irrthum mit unter, dass eine geodätische Linie zwischen den Verticalschnitten ihrer Endpunkte liegen müsse, was bekanntlich selbst für beliebig kleine Entfernungen nicht immer der Fall ist. B.

R. HEGER. Bemerkung zu der Bestimmung der Abplattungsgrenzen für das Erdsphäroid $\left(\frac{1}{304} \text{ und } \frac{1}{578}\right)$ aus der Nutation. Schlömilch Z. XV. 293-296. 1870.

Laplace hat in der Mécanique céleste, Buch V. Satz 14 die Formel

$$\frac{2C-A-B}{C}=\frac{0,00519323}{l+\beta\cdot 0,748493}$$

abgeleitet, wo β eine Constante, die aus den Bewegungen und der Masse des Mondes zu berechnen ist, C, A und B die Trägheitsmomente der Erde für die Rotationsaxe, resp. zwei äquatoriale Axen sind. Es ergeben sich aus dem Verhältniss der Trägheitsmomente nun zwei Grenzen für die Abplattung der Erde, nämlich $\frac{1}{304}$, wenn die Erde homogen, und $\frac{1}{578}$, wenn die Masse im Mittelpunkt concentrirt gedacht wird. Die obere der auf diese Weise aus der Nutation abgeleiteten Grenzen ist nun schon kleiner als die geodätisch bestimmte. Da die Erde der Voraussetzung der Homogenität durchaus nicht entspricht, sondern sich der Voraussetzung für den kleineren Werth nähert, so scheint es, als müsse dieser astronomisch bestimmte Werth sich beträchtlich von dem geodätisch bestimmten entfernen. Dies ist aber nicht der Fall, weil, wie durch Berechnung der drei Trägheitsmomente nachgewiesen wird, das Verhältniss $\frac{2C-A-B}{C}$ constant ist für alle congruenten Rotationsellipsoide, die aus ähnlichen homogenen Schichten bestehen, wie sich auch die Dichte von Schicht zu Schicht ändert. Die Annahme von homogenen Schichten entspricht dem wirklichen Zustande der Erde sehr nahe, so dass der daraus abgeleitete Werth $\frac{1}{304}$ als nahezu richtig angesehen werden kann.

O.

W. Jordan. Bemerkung zu der zweiten Gauss'schen Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. Astr. Nachr. LXXVI. 304-312. 1870.

Gauss hat zu der Aufgabe, aus den Coordinaten und dem Azimuthe in dem einen Endpunkte einer geodätischen Linie von gegebener Länge die entsprechenden Grössen für den anderen Endpunkt und den Längenunterschied zu finden, eine indirecte Lösung gegeben, deren bequeme Anwendung wesentlich auf der Benutzung mehrerer von Gauss gegebenen Hülfstafeln beruht. Diese Tafeln gelten jedoch nur für eine bestimmte Excentricität der Meridianellipse. In dem vorliegenden Aufsatz ist nun eine

Correctionstafel entwickelt, mit deren Hülfe jene Gauss'schen Tafeln auch für andere Excentricitäten brauchbar bleiben.

B.

J. WEINGARTEN. Ueber eine geodätische Aufgabe.
Astr. Nachr. LXXIII. 65-76. 1869.

Wenn $ds^2 = Edp^2 + 2Tdpdq + Gdq^2$ der Ausdruck für das Linienelement auf einer krummen Oberfläche ist, so lassen sich unzählig viele Ausdrücke bilden, die aus den E, F, G und ihren Ableitungen zusammengesetzt sind und in demselben Punkte der Fläche denselben Werth annehmen, welche Form des Linienelements man auch zu Grunde legen mag. Der Verfasser nennt solche Ausdrücke Inflectenten und betont dabei zugleich die Forderung, dass in einer allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke, welche einzig und allein die Kenntniss der allen auf einander abwickelbaren Flächen gemeinsamen Coefficienten E, F, G voraussetzt, sämmtliche Stücke durch Inflectenten auszudrücken seien. Die von Gauss gegebenen Ausdrücke für die Reduction der Winkel eines geodätischen Dreiecks ABC auf die eines ebenen Dreiecks von denselben Seiten entsprechen in den Gliedern erster bis dritter Ordnung bereits dieser Forderung. Im zweiten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung wird nun ein Gleiches für die Glieder vierter Ordnung geleistet, und zwar mit Hülfe des Krümmungsmaasses k und von vier, aus k und den E, F, G zusammengesetzten Inflectenten h, J_1, J_2, J_3. Die bis auf Grössen vierter Ordnung (incl.) richtige Formel für jene Winkelreduction enthält ausser den Seiten und dem Flächeninhalt des Dreiecks nur noch die Werthe, welche k, h, J_1, J_2, J_3 in den Punkten A, B, C annehmen.

Im dritten Abschnitt sind die Entwickelungen für den Fall einer Rotationsfläche um eine Ordnung weiter geführt. Es treten hierbei wesentliche Erleichterungen ein, weil die h, J_1, J_2, J_3 nur von k abhängen. Der vierte Abschnitt enthält die Anwendung der allgemeinen Formeln auf das Rotationsellipsoid und ausserdem eine bis auf Grössen achter Ordnung (excl.) genaue Formel für die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines sphärischen Dreiecks von denselben Seiten. B.

P. A. HANSEN. Reflexionen über die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks von kleinen Seiten auf die Winkel des ebenen oder sphärischen Dreiecks von denselben Seiten. Leipz. Ber. 1869. 138-145.

J. WEINGARTEN. Ueber die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen oder sphärischen. Astr. Nachr. LXXV. 91-96. 1869.

Die in dem vorhergehenden Referat besprochene Abhandlung enthält von dem Gesichtspunkt der darin aufgestellten Forderung aus eine ungünstige Kritik der „Geodätischen Untersuchungen I“ von Hansen, (Leipz. Abh. Bd. VIII), welche zu einer längeren Polemik zwischen beiden Gelehrten geführt hat. Dieselbe dreht sich im Wesentlichen darum, dass Weingarten an der von ihm aufgestellten Forderung festhält, während Hansen die grössere numerische Genauigkeit urgirt, welche nach einer Reihe von Zahlenbeispielen zu urtheilen seine Formel gegenüber der von Weingarten besitzt, selbst wenn man in letzterer einen von Hansen vermutheten und später von Weingarten berichtigten Druckfehler berücksichtigt. (S. Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. 1870 p. 235.)

Die Besprechung einiger neuen Formeln in den „Reflexionen etc.“ unterdrücken wir hier, da dieselbe in dem Referat über eine grössere Arbeit von Hansen (Leipz. Abh. IX. 1871) eine Stelle finden wird. B.

W. JORDAN. Ueber die Bestimmung der Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten. Astr. Nachr. LXXIV. 209-226. 1869.

Der Verfasser leitet zunächst folgenden Satz ab: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen zwei Beobachtungen einer Grösse mit den Genauigkeiten h und h' den Werth d besitzt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Fehlers d für eine einzige Beobachtung mit der Genauigkeit

$$\frac{hh'}{\sqrt{h^2 + h'^2}}.$$

Die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Differenzen zwischen m gegebenen Beobachtungen werden dann wie die Fehler von eben so vielen von einander unabhängigen Beobachtungen behandelt, und für die wahrscheinlichen Fehler etc. Ausdrücke entwickelt, deren Unsicherheit $\sqrt{\frac{1}{2}m}$ mal geringer ausfällt, als bei dem gewöhnlichen Verfahren. Der hierbei nicht berücksichtigte Umstand, dass jene Differenzen nicht von einander unabhängig sind, ist, so lange es sich um die Methode der kleinsten Quadrate handelt, ohne Einfluss auf den Werth des wahrscheinlichen Fehlers, dagegen bedürfte sein Einfluss auf die Unsicherheit dieses Fehlers wohl noch einer näheren Untersuchung. B.

E. Beltrami. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie. Rend. d. Istr. Lomb. (2.) II. 1869.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3 A. p. 551.

G. Darboux. Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 175-180. 1870.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3 A. p. 548.

Anonymus. Note on geodesics. Messenger V. 87, 88. 1869.

Der Verfasser macht von der Deformation der Flächen Gebrauch um einige Sätze über geodätische Linien zu beweisen. Die gegebene Fläche wird auf eine Rotationsfläche so abgewickelt, dass ein gegebener Punkt O der Fläche mit einem Vertex der Rotationsfläche und eine gegebene geodätische Linie OP mit einem Meridian zusammenfällt. Es folgt z. B.: Sind OP und OP' zwei aufeinander folgende geodätische Linien von gleicher Länge $OP = OP'$, so ist die Linie PP' senkrecht zu beiden.

He.

U. Dini. Sopra alcune formola di trigonometria sferoidica. Ann. d. Un. Tosc. 1870.

Indem der Verfasser von der Gleichung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid ausgeht, entwickelt er in einfacher

Weise die Formel, die von Delambre und anderen französischen Ingenieurgeographen zur Berechnung der geographischen Coordinaten der Ecken eines geodätischen Netzes und der Länge eines Meridianbogens zwischen den Parallelen der äussersten Punkte der Seiten eines Netzes benutzt ist, und stellt noch einige andere dahin gehörige Formeln auf. Jg. (O.)

B. v. PRONDZYNSKI. Ueber die Anzahl der Winkel- und Sinus-Gleichungen bei Ausgleichung trigonometrischer Dreiecksnetze. Astr. Nachr. LXXV. 87-90. 1869.

Die bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes auftretenden Bedingungsgleichungen zerfallen in zwei Gruppen, von denen die eine nur die Winkel, die andere nur die Sinus derselben enthält. Diese Gleichungen sind nun nicht von einander unabhängig, sondern eine bestimmte Anzahl derselben ist eine Folge aller übrigen. Der vorliegende Aufsatz enthält nun eine Formel für die Anzahl der bei der Ausgleichung noch nothwendigen Sinusgleichungen, wenn man von den Winkelgleichungen die grösstmögliche Anzahl benutzt, wie es gewöhnlich geschieht, weil die letztere Art von Gleichungen einfachere Coefficienten besitzt als die erstere. B.

G. ZACHARIÄ. Den danske Gradmaaling 1ste Bind. Udgivet af C. G. Andrae, Kjöbenhavn 1867. Tychsen Tidsskr. (2) V. 79-96. 1869.

Es wird eine Inhaltsübersicht des in der Ueberschrift citirten Werkes gegeben und gezeigt, welche Fortschritte die Wissenschaft demselben verdankt. Der Schluss ist folgender: „Aus der oben gegebenen Entwickelung sieht man, dass das erwähnte Werk nicht nur etwas Neues bringt bei fast allen behandelten Problemen, sondern dass dies Neue auch eine Bereicherung der geodätischen Wissenschaft ist. — In dieser Wissenschaft repräsentirt „den danske Gradmaaling“ einen wirklichen Fortschritt.“

Hn. (Wn.)

Capitel 2.

Astronomie.

C. White. Elements of theoretical astronomy. London 1869.

Herrmann. Kritik Newton'scher Astronomie. Rostock, Stiller. 1870.

Cheyne. An elementary treatise on the planetary theory. London, Macmillan. 1870.

N. Meyer. Gestalt der Himmelskörper. Pr. Königsberg i. Pr. 1869.

J. Lüroth. Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. Astr. Nachr. LXXIII. 187-189. 1869.

Die Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem wahren Werthe des wahrscheinlichen Fehlers eines aus Beobachtungen ermittelten Unbekannten und zwischen dem aus den wahrscheinlichen Beobachtungsfehlern berechneten Werthe ist von Peters in Astr. Nachr. XLVI. gegeben worden. Vorliegende „Bemerkung" dehnt die dort entwickelten Relationen auf den Fall von beliebig vielen Unbekannten aus. B.

A. Cayley. Note on Lambert's theorem of elliptic motion. Not. of Astr. S. XXIX. 318-320. 1869.

Wie in der Theoria motus p. 120 bemerkt ist, herrscht, wenn nur ϱ, ϱ', c, a (die beiden Radien, die Sehne und die grosse Axe) gegeben sind, eine Zweideutigkeit in Bezug auf den Bogen χ, die in dem Theorem auftritt; es sind nämlich zwei Bahnen durch diese Daten bestimmt, und beide Werthe von χ entsprechen diesen Bahnen. Aber diese Zweideutigkeit herrscht nicht, wenn die Bahn gegeben ist, und der Verfasser zeigt, wie man die richtigen Werthe von χ durch eine einfache Relation auswählen kann, die von der Lage des zweiten Focus abhängt.

Cly. (M.)

A. Cayley. Note on the problem of the determination of a planet's orbit from three observations. Not. of Astr. S. XXIX. 257-259. 1869.

Auseinandersetzung des Princips der Lösung, die in der Theoria motus gegeben ist. Cly. (M.)

A. Cayley. On the determination of the orbit of a planet from three observations. Mem. of Astr. S. XXXVIII. 17-111. 1870.

Das Problem ist vom geometrischen Gesichtspunkte behandelt. Die Bahn ist ein Kegelschnitt, in dessen Brennpunkt die Sonne steht; und jede Beobachtung zeigt, dass der Planet zur Zeit derselben auf einer gegebenen Linie sich befindet. Man hat also einen gegebenen Punkt S, den Focus, und drei gegebene Linien, „Strahlen". Wäre die Ebene der Bahn bekannt, so würden ihre Durchschnitte mit den drei Strahlen die drei Lagen des Planeten bestimmen; wir würden also den Focus und drei Punkte der Bahn haben, oder, was dasselbe ist, drei Radii vectoren, einen „Trivector". Geometrisch giebt es hier vier Kegelschnitte, aber nur einer von ihnen kann die Bahn sein; die Bahn ist so eindeutig bestimmt durch einen gegebenen Trivector. Die Aufgabe besteht also darin, eine solche Bahnebene zu finden, dass in der durch einen Trivector bestimmten Bahn die Durchgangszeiten die beobachteten Werthe haben; oder (was dasselbe ist), dass die Bahnflächen dividirt durch die Quadratwurzeln aus den resp. Parametern gegebene Werthe haben. Statt der Bahnebene betrachtet der Verfasser die Bahnaxe (d. h. die normal zur Bahnebene durch S gehende Linie), oder noch passender den Bahnpol oder den Durchschnitt der Axe mit einer um S beschriebenen Kugel. Einer gegebenen Lage des Bahnpols entspricht dann (wie oben) eine gegebene Bahn; und es ist die Aufgabe, die Lage des Bahnpoles so zu finden, dass in der zugehörigen Bahn die Durchgangszeiten bestimmte Werthe haben. Die gesuchte Lage mag als Durchschnitt zweier sphärischen Curven erhalten werden, wovon die eine der Ort derjenigen Lage ist, für welche die Durchgangszeit zwischen dem

ersten und zweiten Punkt der Bahn einen gegebenen Werth hat; die andere der Ort derjenigen Lagen, für welche die Durchgangszeit zwischen dem zweiten und dritten Punkt einen gegebenen Werth hat; und in Verbindung damit mögen andere isoparametrische Oerter des Bahnpoles betrachtet werden, z. B. die iseccentrischen Linien, oder die Oerter, für welche die Excentricität einen gegebenen Werth hat. Unter diesem Gesichtspunkt wird das Problem behandelt; es handelt sich nämlich nun um die Discussion der Configuration und dieser Oerter. Die Strahlen sind in dem ersten Beispiel irgend drei gegebene Linien; in der weiteren Discussion der sphärischen Curven, die kaum anders als numerisch durchgeführt werden kann, beschränkt der Verfasser sich selbst auf den Fall einer besonderen symmetrischen Lage der drei Strahlen; er nimmt nämlich Linien, die einen Winkel von 60° mit einer durch S gehenden festen Ebene bilden und deren Projectionen auf diese Ebene ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt S bilden, und so, dass jeder Strahl die Ebene im Mittelpunkt der entsprechenden Seite des Dreiecks schneidet.

Cly. (M.)

C. Puschl. Ueber eine kosmische Anziehung, welche die Sonne durch ihre Strahlen ausübt. **Wien. Ber. LXI, II. 299-319. 1870.**

Die Wärmemenge, welche ein Himmelskörper in der Zeiteinheit von der Sonne erhält, ist einer bestimmten mechanischen Arbeit äquivalent. Der Herr Verfasser sucht nun zu deduciren, dass bei einer wirklichen Umsetzung der Wärme in Arbeit letztere in einem Druck oder Zug bestehen müsse, je nachdem man von der Emissions- oder Undulationstheorie ausgehe. Die Bestimmung der numerischen Werthe zeigt hierbei, dass jener Druck oder Zug bei sehr kleinen Körpern merklich sein kann, dagegen bei den bekannten Planetenmassen neben der Gravitation völlig verschwindet.

B.

Th. v. Oppolzer. Ueber die Bestimmung einer Kometenbahn. (II. Abhandlung.) **Wien. Ber. LXI. 917-944. 1870.**

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der gleichnamigen Abhand-

lung desselben Verfassers, über welche im ersten Bande dieses Jahrbuchs p. 400 referirt worden ist. In § 1 werden die Grenzen für die Anwendbarkeit der Olbers'schen Methode genauer untersucht und ein Kriterium entwickelt, um in jedem einzelnen Falle entscheiden zu können, ob das gewöhnliche Verfahren noch zulässig ist, oder ob man die genauere Methode des Verfassers anwenden muss. § 2 und ff. enthalten sehr wesentliche Abkürzungen der von dem Verfasser in der ersten Abhandlung gegebenen Rechnungsvorschriften. Das zur Erläuterung beigefügte und der Praxis entlehnte Zahlenbeispiel ist so beschaffen, dass eine Bahnbestimmung nach dem gewöhnlichen Verfahren fast unthunlich sein würde. B.

F. Tietjen. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, wenn dieselben geocentrisch nahe in einem grössten Kreise liegen. Astr. Nachr. LXXIII. 353-364. 1869.

Bekanntlich beruht die Bestimmung einer Planetenbahn aus drei Beobachtungen darauf, dass man aus dem Flächensatze mit Vernachlässigung der Grössen von der dritten Ordnung der Beobachtungszeiten eine Gleichung herleitet, welche als Unbekannte die Entfernungen des Planeten von Sonne und Erde für die mittlere Beobachtung enthält. Die Bahnbestimmung auf Grund dieser Gleichung wird aber illusorisch, sobald die drei beobachteten Oerter geocentrisch nahe in einem grössten Kreise liegen. Die nähere Untersuchung dieses Falles lässt sich nun mit der grössten Leichtigkeit durchführen, wenn man, wie der Herr Verfasser es thut, sämmtliche Grössen auf ein rechtwinkliges, durch die Sonne gelegtes Axensystem bezieht, dessen xy-Ebene den ersten und dritten geocentrischen Planetenort enthält. Die auf diese Weise entwickelten Formeln gestatten fast unmittelbar, den störenden Einfluss jenes Ausnahmefalles, sowie die näheren Bedingungen für das Eintreten desselben zu ermitteln. Es ergiebt sich u. A. dabei, dass dieser Fall nahezu stattfindet, sobald die Zeit, zu welcher sich die Sonne im Durchschnitte jener xy-Ebene mit der Ecliptik befindet, übereinstimmt

mit dem arithmetischen Mittel aus den drei Beobachtungszeiten, dass ferner bei freier Wahl der mittleren Beobachtung Gleichheit der Zwischenzeiten das Günstigste ist. B.

Michal. Application de la géométrie analytique à la détermination des orbites des planètes. C. R. LXVIII. 176-180. 1869.

Neu ist in dieser Arbeit nur die Bestimmung von Knoten und Neigung einer Planetenbahn aus neunzehn vollständigen Beobachtungen und zwar in der Art, dass die aufzulösenden Gleichungen sämmtlich linear sind und keine anderen, als die elementaren Hülfsmittel der analytischen Geometrie zur Anwendung kommen. Wenn man nämlich die sieben Coefficienten in der Gleichung der Bahnebene und der Projection des Bahnkegelschnitts auf die Ekliptik als Unbekannte einführt und die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten mit Hülfe der beobachteten Länge und Breite eliminirt, so lässt sich das Resultat der Elimination als eine lineare Gleichung mit neunzehn Unbekannten hinschreiben, welche aus jenen sieben rational zusammengesetzt sind.

Die daran sich schliessende Ermittelung der heliocentrischen Coordinaten und der Bahnelemente aus Knoten und Neigung ist ebenfalls elementar gehalten, giebt aber nur bereits Bekanntes.

B.

S. Newcomb. Aperçu d'une méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels. C. R LXX. 385-388. 1870.

Bei den bisher üblichen Methoden, die Störungsfunction R nach Potenzen der Excentricitäten e und e', sowie des Sinus der halben gegenseitigen Neigung der Bahnen zu entwickeln, ist es sehr lästig, dass durch die Differentiationen von R, welche zur Aufstellung der Störungsgleichungen nothwendig sind, die höchsten Potenzen jener Grössen sich um eine oder mehrere Ordnungen erniedrigen können. Man wird dadurch gezwungen, die

Entwickelung von R bis zu einer höheren Ordnung fortzusetzen, als man überhaupt bei den Störungen berücksichtigen will. Herr N. leitet nun, diesen Uebelstand zu vermeiden, eine Recursionsformel ab, vermöge deren man bei der Entwickelung von R keine höheren Potenzen der Excentricität mitzunehmen hat, als man in den Störungen beibehalten will. Durch diese Formel wird nämlich der Coefficient von $e^m e'^n$ dargestellt als eine lineare Function der Coefficienten von niedrigerer Dimension; dieselben sind mit Factoren multiplicirt, welche in einfacher Weise von den Coefficienten der Entwickelung der wahren Anomalie und des log. rad. vect. nach Potenzen der Excentricität abhängen. Zu gleicher Zeit liefert die Methode der Herleitung dieser Formel eine einfache Prüfungsgleichung für die Richtigkeit aller berechneten Coefficienten. B.

J. Bourget. Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice. C. R. LXX. 507-509. 1870.

Kurze Andeutungen über ein Verfahren, die Störungsfunction analytisch zu entwickeln, bei welchem die Bessel'schen Transcendenten eingeführt werden und die Entwickelung nach Potenzen des Sinus der halben gegenseitigen Neigung, sowie der Tangenten der halben Excentricitätswinkel fortschreitet.

B.

E. Kayser. Untersuchung des Mondes hinsichtlich seiner ellipsoidischen Gestalt. Astr. Nachr. LXXIII. 225-240. 1869.

Bekanntlich hat Hansen aus seinen Untersuchungen über die Bewegung des Mondes den Schluss gezogen, dass die Oberfläche desselben ein verlängertes Ellipsoid sei, dessen grössere Axe stets nach der Erde gerichtet ist, während jene Verlängerung etwa 0,034 beträgt. Die vorliegende Arbeit behandelt nun die Aufgabe, den Werth der Verlängerung direct aus Messungen der grössten Breite einer erleuchteten Mondsichel abzuleiten. Die Werthe der Sichelbreiten sind nämlich um durchschnittlich noch sehr wohl messbare Grössen von einander verschieden, je nachdem man bei ihrer Berechnung die sphärische oder die ellip-

soidische Gestalt des Mondes voraussetzt. Es handelt sich also bei der Lösung der genannten Aufgabe nur darum, die Sichelbreite als Function des Mond- und Sonnenortes, der Libration und der unbekannten Verlängerung des Mondellipsoids auszudrücken, um aus directen Messungen der Sichelbreite einen Werth für jene Verlängerung zu finden. Die Schwierigkeiten, welche hierbei einer strengen Lösung des Problems entgegenstehen, werden von dem Verfasser dadurch umgangen, dass er die Breite der Sichel in derjenigen Ebene berechnet, welche durch den Beobachter, den scheinbaren Mondmittelpunkt, und den Durchschnitt des Mondäquators mit der äusseren Lichtgrenze der Sichel gelegt ist. Dies Verfahren ist für numerische Rechnung hinreichend genau und führt zu hinreichend bequemen Formeln. Die danach ausgeführte Berechnung der vom Verfasser angestellten Messungen liefert, sehr nahe übereinstimmend mit Hausen, für die Verlängerung den Werth 0·0329.

B.

W. Ligowski. Ueber die Reduction der Monddistanzen mit Anwendung vierstelliger Logarithmen ohne Benutzung von Hülfstafeln. Grunert Arch. LI. 374-380. 1870.

Die halbe Reduction x der beobachteten Distanz wird durch Auflösung einer Gleichung von der Form

$$x \sin(\partial - x) = A + B - C$$

gefunden. ∂ ist die beobachtete Distanz; A, B, C enthalten ausser den direct gemessenen Grössen und ihren Correctionen für Refraction etc. noch den Azimuthalunterschied beider Gestirne. Zur Auflösung jener Gleichung genügen in der Regel zwei Annäherungen.

B.

Ch. Simon. Mémoire sur la rotation de la lune. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 69-85. 1869.

Der Verfasser stellt in dieser zweiten Abhandlung (die erste findet sich im dritten Bande desselben Journals) die Anfangsbedingungen auf, denen der Mond, abgesehen von allen Hypothesen, genügen muss, damit seine Rotationsbewegung unseren

Beobachtungen entsprechen, und untersucht dann, ob dieselben sich im Einklang mit der Laplace'schen Hypothese befinden.

O.

V. Puiseux. Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune. C. R. LXIX. 1287. 1869.

Ch. Delaunay. Rapport sur un travail de Mr. Puiseux ayant pour titre „Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune". C. R. LXX. 111. 1870.

Enthalten eine vorläufige Mittheilung und einen Bericht über die nachstehende grössere Arbeit:

V. Puiseux. Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune. Liouville J. (2) XV. 9-116. 1870.

Die mittlere Länge des Mondes als Function der Zeit ausgedrückt, hat die Form $A+Bt+Ct^2+\cdots$, wo C den Coefficienten der secularen Beschleunigung der Mondbewegung bedeutet. Der aus den alten Finsternissbeobachtungen hervorgehende Werth von C auf das Jahrhundert als Zeiteinheit bezogen, beträgt etwa 12″, der theoretische Werth dagegen, welchen man durch Berücksichtigung der secularen Aenderung der Erdbahnexcentricität erhält, steigt nur auf 6,1″ und man hat, um diese Differenz zu erklären, seine Zuflucht zu allerlei Raisonnements über den etwaigen störenden Einfluss der die Erde umgebenden Fluthwelle genommen. In Bezug auf den Einfluss der secularen Aenderung in der Lage der Ekliptik hatte man sich bisher bei dem von Laplace, Poisson und Plana gefundenen Resultat beruhigt, dass bei dem von diesen Schriftstellern erlangten Grade der Annäherung die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik einen constanten mittleren Werth besitze, und dass man daher in der Mondtheorie die Ekliptik als eine feste Ebene betrachten könne. In der vorliegenden Arbeit stellt sich nun der Verfasser die Aufgabe, den Einfluss der secularen Aenderung in der Lage der Ekliptik erschöpfender als dies bisher geschehen, zu entwickeln, um so zu einem sicheren Urtheil über die Zulässigkeit anderer Hypothesen zu gelangen. Die Arbeit gliedert sich in

drei Abschnitte. Der erste reproducirt der Vollständigkeit halber die hierher gehörige Untersuchung von Poisson. Im zweiten Abschnitt wird zunächst die Störungsfunction vollständiger als früher entwickelt, und die Störungsgleichungen nach Analogie des von Delaunay in seiner Mondtheorie benutzten Verfahrens für den Fall integrirt, dass man in der Störungsfunction alle periodischen Glieder unterdrückt, mit Ausnahme derjenigen, welche von den Knotenlängen der Mondbahn und der Ekliptik in Bezug auf eine feste Ebene abhängen. Der dritte und bei Weitem umfangreichste Abschnitt endlich enthält die Integration der Störungsgleichungen unter Berücksichtigung der vorher unterdrückten Glieder. Das Resultat der äusserst mühsamen und langwierigen Rechnung ist folgendes: die seculare Aenderung in der Lage der Ekliptik erzeugt in der mittleren Länge des Mondes Glieder mit t^2, t^3 und t^4; die Glieder mit t^4 zerstören sich bei dem von Puiseux erreichten Grade der Annäherung gegenseitig, die Glieder mit t^2 sind für historische Zeiten völlig unmerklich, die Glieder mit t^3 haben einen merklichen Coefficienten, der jedoch für die Epoche der alten Finsternissbeobachtungen eine Verminderung des Coefficienten C um 0,08″ ergiebt, statt denselben um 4″ bis 6″ zu vermehren, wie es für einen vollständigen Einklang zwischen Theorie und Beobachtung nothwendig wäre. B.

H. Gyldén. Ueber eine Methode, die Störungen eines Kometen vermittelst rasch convergirender Ausdrücke darzustellen. Bull. de St. Pétersb. XIV. 195-231. 1869.

Vorliegende Arbeit enthält eine Anwendung der elliptischen Functionen auf die Entwickelung der Ausdrücke, welche Hansen in seinem „Mémoire sur le calcul des pertubations qu'éprouvent les comètes“ gegeben hat. Hansen drückt nämlich daselbst die gegenseitige Entfernung Δ des störenden und des gestörten Körpers durch die mittlere Anomalie c' des ersteren und durch eine besondere Variable, die partielle Anomalie, aus, welche in verschiedenen, willkürlich zu wählenden Abschnitten der Kometenbahn in verschiedener Weise von dem Orte des Kometen abhängt.

Dadurch wird in dem Ausdrucke für Δ^2 in Bezug auf den Kometen eine beliebig starke Convergenz erzielt, während der von dem Kometen unabhängige Theil sich auf die Form

$$[1+f\cos(c'+F)]\ (1+G)$$

bringen lässt, wo G eine kleine Grösse bedeutet. Die Hauptschwierigkeit besteht nun in der Entwickelung der negativen Potenzen des ersten Factors, weil bei grosser Annäherung der beiden Körper f sehr nahe gleich 1 wird. Herr G. erzielt nun auch hier convergentere Ausdrücke durch die Substitution

$$k^2 = \frac{2f}{1+f},\ \frac{1}{2}(c'+F) = \text{am}\ \frac{2k\chi}{\pi},\ \text{mod. } k.$$

Ebenso lässt sich die Convergenz in Bezug auf den Kometen noch steigern, wenn man für die partielle Anomalie desselben eine am $\frac{2kw}{\pi}$ einführt. In diesem Falle lässt sich, wenn die Excentricität des störenden Planeten sehr klein ist, der Ort desselben durch rasch convergirende Reihen darstellen, welche von eben jenem w und von einem Winkel abhängen, der während desselben Umlaufs des Kometen constant bleibt, dagegen für verschiedene Umläufe verschiedene Werthe annimmt.

B.

E. Weiss. Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. Astr. Nachr. LXXVI. 193-220. 1870.

Der mathematische Theil dieser Arbeit enthält eine Methode zur Höhenbestimmung der Sternschnuppen, welche auf Folgendem beruht. Zunächst wird jede beobachtete Flugbahn so corrigirt, dass sie rückwärts verlängert durch den als bekannt angenommenen Radiationspunkt geht. Dies wird durch eine kleine Drehung der Flugbahn um ihren Mittelpunkt erreicht. Als wahrer Ort der Sternschnuppe wird dann der Durchschnitt der beiden Ebenen angesehen, welche durch jeden Beobachtungsort und die zugehörige corrigirte Flugbahn gelegt werden können.

B.

W. Klinkerfues. Einige Bemerkungen betreffend die Berechnung von Kometenbahnen. Astr. Nachr. LXXV. 81-86. 1869.

Es seien α, α', α'' die geocentrischen Rectascensionen, δ, δ', δ'' die Declinationen eines Kometen, A' und D' die Rectascension und Declination der Sonne für die mittlere Beobachtung, ferner sei A_0 aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(A_0-\frac{\alpha+\alpha''}{2}\right)\sin(\delta+\delta'')=\operatorname{cotg}\frac{\alpha''-\alpha}{2}\sin(\delta''-\delta)$$

bestimmt, dann ist der Ausdruck

$$\frac{\operatorname{cotg} D'}{\operatorname{cotg}\delta'}\cdot\frac{\operatorname{cotg} D'\cos(A'-A_0)-\operatorname{cotg}\delta\cos(\alpha-A_0)}{\operatorname{cotg}\delta'\cos(\alpha'-A_0)-\operatorname{cotg}\delta\cos(\alpha-A_0)}(r'-R'),$$

wo r' und R' die Radii vectores des Kometen und der Erde für die mittlere Beobachtung bedeuten, stets positiv. Man kann daher durch eine einfache Rechnung von vornherein entscheiden, ob

$$r' > \text{oder} < R'.$$

B.

E. Kayser. Die Gleichungen einer Kometenbahn. Pr. Erfurt. 1869.

F. Minding. Ueber eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bull. de St. Pétersb. XIII. 203-208. 1869.

Siehe Abschn. IV. p. 117.

A. Cayley. Sur la construction graphique de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de soleil. Nouv. Ann. (2) IX. 289-291. 1870.

Laguerre. Note sur l'article précédant. Nouv. Ann. (2) IX. 291-293. 1870.

In der erstgenannten Mittheilung wird der Nachweis geführt, dass die stereographische Projection der Curve des Kern- oder Halbschattens bei einer Sonnenfinsterniss sich darstellen lässt als die Enveloppe aller Kreise, welche einen festen Kreis orthogonal schneiden, während der Mittelpunkt auf einem gegebenen Kegelschnitt liegt.

Die Note von L. enthält erstlich die Bemerkung, dass der obige Satz schon 1862 von Moutard ausgesprochen sei, sodann einen Beweis desselben, der unmittelbar für die Durchschnittscurve einer Kugel mit einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung gültig ist. B.

A. Cayley. On the graphical construction of the umbral or penumbral curve at any instant during a solar eclipse. Not. of Astr. S. XXX. 162-164. 1870.

Die Schatten- oder Halbschatten-Curve ist der Durchschnitt einer Kugel mit einem geraden Kegel. Es wird gezeigt, dass die stereographische Projection construirt werden kann als Enveloppe eines variablen Kreises, der sein Centrum auf einem gegebenen Kugelschnitt hat und einen gegebenen Kreis unter rechtem Winkel schneidet, in der That Herrn Casey's Construction der bicircularen Curve vierter Ordnung. S. d. vorsteh. Referat.
Cly. (M.)

A. Cayley. On the geometrical theory of solar eclipses. Not. of Astr. S. XXX. 166-168. 1870.

Analytische Herleitung und Discussion der Fundamentalgleichung. Cly. (M.)

Anonymus. Eclipses. Messenger V. 168-169. 1870.

Elementarer Beweis, dass in einem Jahre sieben Finsternisse stattfinden können, und zwar fünf Mond- und zwei Sonnen-Finsternisse oder vier Sonnen- und drei Mond-Finsternisse.
Glr. (O.)

W. L. Dickinson. On three occultations of Saturn by the moon. Proc. of Manchester IX. 149-150. 1869/70.

Csy.

W. L. Dickinson. On the eclipse of the sun December 21-22. 1870. Proc. of Manchester IX. 158-159. 1869/70.

Csy.

W. G. Penny. On the rotatory motion of heavenly bodies. Trans. of Dublin X. 111. 189-220. 1869.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht: 1) ob die störenden Kräfte, welche auf die Himmelskörper wirken, einen dauernden Einfluss auf die Rotation derselben ausüben können; 2) wenn eine solche Wirkung stattfindet, unter welchen Umständen sie aufhören wird, d. h. welches die Bedingungen sind, unter welchen die Körper mit nur periodischen Aenderungen permanent rotiren können. Csy. (O.)

C. Flammarion. Loi du mouvement de rotation des planètes. C. R. LXX. 804-808. 1870.

G. Quesneville. Remarque relative à une Note de Mr. Flammarion sur la loi du mouvement de rotation des planètes. C. R. LXX. 845-846. 1870.

C. Flammarion. Réponse à une objection relative à la loi du mouvement de rotation des planètes. C. R. LXX. 922-923. 1870.

In der ersten Note sucht Herr Fl. das Gesetz nachzuweisen, dass die Dichtigkeit eines Planeten proportional sei der Quadratwurzel aus dem Verhältniss der Schwerkraft zur Schwungkraft unter dem Aequator. Hr. Qu. zeigt indessen, dass die ungefähre Uebereinstimmung, welche in den von Hr. Fl. benutzten Zahlen stattfindet, viel geringer wird, wenn man die numerischen Werthe aus dem neuesten Annuaire du bureau des longitudes nimmt, dass ferner die aus jenem Gesetz unmittelbar folgende Proportionalität zwischen den Dichtigkeiten und den Quadraten der Rotationszeiten in Wirklichkeit nicht einmal angenähert stattfindet. Die „Réponse ...“ von Hr. Fl. enthält nichts Wesentliches, wodurch jene Einwürfe entkräftet werden. B.

Buzzetti. La rotazione della terra. Milano, Treves 1870.

Bach.. Du passage de Vénus sur le disque du soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du soleil. Ann. de l'Éc. Norm. VI. 289-347. 1869.

Von rein astronomischem Interesse. O.

L. MATTHIESSEN. Ueber die scheinbare und absolute Grösse der Sonne. Schlömilch Z. XIV. 525-531. 1869.

Enthält Reflexionen über die Vergrösserung, welche der scheinbare Sonnenhalbmesser in Folge einer von der Sonnenatmosphäre herrührenden Refraction erfahren muss.

B.

L. J. GRUEY. Recherches sur la flexion de la lunette méridienne. Ann. de l'Éc. Norm. VII. 211-246. 1870.

O.

W. VELTMANN. Fresnel's Hypothese zur Erklärung der Aberrationserscheinungen. Astr. Nachr. LXXV. 145-160. 1870.

Siehe Abschn. XI. Cap. 2. p. 790.

W. H. BESANT. Mathematical notes. Quart. J. XI. 38-42. 1870.

In der zweiten Note wird auf eine Unvollkommenheit in den gewöhnlichen Erklärungen der Aberration aufmerksam gemacht.

Mz.

H. KINKELIN. Die Berechnung des christlichen Osterfestes. Schlömilch Z. XV. 217-228. 1870.

Eine übersichtliche Herleitung der von Gauss aufgestellten einfachen Vorschriften für die Berechnung des Osterfestes.

B.

Anhang.

A. Farnocchio. Corso elementare completo di matematiche pure. Roma. Aureli, 1868/69. 4 Vol. in 8°.

P. N. Mançini. Kritik des Werkes. Boncompagni Bull. II. 279-282. 1869.

Bd. I. Arithmetik und Algebra. Bd. II. Ebene und räumliche Geometrie nebst Trigonometrie. Bd. III. Analytische Geometrie. Bd. IV. Infinitesimal-Rechnung. O.

A. S. Guldberg. Matematikens Betydning og anvendelse. Fem populaere Foredrag. Christiania 1870.

In dieser kleinen Schrift will der Verfasser den Werth und die Anwendbarkeit der Mathematik zeigen. Die Schrift zerfällt in fünf Vorlesungen: 1) „die Zahl". 2) „Reflexionen über die physikalischen Wissenschaften im Allgemeinen; über die musikalischen Töne"; 3) „Bestimmung der Entfernung und Grösse der Himmelskörper". 4) „Ueber Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Hazardspiele". 5) „Ueber Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Statistik". Hinzugefügt ist noch eine Uebersetzung von Pascals: „Réflexions sur la géométrie en général". Hn. (Wn.)

F. Henrich. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Wiesbaden, Limbarth. 1870.

Das vorliegende Lehrbuch unterscheidet sich von anderen derartigen Büchern nur durch die Definition der „Zahl", die der

Verfasser adoptirt hat. Er sagt: „Jede Zahl ist eine, nach einer gewissen Einheit gemessene gerade Linie“.

O.

A. Schlimbach. Die politische Arithmetik und ihre Herleitung. Pr. Frankfurt a.M. 1869.

Der Verfasser berechnet für zwei Beispiele (Russische Eisenbahnanleihe und Braunschweigische Prämienanleihe) den thatsächlichen Procentsatz. O.

A. d'Abbadie. Sur la division décimale de l'angle et du temps. C. R. LXX. 1111-1115. 1870.

R. Wolf. Observations relatives à la division décimale des angles et du temps proposé par Mr. d'Abbadie. C. R. LXX. 1221. (nebst Erwiderung d'Abbadie's) 1870.

Yvon Villarceau. Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps. C. R. LXX. 1233-1236. 1870.

J. Hoüel. Sur la choix de l'unité angulaire. C. R. LXX. 1387-1390. (nebst Erwiderung Villarceau's.) 1870.

Im ersten Artikel explicirt und motivirt d'Abbadie die Decimaltheilung der Winkel und der Zeit, welche vom Quadranten des Kreises und des Tages als Einheiten ausgeht, und empfiehlt die Benennungen prime, grade, quarte, quinte, sixte für 10tel, 100tel, 10000tel, etc. derselben. Für die Decimaltheilung spricht die augenfällige Erleichterung des Rechnens und die Vermeidung von Rechenfehlern. Gegen den Einwand, dass dieselbe nicht mit der Einrichtung der vorhandenen Instrumente stimmen würde, wird mit Recht geltend gemacht, dass die Arbeit der Reduction der Beobachtungszahlen nebst der rückgängigen verschwindend gering ist im Vergleich mit der grossen Arbeitsersparung in längeren Rechnungen; gegen den Einwand der Anhänglichkeit an das Bestehende der Umstand, dass nur eine geringe Anzahl Gelehrter mit der Theilung des Winkels ernstlich zu thun hat, deren Vorgang die Menge willig folgen wird.

Einem weiteren Einwand hinsichtlich der Neuconstruction der Tafeln wird entgegengehalten, wie oft ohnedies solche nothwendig gewesen sind. Es folgt der Nachweis, dass die Decimaleinheiten mit den Bedürfnissen gut harmoniren; schliesslich die Mahnung, dass Frankreich sich nicht seine alte Superiorität durch Zögern entgehen lasse.

Wolf erklärt den ganzen Kreis und den ganzen Tag für die natürlichen Einheiten; das Viertel sei willkürlich. D'Abbadie entgegnet, dass der Quadrant stets als Winkeleinheit gegolten habe und bei der Aufsuchung des Sinus, Cosinus u. s. w. in den Tafeln sich allein als praktisch erweise.

Villarceau citirt seine frühere Erklärung (1864), nach welcher er den Aufschub des Ueberganges zur Decimaltheilung gern sah, damit man nicht voreilig die Quadranten zur Einheit nehme. Der ganze Tag empfehle sich, 1) weil dann die Angaben der Zeiten und Rectascensionen zusammenstimmten, 2) weil man bei Aufsuchung von Winkeln, in denen mehrere Perioden enthalten sind, immer die ganzen Perioden zu streichen, also wie bei Logarithmen dann immer nur mit dem Bruch zu operiren habe. Ueberhaupt verdienten in der Anordnung die Astronomen einen Vorzug. Er fügt jetzt mit Adoption von Wolf's Erklärung gegen d'Abbadie hinzu: schon der Name Quadrant zeige, dass derselbe nicht als Ganzes aufgefasst worden sei. Dass erst die volle Periode ein natürliches Ganze darstelle, sehe man am besten an einer um einen Endpunkt rotirenden Geraden. Diese Einheit könne füglich tour heissen und mit τ (für 2π) bezeichnet werden. Er erwähnt, (was d'Abbadie vergessen hat, für sich geltend zu machen, da es doch bei numerischer Rechnung das wichtigste Moment ist), dass der Quadrant den Umfang der absoluten Werthe der Functionen darstellt, jedoch ohne dem Umstande Bedeutung zuzuschreiben.

Hoüel schliesst sich d'Abbadie's Erklärung an, unterscheidet (leider) das Interesse der Astronomen von dem der übrigen Mathematiker, indem er ihnen überlassen will besondere Tafeln für eigenen Gebrauch zu haben, hebt die umfangreiche und in der Praxis viel bewährte Anwendung des Quadranten für jede Art

periodischer Transcendenten hervor, legt dar, wie bei Decimaltheilung des Quadranten nur mit dem Bruch gerechnet werde, die Ganzen erst diakritische Bedeutung für das Resultat haben wie beim Logarithmus, zeigt die Unbequemlichkeit der öfteren Subtraction von 0,25; 0,5; 0,75, welche eintritt, wenn der Umkreis Einheit ist, und geht mit einigen Betrachtungen auf den Umfang der Tafeln ein.

Villarceau hält seine Ansicht aufrecht, ohne Neues vorzubringen. H.

J. Thoulet. Sur les formules et les calculs qui ont servi à construire la grande carte gnomonique de l'Europe et des contrées adjacentes. C. R. LXVIII. 380. 1869.

Enthält zwei ohne Beweis mitgetheilte Formeln, welche bei der Construction der genannten Karte benutzt worden sind.

B.

Bammert. Aufgaben aus der mathematischen Geographie. Pr. Ehingen. 1870.

Die Aufgaben, Anwendungen der sphärischen Trigonometrie, beziehen sich auf die tägliche Bewegung der Erde und auf Mond- und Sonnenfinsternisse. Sie sind für Schulen wohl zu empfehlen.

O.

G. Emsmann. Sechszehn mathematisch-physikalische Probleme. Leipzig 1869.

Es werden folgende Abschnitte der Physik in elementarer Weise behandelt: Thermometer-Correction, specifische und latente Wärme, Declination der Magnetnadel, das Ohm'sche Gesetz und die Constanten galvanischer Rheomotoren, die Minimal-Ablenkung beim Prisma, der Brechungsexponent, Discussion der Formel für Hohlspiegel und Linsen, Newton'sche Ringe, Dämmerung, das Kräfteparallelepiped, das physische Pendel, die Verminderung der Schwere durch die Erdrotation, das specifische Gewicht einer Mischung, das barometrische Höhenmessen, die Grösse der Ver-

dünnung durch die Luftpumpe. In einem Anhange ist eine Anzahl Uebungsaufgaben für Schüler hinzugefügt.

Wn.

SCHENK. 60 geometrische Aufgaben. Pr. Olmütz. 1869.

Einige Aufgaben über Anwendung der Algebra und Trigonometrie zur Lösung und Construction geometrischer Aufgaben für Schüler der oberen Klassen. M.

C. BRUHNS. Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 7 Decimalen. Leipzig, Tauchnitz. 1870.

Die vorliegenden Tafeln, in deutscher, französischer, englischer und italienischer Ausgabe gleichzeitig erschienen, enthalten die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100,000 und der trigonometrischen Functionen bis zu 6° von Secunde zu Secunde, von da ab von 10 zu 10 Secunden. Eine wesentliche Verbesserung gegen die Tafeln von Bremiker ist, dass für die etwaige Benutzung von nur sechs Decimalen ein Zeichen gegeben ist, ob die fünf der letzten Decimale mit oder ohne Erhöhung fortzulassen ist. O.

O. SCHLÖMILCH. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg. 1869.

A. M. NELL. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen. Darmstadt, Diehl. 1870.

G. LUVINI. Tavole di logaritmi asetti decimale. Torino Arnoldi. 1870.

TH. WITTSTEIN. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Hannover. 1870.

S. STAMPFER. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien, Gerold. 1870.

F. G. GAUSS. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Berlin, Rauch. 1870.

H. SCHODER. Logaritmisch-trigonometrische Tafeln. Stuttgart, Lindemann. 1869.

F. DOMKE. Nautische astronomisch-logarithmische Tafeln. Berlin, Decker. 1869.

E. LÜRTZ. Berechnung der Logarithmen der natürlichen Zahlen und der trigonometrischen Functionen. Pr. Kronstadt in Siebenbürgen. 1869.

Sammlung von Hülfstafeln der Kgl. Sternwarte in Berlin. Berlin, Dümmler. 1869.

A. B. BUTTERBECK. Zeitberechnungstafeln. Giessen, Ricker. 1870.

J. W. L. GLAISHER. Tables of the numerical values of the sine-integral, cosine-integral, and exponential-integral. Trans. of London. CLX. 367-388. 1870.

Die Tafeln I—IV enthalten $Si(x)$, $Ci(x)$, $Ei(x)$, $Ei(-x)$ von $x = 0 \cdots 1$ in Intervallen von 0,01 auf 18 Decimalstellen mit Differenzen dritter Ordnung. Die Tafeln V—VIII dasselbe von $x = 1 \cdots 5$ in Intervallen von 0,1 auf 11 Decimalstellen mit Differenzen dritter Ordnung. Tafel IX dasselbe von $x = 5 \cdots 15$ mit Intervallen von 1 auf 11 Stellen. Tafel X enthält $Si(x)$, $Ci(x)$ von $x = 20 \cdots 100$ mit Intervallen von 5, von $x = 100 \cdots 200$ mit Intervallen von 10, von $x = 200 \cdots 1000$ mit Intervallen von 100, und für einzelne höhere Werthe von x, auf 7 Decimalstellen. Tafel XI giebt die Maxima und Minima von $Si(x)$ auf 7 Stellen; Tafel XII dasselbe für $Ci(x)$.

Cly. (M.)

F. SCHALLER. Primzahltafeln. Berlin, Mode. 1869.

D. REGIS. Tavole grafiche a due argomenti, fatte sulle formole di Darcy e Bazin, di Prony e di Eitelwein, relative al movimento uniforme dell'aqua in un canalo, in un fiume ed in un tubo a seziюce circolare costante. Atti d. Soc. dgl. Ingegneri di Torino 1870.

M. R. Pressler. Das mathematische Aschenbrödel in Schule, Werkstatt, Wald und Feld, oder der Ingenieur-Messknecht. Leipzig, Baumgärtner. 1870.

Der sogenannte Messknecht ist eine mit einem Pendel versehene kleine Papptafel, welche durch Umklappen einzelner Theile in ein Visir- oder Messinstrument verwandelt werden kann. Sie dient, entweder allein oder mit Stiften, Diopten etc. armirt, als Masstab, Transporteur, Winkelkreuz, Theodolith, Nivellirinstrument, Sonnenuhr etc. Auf beiden Seiten der Tafel befinden sich zahlreiche mathematische Tabellen, die in der Praxis angewendet werden, nämlich: die Reciproken, Quadrat- und Cubikwurzeln, Potenzen, Logarithmen, Maass-Vergleichungen und -Reductionen, Zins- und Renten-Tabelle, Kreisumfang und -Fläche, Kreisbogen, Segmentenflächen, Sinus, Cosinus, Tangenten und Secanten, Fallhöhen und Fallgeschwindigkeit etc. Das Buch selbst enthält im ersten Abschnitte eine Anleitung zur Behandlung des Instrumentes, und in den folgenden zahlreiche praktische Aufgaben (mit Lösungen) aus der Arithmetik, Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, Astronomie und Geodäsie.

M.

Namenregister.

Seite

Abbadie, A. d'. Sur la division décimale de l'angle et du temps. 859
Abbot, F. K. On some propositions in the theory of tides. . . . 747
Abonné. Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants. 280
Adam, W. Methodische Anweisung zum Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel mit Anwendung zu geometrischen Berechnungen nebst zahlreichen Uebungsaufgaben. 99
Adams, J. C. Note on the resolution of $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$ into factors. 57
Affolter, G. Beiträge zur Geometrie der Vielecke 354
Airy, G. B. On the factorial resolution of the trinomial: $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$. 57
Airy, O. 1) Geometrical optics 780
2) To find the condition of minimum deviation of a ray of light passing through a prism composed of a medium denser than the original medium. 797
Allégret. 1) Note sur l'existence de nouvelles classes renfermant chacune un nombre illimité de courbes algébriques planes, dont les arcs offrent une représentation exacte de la fonction elliptique de première espèce. 331
2) Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes. 517
André, D. 1) Solutions des questions 912 et 913 nebst einer Note von Gerono. 282
2) Solution d'une question (838). 296
Andréiewsky, A. 1) Sur l'intégration des expressions différentielles homogènes avec quelques applications 134
2) Sur l'intégration de quelques équations différentielles du second ordre par la méthode du facteur. 308
Anonymus. On a class of differential equations. 170
Note relative à quelques cas de convergence ou divergence des séries. 292
Euclid XI. etc. 364
The nine-point's conic of any tetrastigm. 391
Note on geodesics. 842
Eclipses. 855

Seite

Aoust, Abbé. 1) Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. . 456
2) Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées. 458
3) Note sur les équations fondamentales du problème de la déformation des surfaces. 458
4) Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque 458
5) Sur les roulettes en général. 523
6) Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. 543
Arcais, J. d'. Del moto sopra un ellissoide di un punto sollecitato de forze che hanno una funzione potenziale. 706
Armenante, A. 1) Sulle trasformazioni birazionali univoze e sulle curve normale e subnormale del genere p. 44. 474
2) Sopra una equazione dell' 8° grado. 56
3) Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano 636
Aschieri, F. 1) Sopra un complesso di 2° grado 606
2) Sopra un complesso del 2° grado. Generazione geometrica dei complessi del 1° grado. 607
Ascoli. Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse. 264
August, F. Ernst Ferdinand August. 25

Bach. Du passage de Vénus sur le disque du soleil en 1874 et du calcul de la parallaxe du soleil. 856
Bachmann, P. 1) Ueber ternäre quadratische Formen. 102
2) Zur Transformation ternärer quadratischer Formen. 102
Bailland. Note sur les séries de termes positifs. 292
Ball, R. S. 1) A problem in mechanics. 707
2) On the small oscillation of a rigid body about a fixed point under the action of any force and more particularly when gravity is the only force acting 708
3) On an elementary proof of a theorem of Lagrange. 769
Baltzer, R. 1) Theorie und Anwendung der Determinanten . . . 80
2) Ueber die Hypothese der Parallelentheorie. 338
3) Ueber den Ausdruck des Tetraëders durch dieCoordinaten der Eckpunkte. 597
Bammert. Aufgaben aus der mathematischen Geographie. 861
Bardelli, G. Sulle trasformazione delle coordinate nello spazio. . 460
Barfuss, F. W. 1) Lehrbuch der mathematischen Analysis, besonders in Hinsicht ihrer Entwickelungsmethoden. 118
2) Lehrbuch der Differentialrechnung. 126
Barrachina, E. S. Note sur les racines des nombres. 283
Battaglini, G. 1) Sulle forme ternarie quadratiche 68
2) Intorno ai sistemi di rette di 2° grado. 544
3) Memoria sulle dinami in involuzione. 651
4) Nota sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido. 652
5) Nota sul movimento geometrico finito di un sistema rigido . . 652
6) Nota sulla composizione delle forze. 661
7) Nota sulla serie di sistemi di forze. 674
8) Nota sulla teoria dei momenti 674
Bauer, G. 1) Von der Zerlegung der Discriminante der kubischen Gleichung, welche die Hauptaxe einer Fläche zweiter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten. 76
2) Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung. 567

Seite

Bauernfeind, C. M. Elemente der Vermessungskunde. 833
Baumann, J. J. Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt. 31
Baumgardt, E. Axonometrie. 370
Baur, W. Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear. 50
Beaujeux. Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques. 282
Beaumont, E. de. Éloge historique de Puissant. 268
Béchaux, A. H. Mechanical geometry. 651
Beckendahl. Die Gleichungen höherer Grade. 43
Becker, Fr. Die elementare Geometrie in neuer Anordnung . . . 345
Becker, J. C. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. 32
Becker, K. Ueber Polyeder. 342
Beech. Sur la théorie des ondes liquides périodiques. 738
Beer. Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. 762
Behse, H. Die darstellende Geometrie. 369
Bellavitis, G. Applicazione della geometria descrittiva. 369
Beltrami, E. 1) Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. 61. 477
2) Articolo bibliografico: Teorica generale delle funzioni di variabili complesse, del professore Felice Casorati. 187
3) Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidéenne. . . . 334
4) Théorie fondamentale des espaces de courbure constante. . . 527
5) Zur Theorie des Krümmungsmasses. 544
6) Sulla teoria generale delle superficie. 547
7) Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie. 551. 842
Bertini, E. 1) Sui poliedri Euleriani. 341
2) Nuova dimostrazione del teorema: Due curve punteggiate projettivamente sono dello stesso genere p. 422
Bertram, H. Probleme der Mechanik in Bezug auf die Variationen der Schwere und die Rotation der Erde. 714
Bertrand, A. Rectification directe de l'ellipse. 488
Bertrand, J. La vie et les travaux du Baron Cauchy. 19
2) Discours prononcé aux funérailles de Lamé. 268
3) Sur la somme des angles d'un triangle. 271
4) Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle. 271
5) Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. 298
6) Rapport sur un mémoire de Mr. Collet: „Théorie du facteur etc.“ 309
7) Rapport sur un mémoire de Mr. Moutard relatif à la théorie des équations différentielles partielles du second ordre. . . . 321
8) Rapport sur un mémoire de Mr. Massieu. 826
Besant, W. H. 1) Mathematical notes. 350. 465. 709. 857
2) Conic sections. 385
3) Note on the envelope of the pedalline of a triangle. 515
Bessel, A. Ueber die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen. 64
Besso, D. 1) Del concetto di funzioni nell' insegnamento della geometria elementare. 36
2) Sull' integrale $\int_0^\beta \frac{\sin^m x\,dx}{x}$. 154
Betti, E. Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in uno lastro rettangolare 813

Seite

Béziat, L. Notice sur Platon de Tivoli, traducteur du XIIme siècle. 269
Bezold, W. v. Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. 753. 797
Bibliophile. Sur l'étymologie du mot Algorithme. 269
Bignon, L. Solution d'une question (826). 285
Binder, F. Das Malfatti'sche Problem. 358
Bing, A. F. Lösning af Opgave 124. 54
Bitonti, V. N. 1) Dimostrazione delle quistioni 2, 3 e 4. . . 361. 495
2) Soluzione della quistione I. pag. 228. 499
Bjerknes. Om den samtidige Bewaegelse af kugelformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum. 735
Björling, C. F. E. 1) Sur la séparation des racines d'équations algébriques. 43
2) Om rötterna til algebraiska equationer. 54
3) Elementerna af algebraisken Analysen och Differentialkalkylen. . 127
4) Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationnelle et entière de la distance d'un centre fixe. 698
Björling, E. G. (senior). Om de reguliera polydrarne. 365
Blazek. Ueber das dreiaxige Ellipsoid als Deformation der Kugel aufgefasst. 631
Bösser. Die Theorie der kaustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. 26. 524
Boije. At finna volymen af ett revolutions solidum, dä genererande kurvan är hänfördt till polarkoordinater. 556
Boileau, P. 1) Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides. 743
2) Mémoire sur la détermination du travail latent dans les systèmes à mouvements uniformes ou uniformément périodiques. . . 743
3) Nouvelles études sur les eaux courants. 743
Boisbaudran, L. de. Note sur la théorie de la pesanteur. . . . 762
Bois-Reymond, E. du. Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. 816
Bois-Reymond, P. du. 1) Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht. 162
2) Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt. 264
3) Ueber den Antheil der Capillarität an den Erscheinungen der Ausbreitung der Flüssigkeiten. 773
Boltzmann, L. 1) Ueber die Festigkeit zweier mit Druck übereinander gesteckter cylindrischer Röhren. 768
2) Ueber die Ableitung der Grundgleichungen der Capillarität aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. 772
3) Ueber die electro-dynamische Wechselwirkung der Theile eines electrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. 810
4) Bemerkung zu R. Most. 820
5) Ueber die von Gasmassen geleistete Arbeit. 821
Boncompagni, B. 1) Intorno all' opera d'Albiruni sull' India. . 4
2) Intorno ad uno scritto intitolato „Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo De' Toschi di Fagnano, fino al mese di Febbrajo dell' anno 1752", inviate dal Padre Don Angelo Calogerà al Conte Giovanni Maria Mazzuchelli. 18
3) Intorno ad uno scritto del Sig. Prof. Placido Tardy. 19
4) La vie et les travaux du Baron Cauchy. 19

Seite

Bonsdorf, E. V. Den geometriska theorie för complexa funktioner. 242
Boole, G. Of propositions numerically definite. 39
Borchardt, Ch. G. Sur quelques passages de lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indice quelconque. 19
Bougaieff, N. Sur les formes intégrables des équations différentielles du premier ordre. 166
Bouniakowsky. 1) Sur les congruences binômes exponentielles à base 3 et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives. 89
2) Sur quelques formules, qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non quadratiques des nombres premiers. 89
3) Sur un théorème relatif à la théorie des résidus et son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers. 92
4) Sur le symbole de Legrendre $\left(\frac{q}{p}\right)$ 93
Bourget, J. 1) Sur la théorie des racines. 284
2) Note sur la racine carrée des nombres approchés. 284
3) Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin. 295
4) Sur le mouvement vibratoire des membranes élastiques. . . . 776
5) Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice. . 849
Bournier, F. Formule de nivellement trigonométrique. 834
Boussinesq, J. 1) Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion. 678
2) Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques. 737
3) Note complémentaire au mémoire sur les ondes liquides périodiques. — Établissement de relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps fluide ou solide et ses pressions ou forces élastiques. 737
4) Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi. 738
5) Théorie des expériences de Savart, sur la forme que prend une veine liquide après s'être choquée contre un plan circulaire. 745. 775
6) Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur dans les milieux homogènes, chauffés en un de leurs points. 829
7) Construction générale des courants de chaleur en un point quelconque d'un milieu athermane, homogène ou hétérogène. . . . 829
Brauns, S. Zur Lehre von den Dreieckstransversalen. 347
Bremiker, C. Studien über höhere Geodäsie. 835
Brennecke. Einführung in das Studium der darstellenden Geometrie 369
Bretschneider, C. A. 1) Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie. 1
2) Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. 1
3) Bemerkungen zu den Band XLVIII p. 480 des Archiv von Herrn Ligowski mitgetheilten Uebungsaufgaben. 353
4) Der Lehrsatz des Matthew Stewart. 358
5) Die harmonischen Polarcurven. 363
6) Bemerkungen über einen im Archiv besprochenen Satz 669
Bretschneider, P. Punktverwandtschaft und Linearverwandtschaft ebener Figuren. 622
Brettes, M. de. 1) Détermination de l'épaisseur du blindage en fer que peut traverser un projectile dont on connaît le poids, le calibre et la vitesse d'arrivée. 718
2) Relation entre les diamètres, les poids, les vitesses initiales des projectiles de l'artillerie, et la tension de leurs trajectoires. 718

Seite

Brettes, M. de. 3) Influence de la vitesse initiale, du diamètre ou des poids d'un projectile de l'artillerie et sur les tensions de ses trajectoires d'égales portées. 718
4) Détermination d'une ou plusieurs des quantités suivantes: le diamètre d'un projectile oblong, son poids, sa vitesse initiale, la flèche de sa trajectoire et le poids du canon, lorsque les autres sont données. 718
Breusing. Gerhard Kremer genannt Mercator, der deutsche Geograph. Vortrag zu Duisburg am 30. März 1869. 9
Brill, A. 1) Erste und zweite Note bezüglich der Zahl der Moduln einer Klasse von algebraischen Gleichungen. 45
2) Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen. . 178. 785
3) Ueber zwei Eliminationsprobleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen. 474
4) Sul problema della rotazione dei corpi. 725
Brisse, Ch. 1) Démonstration d'un théorème de Gauss relatif aux séries. 292
2) Mémoire sur le déplacement des figures. 659
Brockmann, J. Die goniometrischen Functionen in ihrer allgemeinen, analytischen Bedeutung. 196
Bröckerhoff. Das Appolonische Tactionsproblem. 495
Brothier, L. Elementi di meccanica. 646
Bruhns, C. Johann Franz Encke. 21
Brioschi, F. 1) Des substitutions de la forme $\theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right)$ pour un nombre premier de lettres. . 74
2) Sur les fonctions de Sturm 276
3) Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques. 332
4) Nota sulla equazione che dà i punti di flesso di curve ellittiche. 473
Bruhns, C. Logarithmentafel. 862
Buchbinder. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht auf deutschen Gymnasien. 38
Buchonnet, Ch. Expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice. 552
Burckhardt-Brenner, F. Leonhard Euler's Lehre vom Licht. . 14
Burmester, L. Ueber Isophoten. 596
Burnside, W. S. 1) On the invariants and covariants α, α of a binary quartic considered geometrically as a system of two ternary quadrics. 71. 516
2) On the invariants and covariants of a system of three conics. . 500
Bustelli, A. M. Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante. . . . 687
Butterbeck. Logarithmentafel. 863
Butz, H. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. 369
Buzzetti. La rotazione della terra. 856

Callaudreau, O. Théorèmes sur l'hypocycloide à trois rebroussements. 523
Calzolari, L. 1) Nuova soluzione generale in numeri razionali dell' equazione: $w^2 = a + bv + cv^2$. 100
2) Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$. 100
3) Soluzione generale dell' equazione $y^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2$. 102
4) Nota sull' equazione $u^2 = Ax^2 \pm By^2$. 102
Campoux, P. de. Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales. 575
Cantor, G. 1) Ueber die einfachen Zahlensysteme. 85

Seite

Cantor, G. 2) Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte. 86
3) Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. 218
4) Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. 218
Cantor, M. 1) Recension über Bretschneider, Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie. 2
2) Leibniz und die Differentiation mit beliebigem Index. 19
3) Recension über A. Forti, Intorno alla vità ed alle opere di Luigi Lagrange. 19
4) Notice sur la vie et les ouvrages du général J. V. Poncelet. . 24
Carnoy. Note sur le triangle circonscrit à une conique. 502
Carvallo, J. Étude sur la stabilité des tours balises. 677
Casey, J. On bicircular quartics. 512
Casorati, F. 1) Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di prima specie. 243
2) Sulli moduli di periodicità degli integrali Abeliani. 255
3) Considerazioni intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere. 473
Cassani, P. 1) Studio intorno alla conica dei 9 punti e delle 9 rette. 482
2) Nota sulla conica dei 9 punti e delle 9 rette. 482
3) Soluzione della quistione No. 178 dei Nouvelles Annales. . . 490
4) Nota sul triangolo conjugato di due coniche. 501
Catalan, E. 1) Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler et sur quelques intégrales définies. 155
2) Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. . 234
3) Note sur l'article de Mr. Alexandre. 277
4) Note sur la partition des nombres. 282
5) Note sur le théorème de Mr. Lemoine. 291
6) Sur quelques développements en séries. 292
7) Sur un paradoxe algébrique. 327
8) Note sur les roulettes et les podaires. 523
9) Sur les surfaces orthogonales. 533
10) Remarques sur une note de Mr. Darboux relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. 558
11) Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes. 592
12) Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées. 592
Cayley, A. 1) A memoir on abstract geometry. 39. 333
2) A „Smith's Prize" Paper. 1870. . . . . 41. 53. 353. 463. 580. 590
3) Note on a system of algebraical equations. 51
4) Note on the solution of the quartic equation $\alpha U + 6\beta H = 0$. . 53
5) Note. 56
6) Note on his memoir „On the condition for the existence of three equal roots or of two pairs of equal roots of a binary quartic or quintic. 57
7) Note on the theory of invariants. 70
8) A „Smith's Prize" paper. 1869. 71. 84. 109. 180. 465. 488. 490. 495
573. 574. 659. 704. 719. 720
9) On a problem of elimination. 74
10) Note on the discriminant of a binary quartic. 75
11) On the binomial theorem, factorials and derivations. 120
12) Addition to Walton's theorem. 133
13) Note on the integration of certain differential equations by series. 171

Seite

Cayley, A. 14) On the logarithms of imaginary quantities 197
15) Note on a relation between two circles. 385. 501
16) On the problem of the inscribed = and = circumscribed triangle. 446
17) On the six coordinates of a line. 460
18) Solution of a Senate-House problem. 488
19) On the porism of the in-and circumscribed polygon, and the (2,2) correspondence of points on a conic. 505
20) On evolutes and parallel curves. 524
21) Note on Mr. Frost's paper: On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an Umbilicus. 540
22) A memoir on the theory of reciprocal surfaces. 556
23) On the geodesics on an oblate spheroid. 573
24) A memoir on cubic surfaces. 576
25) On the double-sixers of a cubic surface. 578
26) On the quartic surface $(+)(UVW)^2=0$. 582. 583
27) On the geometrical interpretation of the covariants of a binary cubic. 584
28) On certain skew surfaces otherwise scrolls. 598
29) A third memoir on skew surfaces otherwise scrolls. 598
30) On a correspondence of points and lines in space. 611
31) Note on the attraction of ellipsoids. 756
32) Note on Lambert's theorem of elliptic motion. 844
33) On the problem of the determination of a planet's orbit from three observations. 845
34) Sur la construction graphique de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de soleil. 854. 855
35) On the geometrical theory of solar eclipses. 855

Challis, Th. 1) A new discussion of the mathematical theory of oceanic currents 746
2) The dispersion of light in the hypothesis of undulation. . . . 789

Chasles, Le Verrier, Bertrand et cét. Newton, Pascal et Galilée. 268

Chatelain, J. Solution de la question 951. 295

Chaucourtois. De l'interprêtation des imaginaires en physique mathématique. 819

Chelini, D. 1) Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, d'aree e di punti. 599
2) Nuova dimostrazione delle proprietà fondamentali degli assi conjugati di rotazione e degli assi permanenti. 726

Cheyne. An elementary treatise on the planetary theory. 844

Chiò, J. Nota sulla formola sommatoria applicata al calcolo di $S\frac{1}{x}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}$. 124

Christoffel, E. B. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades 128
2) Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem. 129
3) Sopra un problema proposta da Dirichlet. 624
4) Ueber die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise. 624
5) Ueber die Abbildung einer n-blättrigen, einfach zusammenhängenden Fläche auf einem Kreise. 624

Clarke, A. R. On the course of geodesic lines on the earth's surface. 596

Clausius, R. Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. 823

Seite

Clebsch, A. 1) Zur Theorie der binären algebraischen Formen. . 58
2) Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. . . . 62
3) Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen. 64
4) Zur Theorie der binären Formen sechsten Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 66
5) Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren. 67
6) Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. 70
7) Note zu dem Aufsatze: „Ueber eine Eigenschaft von Functional-Determinanten". 79
8) Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. 103
9) Ueber die Curven, für welche die Klasse der zugehörigen Abel'schen Functionen $p=2$ ist. . . . . 245. 474.
10) Zur Theorie der binären Formen sechsten Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 255
11) Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. 509
12) Ueber die Plücker'schen Complexe. 602
13) Ueber die Abbildung algebraischer Flächen 633
14) Ueber Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. 633
15) Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung. 635
16) Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades haben. 636
17) Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen . . 637
18) Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen. 637
19) Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. . . . 733

Clifford, K. 1) On the general theory of anharmonics. 373
2) Synthetic proof of Miquel's theorem. 394
3) On a generalization of the theory of the polars. 466
4) On the theory of distances. 563
5) On the umbilics of anallagmatic surfaces. 594

Cockle, J. 1) Third chapter on coresolvents. 78
2) On convertent functions. 162
3) On a certain Boolian trinomial. 167
4) On criticoids. 175
5) On the motion of fluids. 729

Codazzi, D. Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. 460

Coffin. Métaphysique du calcul différentiel. 271

Collet. 1) Théorie du facteur pour l'intégration des expressions différentielles du premier ordre. 309
2) Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes. 309
3) Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. 312

Collins, M. On the common tangents of circles. 356

Combes. Discours prononcé aux funérailles de Lamé. 268

Combescure, E. 1) Sur quelques formes différentielles. 301
2) Note sur le pendule conique. 713

Seite

Cotterill, Th. On a correspondence of points, such that a curve of the nth order in one plane corresponds to a curve of the $4n$th in another plane, with 3 multiple points of the order n on the line of intersection of the planes, and three other multiple points of the order $2n$. 424

Cremona, L. 1) Sugl' integrali a differenziale algebriche. 244
2) Considerazione intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere. 473
3) Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. 475
4) Sulle 27 rette di una superficie del 3° ordine. 578
5) Sulle superficie gobbe di quarto grado. 583

Crofton, M. W. 1) On the proof of the law of errors of observation. 115
2) On the theory of local probability. 116
3) Sur quelques théorèmes de calcul intégral. 290. 303
4) On various properties of bicircular quartics. 418. 513

C. T. Two short proofs. 493

Culmann, K. Ueber das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kräfte. 662

Curtze, M. 1) Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme. 6
2) Domenico Maria Novara da Ferrara, der Lehrer des Copernicus in Bologna. 7
3) Berichtigungen zu dem Aufsatze: Domenico Maria Novara da Ferrara. 7
4) Ueber einige bis jetzt unbekannte gedruckte Schriften des Domenico Maria Novara da Ferrara. 7
5) Weitere Notizen über bis jetzt unbekannte gedruckte Schriften des Domenico Maria Novara da Ferrara. 8

Dahllander, G. R. 1) Om några tillämpningar i dynamiken af de geometriska rörelselagarne. 728
2) De l'effet mécanique exercé par la vapeur d'eau saturée pendant la détente. 824
3) Några undersäkningar, beträffande den mekaniske värmetheorien. 825

Darboux, G. 1) C. A. Valson „La vie et les travaux du Baron Cauchy". 19
2) Sur la méthode d'approximation de Newton; note de Gerono. . 278
3) Discussion de la fraction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. 279
4) Sur la série de Laplace. 295
5) Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. . . 316
6) Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par 9 points. 428
7) Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. . 455
8) Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques. . . 548
9) Sur la représentation sphérique des surfaces. 550
10) Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. 558
11) Réponse aux observations de Mr. Catalan du 4. juillet dernier. 558
12) Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces. 571
13) Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipsoide. 573
14) Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques. . . 842

Davis, W. B. Queries. 88

Day, H. G. 1) Theorem in Algebra. 83
2) Note on conic sections. 488

Seite

Day, H. G. 3) Notes on geometrical conics. 489
Debacq. Théorie des infiniment petits. 298
D... G. 1) Bidrag till in elementär framställning af läran om integrerande faktorn. 167
2) Om integrering medelst substitution. 168
Dickinson, W. L. 1) On three occultations of Saturn by the moon. 855
2) On the eclipses of the sun December 21-22 1870. 855
Didon, F. 1) Sur certains systèmes de polynômes associés. . . . 293
2) Sur une intégrale double. 302
3) Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables. 304
4) Sur une équation aux dérivées partielles. 322
5) Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles. . . 324. 326
6) Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables. 325
7) Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique. . 330
Dietrich, A. Ueber Nulllinien. 348
Dilettante. Sopra due quistioni del Salmon nel trattato delle coniche. 490
Dilling, A. Algebraisch-trigonometrische Untersuchungen über die regulären Vielecke. 368
Dillner, G. 1) Definite integraler af synektiska funktioner. . . . 154
2) Grunddragen af geometriska kalkylen. 345
3) Schematisk framställning af läran om jemnlöpunde (parallela) linier. 346
Dini, U. 1) Ricerche sopra la teorica delle superficie. 541
2) Sopra le superficie che hanno un sistema di curvatura sfericha. 552
3) Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane. 552
4) Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di un' altra. . 622
5) Sopra alcune formola di trigonometria sferoidica. 842
Doergens, H. Theorie und Praxis der geographischen Kartennetze. 834
Domke, F. Logarithmentafel. 111
Dorna, A. Sulla media aritmetica nel calcolo di compensazione. . 863
Dostor, G. 1) Propriétés du triangle rectangle. 352
2) Calcul des rayons des deux cercles qui touchent trois cercles tangents deux à deux. 357
3) Propriétés du triangle sphérique rectangle. 368
4) Relations nouvelles entre les tangentes, normales, sous-tangentes et sous-normales des courbes en général, avec application aux lignes du second degré. 462. 484
5) Ellipse et Hyperbole. Relation entre les deux angles que font les deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal. 486
6) Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole. . . . 486
7) Propriétés des bissectrices d'un angle du triangle, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole. . 491
8) Propriétés nouvelles des diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole. 491
9) Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle. . . . 492
10) Généralisation d'un théorème d'Euler sur le cercle et son extension à l'ellipse. 494
Doucet, P. Note sur un caractère de convergence des séries. . . 291
Drach, v. Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe. 602
Dreydorff, J. G. Pascal, sein Leben und seine Kämpfe. 12

Seite

Dronke, A. Binomial-Coefficienten. 108
Duhamel, J. M. C. Sur les principes de la science des forces. . 270
Dupain, J. Ch. Note sur les tangentes communes à deux cercles. 356
Dupré, A. Mémoire sur le choc. 717
Durdik, J. Leibniz und Newton. 13
Durège, H. 1) Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte gehen. . . 404
2) Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte. 507
Durrande, H. 1) Sur les surfaces du quatrième ordre. 438
2) Note sur les surfaces du quatrième ordre. 580

Eberhardt. Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes einer um zwei oder mehrere vertikale Axen rotirenden Flüssigkeit. 683
Eckardt, F. E. 1) Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide. 520
2) Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere der Theorie der Flächen. 543
Ehrlenholtz, A. Ueber die Lösung der binomischen Gleichung. 49
Eilles, J. Das Apollonische Tactionsproblem. 357
Eisenlohr. Ueber die Flächenabbildung. 629
Elsching, A. Kurz gefasste Anleitung zum barometrischen Nivelliren. 834
Emsmann, G. Sechzehn mathematisch-physikalische Aufgaben. . 861
Emsmann, H. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks, und sich aus denselben ergebende Construction dieses Punktes im Vergleich mit dem Schwerpunkt des Trapezes. 669
Enneper, A. 1) Relationen zwischen einigen unendlichen Reihen. 124
2) Reduction eines vielfachen Integrales. 143
3) Bemerkungen über eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. 226
4) Ueber eine Erweiterung des Begriffes von Parallelflächen. . . 534
5) Ueber die developpabele Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen längs einer Curve auf einer Fläche. 553
6) Ueber die developpabele Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist. 554
7) Ueber asymptotische Linien. 554
8) Ueber die Loxodromen der Kegelflächen. 555
9) Ueber ein Problem der sphärischen Geometrie. 571
10) Die cyklischen Flächen. 585
11) Zur Charakteristik der Helicoidflächen. 593
12) Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen. 615
13) Ueber ein Problem der analytischen Geometrie. 616
14) Bemerkungen über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. 704
Ernst. Descartes, sein Leben und Denken. 12
Esson, W. Axial coordinates. 454
Estocquois, d'. Note sur le mouvement des liquides. 741
Eugenio, V. 1) Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari. 83
2) Dimostrazione di un teorema nella teoria dei numeri. 106
3) Dimostrazione di un teorema di Eulero. 357
Exner, E. Ueber die Gestalt kleiner Flächenstücke. 631

Faber. Einige Sätze und Aufgaben von Orthogonalkreisen. . . . 361
Fahland, H. Die Combinationslehre und der binomische Lehrsatz. 108

Seite

Falk. 1) Et konvergents kriterium for kedjebråk med omvexlande positiva og negativa leder. 106
2) Om developpable ytors kurvaturlinier. 554
Farnocchio, A. Corso elementare completo di matematiche pure. 858
Fassbender. Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives. 669
Faye. Sur le log à boussole à propos d'un naufrage. 818
Fellöcker, P. S. Geschichte der Sternwarte der Benedictinerabtei Kremsmünster. 14
Ferrers, N. M. Note on Prof. Sylvester's representation of the motion of a free rigid body by means of a material ellipsoid whose centre is fixed and which rolls on a rough plane. . . . 724
Fiedler, J. Peurbach und Regiomontanus. Eine biographische Skizze. 8
Fiedler, W. Ueber die projectivischen Coordinaten. 453
Figuier, L. Vies des savants illustres du XVIIme et du XVIIIme siècle. 267
Firth, W. 1) On the measure of curvature of a surface referred to polar coordinates. 542
2) A demonstration of the principle of virtual velocity. 663
Fischer, E. 1) Beiträge zum geometrischen Unterrichte. 36
2) Ueber äquidistante Niveaucurven. 557
Flammmarion, C. 1) Loi du mouvement de rotation des planètes. 856
2) Réponse à la remarque de Mr. Quesneville. 856
Flemming, G. Ein Beitrag zur Geschichte des Kalenders. . . . 5
Flohr, A. Der Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen. 369
Folie, E. 1) Note sur quelques théorèmes de géométrie supérieure. 391
2) Extrait d'une lettre à Mr. Catalan. 505
Fouret. Sur la double génération des épicycloïdes. 520
Françoise, E. Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de géométrie élémentaire. 460
Freuchen, P. Volumen af et Polyeder begraenset af Trekanter udtrykt ved de retvinklede Koordinater fil Polyedrets Toppunkter. 366
Friedlein, G. 1) Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. 2
2) Recension über: „Wohlwill, Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei.“ 11
3) Annotationes ad historiam matheseos spectantes. 25
Frischauf, J. 1) Elemente der Geometrie. 345
2) Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner. 370
Frosch. Die singulären Punkte und Tangentialebenen der Wellenoberfläche. 591
Frost, A. General solution and extension of the problem of the 15 school girls. 111
Frost, P. 1) On the direction of lines of curvature in the neigh-
2) bourhood of an Umbilicus. 539
Electro-dynamics. 806
Fuchs, L. 1) Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. 175
2) Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. 248

Seite
Fuchs, L. 3) Ueber eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. 252
4) Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn L. Pochhammer. . 266
Fuhrmann, W. Ueber Abhängigkeit geometrischer Gebilde. . . 422
Funcke, H. Zur Theorie des Rollens. 524
Fuortes, T. Altra dimostrazione di un teorema. 357

Galbroith, A. Manual of hydrostatics. 681
Gardiner, M. 1) On the inscription, by a simplification of Sir W. R. Hamilton's process of reduction, of closed n-gons in any quadric, so that the sides of each shall pass in order through n given points. 435
2) Properties of quadrics having common intersections, and of quadrics inscribed in the same developpable (being an extension of Chapter XVI of Chasles' conics.) 580
Gauss, F. G. Logarithmentafeln. 862
Gautier, P. Essai sur le mouvement d'un projectile dans l'air. . 717
Geisenheimer, L. Ueber sphärische Kegelschnitte. 571
Geiser, C. F. 1) Einleitung in die synthetische Geometrie. . . . 370
2) Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades. 417
3) Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades. 417
4) Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. 438 639
5) Sopra un teorema fondamentale della geometria. 614
Genocchi, A. 1) Di una formola del Leibniz e di una lettere di Lagrange al Conte Fagnano. 18
2) Di alcuni scritti attribuiti ad Agostino Cauchy. 20
3) Intorno ad un teorema di calcolo differenziale. 130
4) Dimostrazione di una formola di Leibniz e Lagrange e di altre formole affini. 135
5) Rassegna d'alcuni scritti relativi all' addizione degl' integrali ellittici ed abeliani. 227
6) Sur la théorie élémentaire des produits infinis. 292
7) Sur le passage des différences aux différentielles. 299
8) Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. . . 336. 647
9) Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide. 336. 647
Gerhard. Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland. . . 6
Germain, St. de 1) Lettre à Mr. Bourget sur un article des „Nouvelles Annales“. 290
2) Note sur la décomposition des fractions rationnelles. 327
3) Détermination des foyers dans les coniques. 483
Gerono, E. 1) Sur une application de la théorie des déterminants. 280
2) Note sur une démonstration de Legendre. 283
3) Sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. 287
4) Note sur la fonction $y = a^x - x$. 300
Gessner, Th. Die Bedeutsamkeit der Binomialcoefficienten für den mathematischen Unterricht. 108
Gherardi, J. Il Processo Galileo riveduto sopra documenti di nuova fonte. 11
Giesel, F. Jacob Bernoulli. 13
Gilbert, Ph. 1) Sur une propriété des déterminants fonctionnels et son application en développement des fonctions implicites. . . 82

Seite

Gilbert, Ph. 2) Sur la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. 296
3) Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. 458
4) Sur les courbes planes à équations trinomes. 516
5) Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. 543
6) Sur quelques propriétés des surfaces apsidales. 593
Glaisher, J. W. L. 1) On a theorem in definite integration. . . . 151
2) Tables of logarithms. 863
Glan, P. Ueber die Absorption des Lichtes. 790
Gleue, A. Analytisch geometrische Untersuchungen. 525
Göbel, C. De coelestibus apud Platonem motibus. 3
Götting, R. 1) Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl von der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$. 87
2) Differentiation des Ausdruckes x^k, wenn x eine Function irgend einer unabhängig Veränderlichen bedeutet. 131
Gordan, P. 1) Die simultanen Systeme binärer Formen. 59
2) Ueber ternäre Formen dritten Grades. 61
3) Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. . . . 62
4) Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen. 64
5) Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. 69
6) Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante R einer Form n^{ten} Grades und einer Form m^{ten} Grades genügt. . 72
Goupillière, H. de la. Recherches sur les centres de gravité. . . 665
Gournerie, de la. 1) Note sur les singularités élevées des courbes planes. 464
2) Sur la spirique à centre. 525
3) Mémoire sur les lignes spiriques. 586
4) Note sur les quadricuspidales. 590
Govi, G. 1) Intorno a tre lettere di Galileo Galilei tratte dall' Archivio dei Gonzaga. 11
2) Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air. . 16
Graffweg, W. Ueber Linsen, welche von einem homogenes Licht ausstrahlenden Punkte ein mathematisch genaues Bild geben. 796
Grandi, A. Di una formola nota che si puo dedurre da un teorema di Cauchy. 208
Grant. Démonstration d'un théorème de géométrie. 361
Grashoff, F. Humphrey's und Abbot's Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen. 744
Grasmann, H. Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. 49
Green, H. Euclid's problems. 345
Grelle, F. 1) Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der operativen Symbole. 160. 177
2) Ueber ein geometrisches Kennzeichen der Art der durch 5 gegebene Tangenten, durch 5 gegebene Punkte u. s. w. bestimmten Kegelschnitte 390
3) Ueber das an Volumen grösseste einem dreiaxigen Ellipsoid einbeschriebene Tetraeder. 574
Gretschel, H. 1) August Ferdinand Möbius. 22
2) Elementare Ableitung der Formel für die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels. 711

Seite

Griffiths, J. 1) On a property of the eight circles which can be drawn through the six points of intersection of three given circles. 500
2) Note on finding the degree of a certain locus connected with a triangle inscribed in a circle. 515
Grosso, R. del. Memoria sull' attrazione degli sferoidi. 757
Grouard. Étude géométrique sur les figures planes semblables. . 371
Grube, F. 1) Zur Geschichte des Mac-Laurin'schen Satzes, betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide. 29. 756
2) Ueber zwei bestimmte Integrale. 225
3) Ueber die Anziehung der von einer Fläche zweiten Grades und von zwei zu deren Axen senkrechten Ebenen begrenzten Körperstumpfe. 757
Grünwald, A. K. 1) Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differentialgleichungen mit variabeln Coefficienten. 163. 690
2) Zur Theorie des Potentiales. 748
Gruey, L. J. Recherches sur la flexion de la lunette méridienne. 857
Grunert, J. A. 1) Gérard Mercator oder Gerhard Mercator? Der berühmte Geograph und Mathematiker ein Flamänder oder ein Deutscher? 9
2) Ein merkwürdiger Brief des achtzehnjährigen Lagrange an den Conte Giulio Carlo da Fagnano. 18
3) Joh. Jos. Ign. v. Hoffmann 21
4) Christian Leonhard Philipp Eckhardt. 22
5) Allgemeine analytische Theorie der Function $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Vierecke. 191. 353
6) Ueber einen geometrischen Satz. 349
7) Allgemeine Discussion der Gleichung der Linien des zweiten Grades 479
8) Die allgemeine Gleichung des Kegelschnittes, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises in Dreiliniencoordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten. 479. 564
9) Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades:
$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0$$
zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten. 479
10) Ueber die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise, insbesondere auch über die Maxima und Minima dieser Sehnen. 485
11) Ueber conforme Kartenprojection. 629
12) Ueber den Schwerpunkt des Trapeziums, insbesondere über die graphische Bestimmung desselben. 668
13) Theorie des Polarplanimeters. 834
Güssfeldt, P. Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, und darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, mit besonderer Berücksichtigung der Curven dritter Ordnung. 469
Guldberg, A. S. 1) Indledning in Arithmetik og Algebra. . . . 49
2) Om Ligningen af 5te Grad. 55
3) Om Dannelsen af nye Algorithmer i Infinitesimalregningen. . . 128
4) Matematikens Betydning og Anvendelse. 858
Gundelfinger, S. 1) Bemerkung zur Auflösung der cubischen Gleichungen. 52
2) Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. 65

Seite

Guthrie, F. On $\sqrt{-1}$. 47
Gyldén, H. Ueber eine Methode, die Störungen eines Kometen vermittelst rasch convergirender Ausdrücke darzustellen. . . . 852

Haag. Théorèmes de géométrie. 434
Haase, C. F. Zur Theorie der ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- oder Rückkehrpunkten. 471
Habich, E. Note sur une méthode de transformation des surfaces. 617
Hall, A. Transformations in Hansen's method of perturbations. . 452
Halphén, G. 1) Théorèmes sur les normales communes à des surfaces et à des courbes. 427
2) Sur le nombre des droites qui satisfont à quatre conditions données. 446
3) Mémoire sur les courbes gauches algébriques. 559
Hankel, H. 1) Die Entdeckung der Gravitation — und Pascal. Ein literarischer Bericht. 13
2) Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Akademische Antrittsrede. 15
3) Beweis eines Hülfssatzes in der Theorie der bestimmten Integrale. 150
4) Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. 190
5) Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. 257
Handl, A. Theorie der Waagebarometer. 686
Hansen, Chr. 1) Om partikulare Oplösninger svarende til Differentialligninger af forst Orden. 165
2) Elementar Bestemmelse af Torens Areal og volumen. 365
Hansen, P. A. 1) Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen sphärischen Dreiecks. 670
2) Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks von kleinen Seiten auf die Winkel des ebenen oder sphärischen Dreiecks von denselben Seiten. 841
Hansen, P. C. V. 1) Lösning af Opgave 118. 180
2) Cauchy's Methode til Integration af partielle Differentialligninger af 1ste Orden. 181
3) Nogle Sätninger om Fladerne af ander Orden. 566
Harbordt, F. Das simultane System einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form. 65
Harley, R. On the Rev. T. P. Kirkman's method of resolving algebraic equations. 43
Haughton. Manual of hydrostatics. 681
Hayward, R. B. A proof of Lagrange's equations of motion referred to generalised coordinates. 689
Heger, R. 1) Die Grundformeln der analytischen Geometrie der Ebene in homogenen Coordinaten. 449
2) Ueber homogene Plancoordinaten. 450
3) Bemerkung zu der Bestimmung der Abplattungsgrenze für das Erdsphäroid aus der Nutation. 838
Heime, F. W. A. Untersuchungen, besonders in Bezug auf relative Primzahlen, primitive und secundäre Wurzeln etc. 92
Heine, E. 1) Aus brieflichen Mittheilungen. 125. 185
2) Ueber trigonometrische Reihen. 125. 217
Helmert. Beiträge zur Theorie der Ausgleichung. 834

Seite

Helmholtz, H. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper. 800
Helmling, P. De aequatione $X_0 \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$ integranda. 172
Henrich, F. 1) Lehrburch der ebenen Trigonometrie und Polygoniometrie. 2) Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. . . 367
3) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 858
Henrici, J. Elementar-Mechanik des Punktes und des starren Systems. 646
Henrici, O. 1) On certain formulae concerning the theory of discriminants; with application to discriminants of discriminants, and to the theory of polar curves. 76
2) On series and curves, especially on the singularities of their envelopes; with applications to polar curves. 470
Heppel, J. M. On the theory of continuous beams. 677
Hepps, J. M. On a general investigation of the beading moments and deflections of continuous beams. 676
Hermann. Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendantes. . . 278
Hermite, Ch. 1) Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. 157
2) Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques, en fonction du quotient des deux périodes. 233
3) Sur la transcendante E_n. 256
4) Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$. 307
Herrmann. Kritik Newton'scher Astronomie. 844
Hertzsprung, S. Forsóg paa in Fremstilling af Laren om Permutationen og Kombinationen. 110
Hess, E. Ueber die Darstellung der einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischen Gleichungen. 84
Hesse, O. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes etc. 526
Hierholzer, C. Ueber Kegelschnitte im Raume. 570
Hill, E. 1) Note sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes. 98
2) Remarques sur les fonctions entières à diviseurs binômes. . . 198
3) On the asymptotes to a hyperbolic section of an oblique cone. 575
4) On a practical method of finding the magnifying power of a telescope. 797
Hirst, A. On the degenerate forms of conics. 385
H. M. Dr. Ludwig Oettinger. 24
Hochheim, A. Tangentialcurven der Kegelschnitte. 514
Hochheim, E. Ueber geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks. 493
Hössrich. Discussion der Cardioide. 510
Hofmann, G. 1) Die Sonnenfinsterniss des Thales vom 25. Mai 585 v. Chr. 3
2) Physikalische Studien. 818
Holmgren. Sur l'intégration de l'équation différentielle $(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$. 169

Seite

Holzmüller, G. Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektro-dynamischen Gesetz von Weber. 178. 695
Hopkinson, T. On a proposition in thermo-dynamics. 827
Hoppe, R. 1) Corollaire au théorème de Mr. Crofton. 304
2) Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente. 628
3) Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand. 710
4) Berechnung der Vibrationen einer Saite mit Berücksichtigung ihres Biegungswiderstandes. 779
Horner, J. On the algebra of magic squares. 99
Hoschek, F. Die centrale Projectionsmethode und ihre Anwendung in der Perspective. 370
Houël, J. 1) „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen etc." von G. Friedlein. 2
2) Sur une formule de Leibniz. 18
3) Notice sur la vie et les travaux de N. J. Lobatchefsky. . . . 22
4) Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide. 32
5) Vie de Riemann. 268
6) Notice sur la vie et les travaux de N. J. Lobatschefsky. . . . 269
7) L'enseignement de la géométrie en Italie. 271
8) Théorie élémentaire des quantités complexes. 328
9) Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide. 335
10) Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit postulatum d'Euclide. 336
11) Sur la méthode d'analyse géométrique de Mr. Bellavitis. (Calcul des équipollences.) 454
12) Sur la choix de l'unité angulaire. 859
Housel. 1) Axes des surfaces du 2me degré obtenues par une sphère concentrique. 566
2) Homographie et perspective. 620
Huart, Colnet d'. Mémoire sur la théorie mathématique de la chaleur et de la lumière. 780. 820
Hülsen, B. Ueber die Bewegung eines von zwei festen Punkten angezogenen Punktes. 695
Hültmann, F. W. 1) Svenska aritmetikens historia. 15
2) Potensläran. 192
Huther, P. Elementare Bestimmung des Punktes in der Ebene eines Polygones, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Ecken des Polygons ein Minimum wird. 354

Jacobi, C. G. J. Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques. 328
Jacoli, F. 1) Notizia sconosciuta relativa a Bonaventura Cavalieri. 10
2) Intorno a due edizioni di Marco Michele Bousquet. Brano di lettere a D. B. Boncompagni in dato di Genova 10 Gennaro 1870. 16
3) Intorno ad una edizione degli Elementi d'Euclide. Lettera a B. Boncompagni. 17
Jadanza, N. 1) Sulla progressioni a due e a tre differenze. . . . 120
2) Sulle progressioni. 120
Jäkel, J. Der Satz des zureichenden Grundes. 30
Janichefsky, E. Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Jvanovitch Lobatchefsky. 22
Janni, G. 1) Metodo per calcolare con approssimazioni successive certe le radici reali dell' equazioni algebriche. 49

Seite

Janni, G. 2) Decomposizione di un' equazione di 4º grado fra due variabili in due fattori razionali di 2º. 53
3) Esposizione della nuova geometria di Plücker. 601

Jeffery, H. M. 1) On conicoids referred to fourpoints tangential coordinates. 454
2) On dual curvature, and the duals of evolutes and involutes. . 463
3) On cusps and points of inflexion, on cuspidal points and lines of inflexion. 464
4) On the evolutes of cubic curves. 524
5) On centres of curves or surfaces, and their polar and pole curves or surfaces. 539
6) On conicoids referred to quadriplanar coordinates. 570

Jenkin, F. On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains of framework. 676

Jenkins, M. Proof of an arithmetical theorem leading, by means of Gauss' fourth Demonstration of Legendre's law of reciprocity, to the extension of that law. 92

Jesser, M. Kurz gefasste Lehre von den Kegelschnittlinien auf elementarem Wege. 482

Imchénietzky, B. Sur les fonctions de J. Bernoulli et l'expression de la différence entre l'intégrale aux différences finies et l'intégralé ordinaire dont les limites sont les mêmes. 124

Imchenetsky, V. G. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit du russe p. Hoüel. 177

Joachimsthal. Sur les nombres des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoide. 573

Jochmann, E. 1) Zur Abbildung der Rechtecke auf der Kreisfläche. 628
2) Ueber eine von Quincke beobachtete Klasse von Beugungserscheinungen. 791

Joerres. Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen mit Anwendungen auf Curven und Flächen zweiter und dritter Ordnung. 431

Joffroy, J. Démonstration de la formule $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$. 367

Jonquières, E. de. Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques. 557

Jordan, C. 1) Commentaire sur Galois. 40
2) Sur une équation du 16[me] degré. 56
3) Sur les équations de la divison des fonctions abéliennes. . . . 242
4) Sur les équations de la géométrie. 273
5) Théorèmes sur les équations algébriques. 274
6) Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. 274. 331. 579
7) Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre. 274. 579
8) Sur l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré. 274. 579
9) Traité des substitutions algébriques. 280
10) Théorème sur les fonctions doublement périodiques. 327
11) Sur la division des fonctions hyperelliptiques. 331
12) Sur les assemblages de lignes. 344

Jordan, W. 1) Bemerkung zu der zweiten Gauss'schen Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. 839
2) Ueber die Bestimmung der Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten. 841

Seite
Jouanne. Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal. . 362
Jouglet. Le maître de Descartes; ses théories. 267
Irmer, B. Ueber Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brenncurven. 611
Isé, E. Nota sulla risultante di due equazioni. 45
Jung, G. Dimostrazione del teorema I. Vol. VIII. Giornale di Napoli pag. 96. 346

Kanner, M. 1) Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik. 113
2) Grundlage zu einer Theorie des mittleren Risiko bei Lebensversicherungen. 114
Kayser, E. 1) Untersuchung des Mondes hinsichtlich seiner ellipsoidischen Gestalt. 849
2) Die Gleichungen einer Kometenbahn. 854
Keller, F. Intorno ad una formola del Leibniz. 19
Ketteler, E. Ueber den Einfluss der ponderabeln Molecüle auf die Dispersion des Lichts. 788
Khanikof, N. de. Procédé pour résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée $A+Bt^2=u^2$. 287
Kiepert, L. De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. 239
Kiessling, H. 1) Christian Huyghens „De circuli magnitudine inventa" als ein Beitrag zur Lehre vom Kreise. 12
2) Das geometrische Zeichnen als Vorschule für den mathematischen Unterricht. 35
Kinkelin, H. 1) Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. 41
2) Die Berechnung des christlichen Osterfestes. 857
Kirchhoff, G. 1) Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. 681
2) Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. 730
3) Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. 731
4) Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus. 813
Kirsch. 1) Theorie der Elasticität und Festigkeit dünner Platten. 767
2) Ueber die Festigkeit rechteckiger Platten, welche am Rande lose aufliegen. 768
Klamminger, F. Die Auflösung der sphärischen Dreiecke. . . . 368
Klein, F. 1) Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. 452
2) Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. 605
3) Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. 609
4) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. 632
5) Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse. 640
Klinkerfues, W. Einige Bemerkungen betreffend die Berechnung von Kometenbahnen. 854
Knitterscheid, A. Ein neues Supplement zum Problem des Appollonius II. 393
Kober, J. 1) Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. 34
2) Ueber die Definition des Parallelismus. 34
3) Die Lehre vom Parallelogramm. 35
Königsberger, L. 1) Berichtigung eines Satzes von Abel, die Darstellung der algebraischen Functionen betreffend. 40

Seite
Königsberger, L. 2) Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen 236
3) Die linearen Transformationen der Hermite'schen φ-Functionen. 238
4) Die Differentialgleichung der Perioden der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. 253
5) Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. 254
Kötteritzsch, Th. 1) Ueber die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen. 50
2) Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Conductoren. . . . 808
Kommerell. Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie. 369
Koniecki Elementare Darstellung der Capillaritätslehre. 774
Koppe, K. Anfangsgründe der algebraischen Analysis. 118
Korkine, A. 1) Sur les intégrales des équations du mouvement. 178. 691
2) Sur les équations simultanées aux différences partielles du premier ordre. 311
Korndörfer, G. Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten. 637
Korneck, G. Ueber mathematischen Unterricht. 36
Kortum, H. Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades 405
Kostka. Ueber die Auffindung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen, um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse, wenn deren Dichtigkeit und Umlaufszeit bekannt sind. 684
Kramm. Ueber die Brechung des Lichtes in einem System von Flächen zweiter Ordnung. 795
Krebs, G. Lehrbuch der Physik und Mechanik. 645
Krey, H. Bemerkungen über algebraische Lösbarkeit der Gleichungen. 42
Kronecker, L. 1) Bemerkungen zur Determinantentheorie. . . . 80
2) Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen. 97
3) Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. 203
4) Sur le théorème de Sturm. 275
5) Zur Potentialtheorie. 755
Krumme, W. 1) Aufgaben über die schiefe Ebene. 709
2) Das Parallelogramm der Bewegung in der Wellenlehre. . . . 712
Kudelka. Die Gesetze der Lichtbrechung. 795
Kühl, H. 1) Untersuchung über das einer Ellipse eingeschriebene grösste n-Eck 503
2) Das kleinste n-Eck um eine Ellipse zu beschreiben. 503
Kuhn, M. 1) Einiges über die Entwickelung der Kegelschnittslinien aus zwei gegebenen Kreisen in analytischer Behandlung. 486
2) Ableitung der Gleichungen für die Bewegung eines elastischen Theilchens. 770
Kuhse. Abhandlung über die Lemniscaten. 510
Kummer, E. F. 1) Festrede am 3. August 1869. 15
2) Ueber die einfachste Darstellung der aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen, welche durch Multiplication mit Einheiten bewirkt werden kann. 94
3) Ueber die aus 31ten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. 95

Seite

Kummer, E. F. 4) Ueber eine Eigenschaft der Einheiten der aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^{\lambda}=1$ gebildeten complexen Zahlen und über den zweiten Factor der Klassenzahl. 96
Kundt, A. Zur Theorie der Schwingungen in Luftplatten. 777
Kurz, A. 1) Berechnung der hyperbolischen dunkeln Büschel in zweiaxigen Krystallen. 793
2) Notiz zu: Eine Bestimmung der specifischen Wärme der Luft von Kohlrausch. 821
8) Ueber die von bewegten Gasmassen geleistete Arbeit. 821

Ladrasch. Von den cubischen Resten und Nichtresten. 90
Lagout. Premiers principes de la géométrie. 334
Laguerre. 1) Sur l'équation du troisième degré. 276
2) Note sur une classe d'équations différentielles du second ordre. 315
3) Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées du premier ordre. 315
4) Sur l'intégration d'une équation différentielle du second ordre. 315
5) Sur l'emploi des imaginaires en géométrie. 339
6) Sur la règle des signes en géométrie. 346
7) Extrait d'une lettre adressée à Mr. Bourget 522
8) Emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace. 527
9) Propriétés des courbes tracées sur une surface quelconque. . 537
10) Sur les courbes que l'on peut tracer sur les surfaces algébriques. 561
11) Quelques propriétés des cônes algébriques. 562
12) Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre. 569
13) Sur quelques propriétés des lignes spiriques. 588
14) Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre. 588
Laisant, A. 1) Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques. 282
2) Solution d'une question (902). 286
Lampe, C. Zur Bewegung des Systems zweier Punkte, deren einer sich auf vorgeschriebener Bahn bewegt. 698
Lampe, E. Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes. 591
Lang, V. v. Einleitung in die theoretische Physik. 779
Launeau, F. de. Instrument destiné à tracer une ellipse d'un mouvement continu. 494
Lappe, J. Ueber den Feuerbach'schen Satz für das ebene Dreieck. 350
Le Besgue. 1) Sur l'équation du 3ème degré. 276
2) Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive. 283
3) Note sur quelques équations indéterminées. 287
4) Sur les questions 894 et 961. 364
Leclert, E. Propriété de la parabole. 490
Leffler, G. M. 1) Integration af differential equationer $f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 169
2) Integration af Differentialequationer. 462
Lemoine, E. 1) Note sur une question d'arithmétique. 291
2) Note sur la fonction $y=a^x-x$. 300
3) Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle. 349
Lemonnier, H. 1) Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion. 472

Seite

Lemonnier, H. 2) Solution d'une question géométrique. 575
3) Étude analytique sur la cyclide. 584
Leray. Théorie nouvelle de la gravitation. 761
Le Roi, A. Notice sur la vie et les travaux de Jean Baptiste Brasseur. 24
Levi. Sulle evolventi allungate e associate delle linee piane. . . . 465
Lévy, M. 1) Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales. 453
2) Essai sur une théorie rationelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. 673
3) Mémoires sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. 723
4) Sur un système très-simple de vanne à débit constant sous pression variable. 746
Liagre, J. Notice sur J.-B. Brasseur. 24
Lie, S. 1) Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. 341
2) Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes. 607
3) Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. 609
4) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. 632
Lieblein, J. Ueber den Zusammenhang verschiedener Transformationsformeln für elliptische Integrale mit einem Problem der Geometrie. 230
Ligowski, W. Ueber die Reduction der Monddistanzen mit Anwendung vierstelliger Logarithmen. 850
Lindelöf, L. 1) Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minima. 186. 596
2) Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume. 425
3) Sur la courbure moyenne d'une courbe plane fermée. 463
4) Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée renferment le plus grand volume. 596
Linder. Sur le magnétisme terrestre. 817
Lindmann, Chr. 1) De seriebus quibusdam annotationes. 124
2) Demonstratio synthetica theorematis, quod ex Elementis Euclidis a Cell. Betti e Brioschi editis sumtum et pag. 116 tomi Li hujus Archivi propositum est. 350
3) Problema geometricum. 352
4) Anteckningar angaende rätliniga figurer, inskrifna uti och omskrifna omkring en ellips. 504
Lionnet, E. 1) Démonstration d'un théorème de Fermat. 361
2) Note sur un problème élémentaire de géométrie sphérique. . . 366
Liouville, J. 1) Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5$ (mod. 12). 282. 286
2) Nouveau théorème concernant la fonction numérique $F(k)$. . . 284
3) Remarque au sujet de la function $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n. 284
4) Théorème concernant la fonction numérique $\varrho_2(n)$. 285
5) Sur la forme ternaire $x^2+2y^2+3z^2$. 287
6) Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. 287
7) Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. 288
8) Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. 305
9) Extrait d'une lettre adressée à Mr. Le Besge. 327
Lippich, F. 1) Die Ebene und Gerade als Elemente des barycentrischen analytischen Calculs. 460

Seite

Lippich, F. 2) Ueber die Breite der Spectrallinien. 827
Lipschitz, R. 1) Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Variabeln. 129
2) Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. 130
3) Beiträge zur Theorie der Umkehrung eines Functionensystems. 206
Littrow, C. v. Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. 3
Löwenherz, S. De curvis tangentialibus. 515
Lommel, E. 1) Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. 258
2) Integration der Gleichung $x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}} \mp y = 0$ durch Bessel'sche Functionen. 258
3) Die Frauenhofer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung. 792
4) Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. 793
Lorberg, H. Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nichtlinearen Leitern 812
Lorenz, L. 1) Om Centrifugalkraften. 726
2) Zur Moleculartheorie der Elektricitätslehre. 806
Lorey, A. Die fünf regelmässigen Körper. 365
Loschmidt, J. 1) Ableitung des Potentials bewegter elektrischer Massen aus dem Potential für den Ruhezustand. 807
2) Die Elektricitätsbewegung im galvanischen Streme. 810
3) Der zweite Satz der mechanischen Wärmetheorie. 822
Lucas, E. 1) Note sur les coefficients du binôme de Newton. . . 295
2) Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers. 297
Lucas, F. 1) Sur une formule d'analyse. 281
2) Étude sur la mécanique des atomes. 714
3) Nouvelles propriétés de la fonction potentielle. 754
4) Étude sur la mécanique des atomes. 759
Lüdde. Die Sonne im Dienste der Kartographie. 834
Lüroth, J. 1) Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. 116. 844
2) Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raum. 436
3) Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung. 511
Lürtz, Logarithmentafeln. 863
Lundström. Distinction des maxima et minima dans un problème isopérimétrique. 185
Luvini, G. Logarithmentafeln. 862

Maier, A. Die ebene Geometrie und deren Anwendungen. 345
Manilius. Note sur l'interprétation de la conception infinitésimale de Poisson. 127
Mannheim, A. 1) Droite polaire, axe de courbure. 541
2) Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. . . 654
3) Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique. 656
4) Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies. . . . 658
5) Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite. 658

Seite

Mannheim, A. 6) Construction de l'axe de courbure de la surface développable, enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions. 658
Mansion, P. 1) Sur le problème des partis. 111
2) Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. 330
Marchetti, F. Cenni Necrologici del P. Nazareno Mancini. . . . 24
Marie, F. Sainte-. Sur le postulatum d'Euclide. 335
Marten, F. Die Rolllinien und die Brennlinie durch Zurückwerfung. 523
Martin, H. Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos. Lettre à B. Boncompagni. 17
Martius, v. 1) Sir David Brewster. 23
2) Carl Georg Christian von Staudt. 23
Marsano, G. B. 1) Sopra una quistione di posizione di numeri. . 92
2) Sulla legge delle derivate generali delle funzioni di funzioni di più variabili indipendenti, e sulla teoria delle forme di partizione dei numeri interi. 134
Marx, E. 1) Die Elemente der Geometrie des Raumes. 363
2) Beitrag zur Kenntniss der Kettenlinie. 525. 660
Massieu, F. Sur les fonctions charactéristiques des divers fluides. 826
Mathieu, E. 1) Sur la généralisation du premier et du second potentiel. 749
2) Mémoire sur l'équation aux différences partielles du 4me ordre $\Delta_2 \Delta u = 0$. 750. 763
3) Sur le mouvement vibratoire d'une plaque. 764
4) Sur le mouvement de la température dans le corps enfermé entre deux cylindres circulaires excentriques. 830
Matthiessen, L. 1) Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben zur directen Auflösung der quadratischen und kubischen litteralen Gleichungen. 25. 52
2) De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem. 686
3) Ueber die scheinbare und absolute Grösse der Sonne. 857
Mauritius, R. Bemerkungen zur Psychologie der Raumvorstellungen und zum Fechner'schen Gesetze der logarithmischen Perception. 30
Maxwell, J. Clerk. 1) On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress. 621
2) On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. 677
3) On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress. 818
Mayer, A. Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Principe der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht. . . . 182
Mayr, A. Construction der Differentialgleichungen aus particularen Integralen. 158
Mehler, G. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. 263. 810
Meissel, E. 1) Ueber die Bestimmung der Primzahlmenge innerhalb gegebener Grenzen. 87
2) Notiz über die Anzahl aller Zerlegungen sehr grosser ganzer positiver Zahlen in Summen ganzer positiver Zahlen. 99
Melon, A. G. Sur les combinaisons complètes. 290

Seite

Menabrea, L. F. 1) Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique. 765
2) Dilucidazioni sul principio di elasticità. 766
Merrifield, C. W. 1) On a geometrical proposition, indicating that the property of the radical axis was probably discovered by the Arabs. 356
2) Resistance as the cube of the velocity. 719
Mertens, F. Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. 755
Mette, K. Ueber die Kegelschnitte: a) Von der Parabel. 494
Metzler. Die symmetrische Function
$fx'^{\alpha}x''^{\beta}x'''^{\gamma}\ldots - ([\alpha-1]+[\beta-1]+[\gamma-1]+\ldots)$. 84
Meyer, G. F. Notiz über zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale. 153
Meyer, N. Gestalt der Himmelskörper. 844
Michal. Application de la géométrie analytique à la détermination des orbites des planètes. 848
Milinowski, A. Kegelschnitte in doppelter Berührung. 499
Minding, F. 1) Loi de la formation des dénominateurs et des numérateurs pour la réduction des fractions continues en fractions ordinaires. 105
2) Ueber eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 117 854
Mirabello, G. Sopra una quistione proposta nel giornale di Terquem. 498
Möllmann, B. Die geometrische Bedeutung des Differentials
$\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}$. 226
Mohr, F. Allgemeine Theorie der Bewegung und Kraft als Grundlage der Physik. 820
Mollame, V. Dimostrazione dei teoremi 3 e 4 enunciati a pag 228. . . . . 361. 498
Moncel, Th. du. 1) Note sur les accouplements des piles en séries. 813
2) Note sur le maximum de force des electro-aimants. 813
Mondésir, P. de. Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la mécanique. 647
Montag, C. Ueber ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. 392
Montucci, H. 1) Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinômes. 278
2) Mémoire sur la recherche des racines des équations à trois termes de tous les degrés à l'aide de la cubo-cycloide. . . . 519
3) Dernier mémoire sur la recherche des racines des équations trinômes de tous les degrés à l'aide de la cubo-cycloide. . . . 519
Moon, R. 1) The solution of linear partial differential equations of the second order involving two independent variables. . . . 179
2) On the equation of Laplace's coefficients. 181
3) On the theory of sound. 775
Morel, S. 1) Solution d'une question (914). 286
2) Problèmes de géométrie. 356
3) Problèmes de géométrie analytique 491
Moret-Blanc. Solution de la question 951. 295
Morgan, A. de. (the late) 1) On the root of any function and on neutral series. 127
2) On the conic octagram. 392

Seite

Moseley, H. 1) On the descent of a solid body on an inclined plane when subjected to alternation of temperature. 709
2) On the mechanical impossibility of the descent of glaciers by their weight only. 722
3) On the uniform motion of an imperfect fluid. 729
Most, R. 1) Ueber die Summirung gesetzmässig ausgewählter Reihenglieder. 120
2) Ueber drei Integrationen innerhalb des Gebildes $\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots=1$. 145
3) Ueber eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung. 172
4) Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunctionen. 257
5) Zur Lehre von den Transversalen im Dreiecke und der dreiseitigen Pyramide. 346
6) Ueber den Schwerpunkt der Umgrenzung bei den einfachsten Figuren und Körpern. 670
7) Ueber die Beziehung der Pole zur magnetischen Vertheilungscurve. 818
8) Ein einfacher Beweis des zweiten Wärmegesetzes. 820
9) Entgegnung und Erwiderung an Boltzmann. 820
Mousson, A. 1) Der jetzige Standpunkt unserer Kenntniss über die Schwere. 689
2) Bemerkungen über die Theorie der Capillarerscheinungen. . . 774
Moutard. 1) Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. 321
2) Transformations géométriques des surfaces. 618
Moutier, J. 1) Sur les principes fondamentaux de l'hydrostatique. 681
2) Sur la fonction potentielle et le potentiel. 749
3) Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide. 774
4) Sur les attractions et répulsions des corps électriques. 805
5) Sur la détente des gaz. 824
Mühll, K. v. d. Ueber den stationären Temperaturzustand. . . . 828
Müller, E. Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt. 37
Müller, H. 1) Ueber eine geometrische Verwandtschaft fünften Grades. 430
2) Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetischer Behandlung. 433
3) Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung. 434
4) Ueber eine Construction der allgemeinen Curve vierter Ordnung, welche durch 14 ihrer Punkte bestimmt ist. 640
5) Die Keppler'schen Gesetze. 694
Mulder, E. Geschwindigkeit der Molecularbewegung und des Schalles in Gasen. 827
Mylord, H. 1) Lösning af opgave 270. 154
2) Lösning af opgave 267. 169
3) Lösning af opgave 204. 504
4) Lösning af opgave 70. 504
5) Lösning af opgave 223. 516
6) Lösning af opgave 149. 659
7) Om Centralellipsoider og principale Axer. 727

Narducci, E. 1) Indicazione degli scritti di Agostino Cauchy contenute in otto raccolte scientifiche. 19
2) Intorno alla vita ed agli scritti del Francesco Woepcke. . . . 21

Seite

Nawrath, H. Ueber die Construction eines einfachen Polygons, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygon zu gleicher Zeit eingeschrieben und umgeschrieben ist. 353
Nejedli, J. J. Note über die mehrfachen und willkürlichen Werthe einiger bestimmter Integrale. 152
Nell. Logarithmentafeln. 862
Neovius, V. Särobok i minsta quadrat-methoden. 117
Netto, E. De transformatione aequationis $y^n = R(x)$, designante $R(x)$ functionem integram rationalem variabilis x in aequationem $\eta^2 = R_1(\zeta)$. 199
Neuberg, J. Théorie des indices des points, des droites et des planes par rapport à une surface du second ordre. 565
Neuberg, M. 1) Étude sur les coordonnées tétraédiques. Rapport de Gilbert. 452
2) Triangles et coniques combinés. 501
Neumann, C. 1) Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. 39
2) Zur Theorie der Functionaldeterminanten. 79
3) Ueber eine Erweiterung desjenigen Satzes der Integralrechnung, welcher der Theorie der Partialbruchzerlegung zu Grunde liegt. 203
4) Ueber die Entwickelung einer Function nach Quadraten und Produkten der Fourier-Bessel'schen Functionen. 255
5) Ueber Produkte und Quadrate der Bessel'schen Functionen. . 262
6) Geometrische Untersuchung über die Bewegung eines starren Körpers. 653
7) Untersuchungen über die Bewegung eines Systems starrer Körper. 653
8) Ueber den Satz von der virtuellen Verrückung. 662
9) Notiz über das cykloidische Pendel. 712
10) Zur Theorie des Potentials. 753
11) Ueber die Aetherbewegung in Krystallen. 782
12) Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik. 797
13) Ueber die oscillirende Entladung einer Franklin'schen Tafel. . 811
14) Ueber die mechanische Energie der Schwefelsäure. 828
Newcomb, S. Aperçu d'une méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels. 848
Newman, F. W. 1) On curves of the third degree or tertians. . 507
2) On conic osculation. 548
3) On the curvature of surfaces of the second degree. 566
Niemtschick, R. 1) Ueber die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien. 387
2) Ueber die Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittslinien. 388
3) Einfache Construction windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschnitten. . . . 434
Niewenglowski. Étude sur la sphère. 564
Niven, C. Application of a change of the dependent and independent variables. 178
Nöther, M. 1) Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln. 202
2) Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. . . 616
3) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. 619
4) Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. 624

Seite

Noth, Th. 1) Ueber die mit Hülfe der Jacobi'schen Function zu behandelnden Fälle der Centralbewegung. 241
2) Ueber gewisse Fälle der Centralbewegung. 694

Ofterdinger, L. F. Ueber den Keppler'schen Kessel in Ulm. Vortrag, gehalten in Ulm den 7. Januar 1870. 10
Oijen, G. A. Vorsterman van. 1) Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVI[e] et du commencement du XVII[e] siècle et leurs instruments. 11
2) Zwei geometrische Sätze. 351
Okatow, M. Notiz über das Gleichgewicht eines schweren Drahtes, dessen Axe eine Schraubenlinie bildet. 769
Olivier, A. 1) Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven. 380
2) Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven. 380
3) Ueber die Methode die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projectivische Curvenbüschel erzeugt wird. 382
4) Ueber die Erzeugung solcher geometrischer Curven, welche durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven bestimmt sind. 413
Oppel. Ueber die wissenschaftliche Darstellung der Bruchrechnung und Division in Gymnasien und ähnlichen höheren Lehranstalten. 38
Oppermann. En Tilnarmelsesformel. Meddelt af S. Hertzsprung. 355
Oppolzer, Th. v. Ueber die Bestimmung einer Kometenbahn. . . 846
Orlando, D. Dimostrazione dei teoremi proposti da V. N. Bitonti. 361
Ott, K. v. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. 661
Ovidio, E d'. 1) Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee. 452
2) Nuova espozione della teoria generale delle curve di 2° ordine in coordinate trilineari. 481
3) Nota sopra due teoremi del Sig. Mannheim. 499

Paczkowski, J. Geometrische Eigenschaften des Bildes unter Wasser gelegener Curven. 524
Padova, E. 1) Applicazione del metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie. 709
2) Sul moto di un ellissoide fluido ed omogeneo. 733
3) Del moto di un ellissoide in un fluido incompressibile ed indefinito. 734
4) Sopra due teoremi del Sgr. Neumann. 754
5) Sul moto di un ellissoide fluido ed omogeneo. 758
Paillote, L. Moyen simple de mener la normale à l'ellipse. . . . 496
Painvin, L. 1) Courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface. 463. 537
2) Note sur la construction géométrique des normales à une conique. 484
3) Note sur l'hypocycloide à trois rebroussements. 521
4) Courbure en un point multiple d'une surface. 536
5) Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. 543
6) Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles. . 551
7) Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. 569
8) Note sur la transformation homographique. 620
Palermo, F. Sulla vita ed opere di Giovanni Battista Amici. . 21

Seite

Pantanelli, D. Disegna assonometrica. 370
Parpaite. Note sur la règle des signes de Descartes. 276
Pasch, M. 1) Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. 73. 505
2) Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden. . . 604
Pellet, E. 1) Solution d'une question (869). 279
2) Solution d'une question (890). 280
3) Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire. 285
4) Solution d'une question (853). 296
Penny, W. G. On the rotatory motion of heavenly bodies. . . . 856
Pepin. Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationnels. 283
Petersen, J. 1) Lösning af Opgave 124. 54
2) Om et Punkts Potenz med Hinsyn til en Curve. 516
3) De virtuelle Hastigheders Princip anvendt paa et System, hvor der ir Gnidning. 662
4) Svómmende Legemes. 687
Phillips. 1) De l'équilibre des solides élastiques semblables. . . 767
2) Du mouvement des corps solides élastiques semblables. . . . 767
Piani, D. Sul centro di gravità. Disquisizioni storico-critiche. 29. 664
Pisko, J. Newton oder Pascal. 13
Plücker, J. Neue Geometrie des Raumes. 601
Pochhammer, L. Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung. 265
Pöschko, A. Auflösungsmethoden unbestimmter Gleichungen. . . 48
Polignac, C. de. On a problem in combinations. 109
Preece, W. H. The parallelogram of forces. 661
Pressler, M. R. Das mathematische Aschenbrödel. 864
Preusse. Eine Gerade, auf welcher ein schwerer materieller Punkt gleiten kann. 660
Price. Treatise on infinitesimal calculus. 127
Privat-Deschanel, A. Elementary treatise on natural philosophy. 646
Prondzynski, B. v. Ueber die Anzahl der Winkel- und Sinus-Gleichungen bei Ausgleichung trigonometrischer Dreiecksnetze. 843
Prowe, L. 1) Das Andenken des Copernicus bei der dankbaren Nachwelt. 8
2) Ueber den Sterbeort und die Grabstätte des Copernicus. . . . 8
Prym, F. E. 1) Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$. 210
2) Ueber ein Randintegral. 212
3) Beweis zweier Sätze der Functionentheorie. 213
Puschl, C. Ueber eine kosmische Anziehung, welche die Sonne durch ihre Strahlen ausübt. 846
Puschel, K. Ueber Wärmemenge und Temperatur der Körper. . 823
Puiseux, V. 1) Discours sur Lamé. 269
2) Sur l'accélération séculaire du mouvement de la lune, nebst rapport von Delaunay. 851

Quesneville, G. Remarque relative à la note de Mr. Flammarion. 856
Quetelet, A. Notice sur J.-A. Timmermans. 21

Radau, R. 1) Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik. 178
2) Sur la résultante de 3 formes quadratiques ternaires. 280

Seite

Radau, R. 3) Bemerkungen über das Waagebarometer. 687
4) Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. 699. 702
5) Betrachtungen über die Flächensätze. 702
6) Weitere Bemerkungen über das Problem der drei Körper. . . 702
7) Sur une transformation des coordonnées de trois corps dans laquelle figurent les moments d'inertie. 702
8) Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik. 703
9) Sur la rotation des corps solides. 724
Rankine, W. J. M. 1) Remarks on Mr. Heppel's theory of continuous beams. 678
2) On the mathematical theory of combined streams. 729
3) On the thermodynamical theory of waves of finite longitudinal disturbance. 832
4) On the thermal energy of molecular vortices. 832
Réalis, S. 1) Identités arithmétiques. 296
2) Démonstration d'une formule de trigonométrie. 297
Reech. Équations fondamentales dans la théorie mécanique de la chaleur. 826
Regis, D. 1) Sul numero delle radici reali che puo' avere l'equazione $x^m - px + q = 0$. 48
2) Tavole grafiche atte a risolvere ogni questo relativo agl' interessi composti ed alle annuità. 115
3) Sopra un' applicazione dei principii di omologia alla perspettiva. 370
4) Logarithmentafeln. 862
Reiss, M. Analytisch-geometrische Studien. 471
Résal, H. 1) Étude géométrique sur le mouvement d'une sphère glissant ou roulant sur un plan horizontal. 660
2) Note sur le pendule à oscillations elliptiques. 712
3) Sur la question du mouvement relatif de l'eau dans les aubes de la roue Poncelet. 744
4) De l'équilibre, de l'élasticité et de la résistance du ressort à boudin. 770
5) Calcul des épaisseurs des fonds plats et bombés des chaudières cylindriques. 831
Retsin. Démonstrations nouvelles de deux théorèmes de géométrie. 351
Reusch, E. Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. 794
Reye, Th. 1) Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung. 425
2) Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung. 438
3) Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie. 610
4) Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen. 671
Reynard. Nouvelle théorie des actions électrodynamiques, und Rapport von Bertrand. 799
Rhein. Von den Kegelschnitten. 483
Ribaucour, A. 1) Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan. 462
2) Sur les surfaces orthogonales. 533
3) Sur la théorie des surfaces. 534
4) Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre. . 618
5) Sur la déformation des surfaces. 630. 631
Richelot, F. J. 1) Die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen. . . 234
2) Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten. 611

Seite

Ricour, M. Sur la dispersion de la lumière. 789
Riemann, B. 1) Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. 175
2) Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist. 208
3) Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. 271. 334
Roberts, M. 1) Sur les fonctions abéliennes. 242
2) Sur les lignes de courbure d'un ellipsoide. 572
Roberts, S. 1) On the order of certain systems of algebraical equations. 48
2) On the degree of the discriminant with respect to a parameter in certain cases. 75
3) Note on a binary evectant form. 79
4) On the mechanical description of some species of circular curves of the third and fourth degrees. 511
Roberts, W. Sur une intégrale double définie. 156
Röhr. Methodologisch-mathematische Aphorismen. 345
Röhrs, J. H. On the strains to which ordnance are subject and on the vibrations of the solid bodies in general. 766
Roger, A. Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré. 277
Roger, E. 1) Note sur les courbures des surfaces. 538
2) Note sur quelques propriétés des surfaces courbes. 538
Rolland, E. Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse. 728
Rosanes, J. 1) Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. 73. 505
2) Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage. 372
Rosendahl. Quadratur und Rectification der Curven. 363
Rossi, G. Sulla locale de' centri delle coniche, che toccano due rette e passano per due punti. 497
Routh, E. J. 1) Equilibrium of one heavy rough body on another. 664
2) Moment of inertia of a quadrilateral. 675
R. P. Note on a formula of Cauchy. 153
Rudel, K. Die ersten Elemente der darstellenden Geometrie. . . 369
Rummer, F. Untersuchungen über eine neue krumme Linie. . . . 526
Rump, F. H. Construction und Berechnung von Ovalen. 516
Russel, W. H. L. 1) Report on recent progress in elliptic and hyperelliptic functions. 219
2) On the mechanical description of curves. 467
R. W. G. 1) On geometrical methods in maxima and minima. 134. 466. 504
2) On the chords of conic curvature. 485

Saalschütz, L. Zur Theorie der Evolventenverzahnung. 660
Sabinine. Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples. 183
Saltel, L. Note sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface de second ordre. 568
Santini, G. Compendiato esposizione del modo più vantaggiosa di risolvere una serie di equazioni lineari, resultanti da operazioni tutti ugualmente probabili, per la determinazione degli elementi di una proposta teorica. 117
Sang, E. On the extension of Brouncker's method to the comparison of several magnitudes. 107
Sardi, C. 1) Teoremi di aritmetica. 86
2) Sulle somme de' divisori de' numeri. 91

Seite

Sardi, C. 3) Su talune serie, ed applicazione all' aritmetica. . . 119
Sartiaux, A. Note sur les surfaces du troisième ordre. 576
Saymié, E. Division d'un angle en parties égales et multiplication du cube. 362
Schaller, F. Logarithmentafeln. 863
Schell, A. Ueber die Genauigkeit der Winkelgleichung des Stampfer'schen Nivellirinstrumentes. 836
Schell, W. Theorie der Bewegung und der Kräfte. 645
Schemmel, V. Ueber relative Primzahlen. 87
Schenk. 60 geometrische Aufgaben. 862
Schering, E. 1) Notice biographique sur Bernhard Riemann. . . 22
2) Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. 94
3) Mittheilung über den III. Band von Gauss' Werken. 241
4) Die Schwerkraft im Gaussischen Raum. 688
Schiaparelli, G. V. Relazione „sopra una regola proposta per la trisezione dell' angolo dal Sig. Gaetano Baratto.“ 362
Schläfli, L. 1) La risolvente dell' equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee. . . . 53
2) Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe. 122
3) Ueber die partielle Differentialgleichung $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2w}{dx^2}$. 181
4) Sullo sviluppo del periodo imaginario, pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo. 232
5) Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. 238
6) Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen. 261
Schlegel, V. Solution d'une question (889). 286
Schlesinger. Darstellung der räumlichen Collinearprojectionen in orthogonalen Abbildungen 369
Schlimbach, A. Die politische Arithmetik und ihre Herleitung. . 859
Schlömilch, O. 1) Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft von J. C. Fresenius. 30
2) Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. . 123
3) Ueber die harmonische Reihe 123
4) Ueber die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen, nach einer brieflichen Mittheilung von P. H. Schoute. 135
5) Ueber rectificable Curven. 145. 461
6) Notiz über die Rectification von Curven. 145
7) Ueber den Werth von arctg $(\xi + i\eta)$. 219
8) Ueber einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. 513
9) Ueber eine Spirale. 525
10) Ueber die Anziehung eines Ellipsoides auf einen äusseren Punkt. 758
11) Logarithmentafeln. 862
Schlotke, J. Stereoskopische Figuren. 363
Schmidt. Anwendung der analytischen Geometrie zum Beweise bekannter Lehrsätze der Planimetrie. 345
Schmidt, Chr. Das reguläre Siebeneck geometrisch construirt. . . 355
Schmidt, J. P. Cours de géométrie descriptive. 369
Schneebeli, H. Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. 770
Schoder. Logarithmentafeln. 863
Schramm, H. Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation. 47

Seite

Schröder, E. 1) Ueber unendlich viel Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. 42
2) Vier combinatorische Probleme. 108
3) Ueber iterirte Functionen. 200
Schröter, H. Ueber perspectivisch liegende Dreiecke. 372
Schubert, H. 1) Geometrische Bestimmung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernfläche. 426
2) Eine geometrische Eigenschaft der 16 Kugeln, welche vier beliebig gegebene Kugeln berühren. 433
3) Metrische Relationen zwischen den Radien der 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren. 433
4) Zur Theorie der Charakteristiken. 441
Schwarz, H. Kritische Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. 56
Schwarz, H. A. 1) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ für die Fläche eines Kreises. 214
2) Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. . . 214
3) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. 214
4) Ueber einige Abbildungsaufgaben. 626
5) Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. 626
6) Notizia sulla rappresentazione di un' ellisse sopra un circolo. . 627
Sédillot, L. A. Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collége de France. 17
Seeger, J. Ueber die Gleichgewichtsvertheilung der statischen Elektricität auf drei und vier leitenden Kugeln. 806
Seegers, K. Zur Theorie der elliptischen Functionen. 242
Seeling. Verschiedene Aufsätze zur Zahlenlehre. 106
Seidel. Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes. 192
Seidelin, C. 1) Beviser for a Par Saetninger i Permutationer Kombinationer. 111
2) Bevis for en Satning af Stereometrien. 365
Serret, J. A. 1) Sur un problème de calcul intégral. 289. 303
2) Rapport sur un mémoire de Mr. Bouquet, relatif à la théorie des intégrales ultra-elliptiques. 331
Serret, P. Sur un théorème de Ferrers. 526
Siacci, F. Sul teorema del Conte di Fagnano. 18. 228
Simerka, W. Die rationalen Dreiecke. 98
Simon, Ch. Mémoire sur la rotation de la lune. 850
Smith, J. The ratio between diameter and circumference in a circle. 355
Smith, H. J. E. Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, et Appendice. 405
Smith, St. 1) On some geometrical constructions. 386
2) On the focal properties of homographic figures. 394
Smith, W. R. Hegel and the metaphysics of the fluxional calculus. 38
Somof, J. 1) Note sur la rectification approximative des courbes quelconques. 461
2) Note relative à une démonstration donnée par Cauchy des équations générales de l'équilibre. 663

Seite

Somof, J. 3) Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface. 754
Sonderhof, A. Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid betrachteten Horizontalwinkel. 838
Sondhauss, C. F. J. Ueber die Ableitung der Nepper'schen Analogien und der Gauss'schen Gleichungen. 368
Spieker, Th. Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des geradlinigen Dreiecks als Analogon des Kreises der neun Punkte 351
Spitz, S. Erster Cursus der Differential- und Integralrechnung. . . 127
Spitzer, S. Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^n z}{dx^n} = x^m \frac{d^{m+n} z}{dy^{m+n}} + F_1(y) + x F_2(y) + \dots x^{m-1} F_m(y),$$

in welcher m und n ganze positive Zahlen und $F_1(y), F_2(y), \dots F_m(y)$ beliebige Functionen von y sind. 179
Spottiswoode, W. 1) Théorème concernant la théorie des surfaces. 541
2) On the contact of conics with surfaces. 556
Spring. Discours prononcé au nom de l'Académie (de Bruxelles) lors des funérailles de Mr. J. B. Brasseur, décédé à Liège, le 13. Mai 1868. 23
Stahl, J. Ueber einige Punkte in der Theorie der Capillarerscheinungen. 771
Stahlberger, E. Ueber die Berechnung der mittleren Tagestemperatur aus der höchsten und tiefsten Temperatur. 831
Stammer, W. Ueber Fermat's geometrischen Satz. 352
Stampfer. S. Logarithmentafeln. 862
Staudigl, R. 1) Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird. 389
2) Ellipsenconstructionen. 496
3) Untersuchungen einiger Gewölbformen, durch welche ein Raum mit trapezoidförmigem Grundrisse überwölbt werden kann. . . 594
Steen, A. 1) Lösning af opgave 45. 86
2) Bestemmelse af et Kort efter Omlagning i. Bunker und et Korts Bestemmelse ved Henforelse til en given Plads. 110
3) Optaelling af hvert andet Kort i-en Stamme i-en bestemt Orden. 110
4) Om Ondrengen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af förrte Art. 144. 220
5) Om lineare Differentialligningers Integration ved bestemte Integraler. 168
6) Ogtan en Methode til Integration af

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = f(x^2+y^2). \quad \dots \dots \quad 169.\ 462$$

7) Nogle Bemarkninger om Integration af Differentialligninger. . 170
8) Begyndelsegrunde i den analytiske Geometrie. 461
Stefan, J. Ueber die Grundformeln der Elektrodynamik. 798
Steiner, C. F. G. Geometrische Constructionslehre und Linearperspective für Künstler und Gewerke. 369
Steinheil, v. Ueber konstruktive Auflösung der sphärischen Dreiecke. 366
Steinschneider, M. 1) Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen in's Arabische und ihres Einflusses auf die arabische Literatur. 4
2) Levi ben Gerson. 5
Stern, M. A. 1) Ueber einen Satz von Gauss 88

Seite

Stern, M. A. 2) Ueber quadratische, trigonale und bitrigonale Reste. . . . 88
3) Ueber einen einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und einige damit zusammenhängende Sätze. 93
4) J. Bertrand: Traité de calcul différentiel et de calcul intégral; calcul intégral; intégrales définies et indéfinies. 126
Stiattesi, A. Sull' Aritmetica. . . . 29
Stokes, G. G. Supplement to a paper on the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments. . . . 163
Streinz, F. Ueber Cycloiden. . . . 519
Strutt, J. W. On the values of the integral $\int_0^1 Q_n Q_{n'} d\mu$, $Q_n, Q_{n'}$ being Laplace's coefficients of the orders n, n', with an application to the theory of radiation. . . . 157
Struve, C. Versuch, die naturphilosophischen Ansichten Newton's in ihrer Beziehung zu denen seiner Vorgänger darzulegen. . . 13
Studnička. Beiträge zur Theorie der Integration von completen linearen Differentialgleichungen. . . . 165
Sturm, R. 1) Die neuere Geometrie auf der Schule. 33
2) Ueber Singularitäten der allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung. . . 425
3) Sur la surface enveloppée par les plans, qui coupent une courbe gauche du 4ième ordre et 2ième espèce en quatre points d'un cercle. . . . 425
4) Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. . . . 428
5) Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung. 432
6) Ueber die römische Fläche von Steiner. . . . 439
7) Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches? . . . 447
Sylow. Bemarkning om Kjendetegnet paa en algebraisk Lignings Oplóselighed ved Rodtegn, naad den erreduktibel og dens Grad er et Primtal. . . . 54
Sylvester, J. J. 1) The story of an equation of differences of the second order. . . . 167
2) Note on a new continued fraction applicable to the quadrature of the circle. . . . 355
3) On the successive involutes to a circle. . . . 524
4) On Prof. Ch. Wiener's stereoscopic representation of the cubic eikosi-heptagram of Dr. Salmon. . . . 577

Tafeln der Sternwarte zu Berlin. . . . 863
Tait, P. G. 1) On the rotation of a rigid body round a fixed point. 725
2) On Green's and other allied theorems. . . . 748
Tappe. Gerbert oder Papst Sylvester II. und seine Zeit. 5
Tardy, P. 1) Sopra alcuni teoremi aritmetici. . . . 90
2) Note sur une formule de Leibniz. . . . 295
Taylor, C. 1) On some equivalent equations. . . . 453
2) The principles of geometrical curves . . . 483
Taylor, J. P. Geometrical proof of M. Faure's and some kindred theorems. . . . 392
Tchébycheff, P. 1) Formule d'interpolation par la méthode des moindres carrés. . . . 116
2) Des fonctions semblables à celles de Legendre. 157
3) Sur la détermination des fonctions par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable. 198

Seite

Tegethoff, A. v. Compendium der Differential- und Integralrechnung. 126
Terquem, A. Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus. 775
Tessari, D. Sopra la divisione degli angoli in un numero dispari qualunque di parti uguali. 373
Thiele, T. N. 1) Lösning af Opgave 179. 54
2) Nogle kritiske Bemarkninger. 55
3) Lösning af Opgave 225. 86
4) Bemarkning om Kjaedebroker. 105
5) Den endelige Kjaedebröks-Funktions Theori. 106
6) Lösning af Opgave 228. 353
7) Lösning af Opgave 23. 504
Thomae. 1) Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe:
$1+\frac{a_0 a_1 a_2}{1.b_1 b_2}x+\frac{a_0(a_0+1)a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{1.2.b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)}x^2+\dots$ 122
2) Die Recursionsformel
$(B+An)\varphi(n)+(B'-A'n)\varphi(n+1)+(B''+A''n)\varphi(n+2)=0.$ . . 122
3) Beiträge zur Theorie der durch die Heine'sche Reihe
$1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}x^2+\dots$
darstellbaren Functionen. 122
4) Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 187 220
5) Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen. 244
6) Beitrag zur Theorie der Function $P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{pmatrix} x$. 263
Thompson, W. H. On magic squares. 90
Thomson, F. D. 1) Notes on the geometry of a cubic curve. . . 405
2) The equation to the axes of a conic. 487
Thoulet, J. Sur les formules et les calculs qui ont servi à construire la carte gnomonique de l'Europe. 861
Tietjen, F. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, wenn dieselben geocentrisch nahe in einem Kreise liegen. 847
Tilly, M. de. Études de la mécanique abstraite. 648
Tissérand, F. 1) Sur un point du calcul des différences. 300
2) Sur l'interpolation. 305
Tissot, A. 1) Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. 303
2) Sur le pendule conique. 713
Todhunter, J. 1) On the method of least squares. 115
2) On Jacobi's theorem respecting the relative equilibrium of a revolving ellipsoid of fluid and on Jvory's discussion of the theorem. 684
Töplitz, J. Die constanten Relationen bei den Dreiecks- und tetraedrischen Coordinaten. 452
Tognoli, O. 1) Teoremi di Chasles sopra la proprietà dei sistemi di coniche (μ, ν) che servono di base alla determinazione del numero di queste curve, che soddisfanno a 5 condizioni qualunque. 392
2) Sopra una estensione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque alle superficie algebriche di qualunque grado. 562

Seite

Tortolini, B. 1) Soluzione di un problema relativo alle equazioni di 3° e 4° grado. 52
2) Sopra un nuovo sistema di variabili, introdotto dal Sig. Ossian Bonnet nella studio delle proprietà delle superficie curve. . . 552
Townsend, R. 1) Solution, by the method of ordinary homographic division, of the problem „To inscribe in a given ruled quadric a polygon of any given order, whose sides shall pass in any prescribed order of sequence through an arbitrary system of given points in space". 436
2) On the nodal cones of quadrinodal cubics and the zomal conics of tetrazomal quartics. 579
3) On the moment of inertia of a ring with respect to its axis of revolution. 675
Transon, A. 1) Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes. 472
2) Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces. 541
3) De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes. 618
4) Cinématique ou phoronomie. 647
Tresca, H. Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux. 723
Tröger. Ueber Summirung unendlicher Reihen. 120
Trudi, N. Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl' integrali delle equazioni lineari cosi' differenziali che a differenze finite. 163
Turnbull, W. P. Review. 385. 481
Tychsen, C. 1) Grundprinciperne for Differentiation af Functioner med een og to uafhaengige Variable. 128
2) Rettelse til in Afhandling af Abel. 175
3) Om bevagelsen af den gyroskopiske Top. 727

Unferdinger, F. 1) Ueber die Kriterien der Theilbarkeit der Zahlen. 90
2) Die verschiedenen Darstellungen des Products
$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\ldots(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$
als Summe von vier Quadraten. 122
3) Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. . 123
4) Die allgemeinen Differentialquotienten der Functionen
$e^{\alpha x}\cos(\alpha+\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\alpha+\beta x)$,
$x^\alpha\cos[b\log(\alpha+\beta x)]$, $x^\alpha\sin[b\log(a+\beta x)]$ etc. 131
5) Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals
$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right)dx\,dy\,dz$. 136
6) Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals
$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right)dx\,dy\,dz$. 136
7) Ueber die beiden allgemeinen Integrale
$\int x^n\cos[m\log(a+bx)]\,dx$, $\int x^n\sin[m\log(a+bx)]\,dx$
und einige verwandte Formen. 141
8) Theorie des Tetraeders aus den 6 Kanten. 364
9) Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck. 368
10) Ueber den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarcoordinaten und über diejenigen Curven, deren Gleichung: $r^k=a^k\sin k\theta$. . 517

Seite

Unferdinger, F. 11) Relation zwischen den Halbmessern der Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide. 564
12) Kubatur der Segmente und Schichtenräume in Flächen zweiter Ordnung. 567
Unterhuber. Einleitung in die Theorie der Determinanten. . . . 82

Valeriani, V. Del piano, sua definizione, assioma del piano elevato a teorema. 30
Vallès, T. Des formes imaginaires en algèbre. 47
Vecchio, A. 1) Sulle equazioni trascendenti. 58
2) Sulle proporzioni e progressioni. 121
Veltmann, W. 1) Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel 730
2) Fresnel's Hypothese zur Erklärung der Aberrationserscheinungen. 790. 857
3) Ueber die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien. . . 790
Venant, de Saint- 1) Rapport sur le mémoire de Mr. Maurice Lévy. 678
2) Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque. 678
3) Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée, contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur. 678
4) Rapport sur 5 mémoires de Mr. F. Lucas intitulés: Recherches concernant la mécanique des atomes. 714. 759
5) Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. 722
6) Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile contenu dans un vase à parois verticales pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur. 724
7) Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique; et remarques sur les propagations du son et de la lumière, sur les résauts, ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents. 735. 775
8) Rapport sur un mémoire de Mr. Boussinesq relatif à la théorie des ondes liquides périodiques. 737
9) Rapport sur un mémoire de Mr. M. Lévy relatif à l'hydrodynamique des liquides homogènes à leur écoulement rectiligne et permanent. 741
10) Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope, lorsque l'on tient compte des dérivées d'ordre supérieur des déplacements très-petits que leurs points ont éprouvés. 743
11) Sur un potentiel de 2me espèce. 752
12) Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation dans des solides ductiles au-delà des limites de leur élasticité. 763
13) Sur un potentiel de 2me espèce, qui resout l'équation aux différences partielles du 4me ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes. 763

Seite

Versluys, J. Application nouvelle des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. 82. 564
Villarceau, Y. 1) Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer. . . . 721
2) Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps. 859
Virieu, de. Solution d'une question (615). 295
Volpicelli, P. Della distribuzione ellettrica sui conduttori isolati. 807

Walberer, J. Ch. Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. . . 651
Walker, J. J. 1) On the anharmonic-ratio sextic. 55
2) On the anharmonic-ratio sextic of a pair of conics. 501
3) Anharmonic properties of conics inscribed in a quadrilateral. . 505
4) On tangents to the cissoid. 510
Walton, W. 1) A demonstration that every equation has a root 41
2) A demonstration of the expression for the number of homogeneous products of n things of r dimensions. 109
3) On the expression of a certain function in the form of series. 116
4) On an equation of mixed differences. 121
5) On a theorem on maxima and minima. 133
6) On a problem in the calculus of variation. 186
7) A demonstration of a property of elliptic functions. 225
8) Note on rhizic curves. 517
9) On axes of Lug and axes of Kick. 525
10) On a property of surfaces of the second degree. 566
11) On the solid of least resistance. 686
12) On a theorem on the resistance of fluids. 687
13) On a problem in the calculus of variation. 717
14) On the stress exercised by a rigid body on a fixed point rigidly connected with the body, which is revolving spontaneously about the point. 728
15) On the relation between the angular velocity about and the angular velocity of the instantaneous axes of a body revolving spontaneously about a fixed point and of the axes of greatest and least mobility. 728
Warburg, E. 1) Ueber tönende Systeme. 778
2) Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern . . 779
Warren, J. Note on a fundamental theorem in hydrodynamics. . 729
Weber, H. 1) Note zu Riemann's Beweis des Dirichlet'schen Princips. 209
2) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+k^2u=0$. 217
3) Ueber das Additionstheorem der Abel'schen Functionen. . . . 245
4) Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale. 246
5) Ueber ein Problem der Abbildung. 628
Weber, W. Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung. 798
Weierstrass, C. Ueber die allgemeinsten eindeutigen und $2n$fach periodischen Functionen von n Veränderlichen. 207
Weihrauch, K. Untersuchungen über eine Gleichung ersten Grades. 51
Weihrich, G. Einige Sätze über die Raumcurve dritter Ordnung und die abwickelbare Fläche dritter Klasse. 579

Seite
Weiler, A. 1) 1. 4. Ueber die Elimination des Knotens in dem Problem der drei Körper.
2. Ueber die Flächenintegrale in dem Problem der drei Körper.
3. Eine Transformation der Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper. 703
2) 5. Ueber die lineare Transformation in dem Problem der drei Körper.
6. Ueber eine Transformation in dem Problem der drei Körper.
7. Ueber die Integration der Störungsglieder in dem Problem der drei Körper. 703
3) Notes sur le problème des trois corps. 703
Weingarten, J. 1) Ueber eine geodätische Aufgabe. 840
2) Ueber die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen oder sphärischen. 841
Weiss, E. Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. 853
Weissenborn, H. Beiträge zur Lehre von der Transformation der Gleichungen. 44
Welsch, J. Démonstration élémentaire d'un théorème de Monge. 535
Wenzel, G. Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. 422. 612
Weyr, Ed. 1) Ueber ähnliche Kegelschnitte. 394
2) Ueber einen Satz von Steiner. 401
3) Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Classe. 403
Weyr, Em. 1) Geometrische Mittheilungen. 377
2) Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. . . 384
3) Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven. . . 420
4) Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven. 422
5) Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involution. 468
6) Ueber Evoluten räumlicher Curven. 556
Weyr, E. 1) Erweiterung der Gültigkeit der Entwickelung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch. 106
2) Ueber einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei- und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades. 378
3) Ueber Curvenbüschel. 379
4) Ueber Involutionen höherer Grade. 383
5) Ueber Punktsysteme auf Curven dritter Ordnung. 401
6) Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte. . 401
7) Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. 402 509
8) Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen bei beliebigen Flächen. 427
9) Ueber algebraische Curven. 467
10) Ueber höhere Involutionen. 467
11) Ueber Kegelschnitte, welche einem Dreieck ein- oder umgeschrieben sind und einen festen Kegelschnitt doppelt berühren. 506
12) Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde . . 528
13) Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. 529
14) Krümmungsverhältnisse eines Curvenbüschels in einem Scheitel. 548
15) Ueber den perspectivischen Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe, und jener dritter Classe vierter Ordnung. 577
16 Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. . 641
17) Ueber die Curve der grössten und kleinsten elektro-magnetischen Wirkung. 814
Wh., W. A. 1 Queries. 88

Seite

Wh., W. A. 2) Book notices. 90
3) A new symbol. 98
White, C. Elements of theoretical astronomy. 844
Whitworth, W. A. 1) La spirale équiangle, ses principales propriétés prouvées géométriquement et Note. 420
2) Law of force in elliptic orbit about any whatever. 694
Wiener, Chr. 1) Die mehrdeutigen Beziehungen zweier ebenen Gebilde auf einander. 375
2) Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. 578
3) Die Berechnung der Veränderungen in einem veränderlichen Dreiecksnetze. 834
Winckler, A. 1) Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. 118. 194
2) Auszug aus der Abhandlung: „Der Rest der Taylor'schen Reihe". 121
3) Ueber einige vielfache Integrale. 142
4) Ueber einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden. 146
5) Ueber die Relationen zwischen den vollständigen Abel'schen Integralen verschiedener Gattung. 246
Wittstein. Logarithmentafeln. 862
Wittwer, W. C. 1) Beiträge zur Molecularphysik. 762
2) Anwendung der Lehre vom Stosse elastischer Körper auf einige Wärmeerscheinungen. 770
3) Entwurf einer Theorie der Gase. 819
Wohlwill, E. Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei. 11
Wolf, R. 1) Die Erfindung des Fernrohres und ihre Folgen für die Astronomie. 11
2) Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques. 15
3) Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. . 645. 759. 833
4) Observations relatives à la division décimale des angles et du temps. 859
Wolff, J. F. Note on Euclid Book VI Prop. 7. 353
Wollseiffen. Ueber die Hypocycloide. 523
Wolstenholme, J. 1) On certain properties of confocal conics, and theorems derived therefrom. 390
2) On a certain system of trigonometrical equations, with applications to the porisms of two coaxal conics. 496
3) Note to the article on porisms. 505
Woolhouse, W. S. B. On general numerical solution. 47
Worpitzky, J. Beiträge zur Functionentheorie. 187
Worthington, R. B. On the parabola. 493
Wrede, F. J. Om kombinerade lif räntors beräknande. 110

Jung, G. 1) Sulle trasformazioni birazionali univoze e sulle curve normale e subnormale del genere p. 44. 474
2) Sopra una equazione dell' 8° grado. 56

Zachariae, G. Den danske Gratmaaling 1ste Bind. 843
Zampieri, J. Altes und Neues. Eine kleine Excursion auf dem Gebiete der Kegelschnittlinien. 481
Zanotti, M. Lezioni sullo termodinamica. 823
Zech. Einige Notizen über Wärme. 822
Zeidler, C. Einige Probleme aus der Dynamik des Punktes. . . 695

Sei

Zelewski, v. Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten. 8

Zeuner, G. Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. . . 11

Zeuthen, H. G. 1) Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un. 328. 42

2) Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. 37

3) Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. 44

4) Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. . 45

5) Om et nyt Rumkoordinatsystem. 45

Ziegler, A. 1) Ueber das Zusammentreffen der graphischen mit der goniometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen. . . 5

2) Ebene und sphärische Trigonometrie. 361

Zimmermann, A. Untersuchung der einer Ellipse ein- und umschriebenen Dreiecke und Parallelogramme bezüglich ihrer Fläche. 503

Zinken-Sommer, H. Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. 796

Zizmann, E. Geometrische Formenlehre. 344

Zmurko, L. Studien im Gebiete mehrerer Gleichungen. 51

Zöllner, F. Ueber die Natur und physische Beschaffenheit der Sonne. 828

Zons. Ueber harmonische Punkte und Strahlen, Pol und Polare, Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinie und Potenzkreis. 357

Zorer. 1) Integration der Gleichungen des ersten Grades mit constanten Coefficienten. 164

2) Malfatti'sches Problem. 360

Zuchetti. Integrali simmetrici. 153

Zuleger, J. Grundzüge von Poinsot's Theorie der Drehung. . . . 725

Zurrio, G. Sulla superficie dell' ellissoide a tre assi inuguali. . . 572